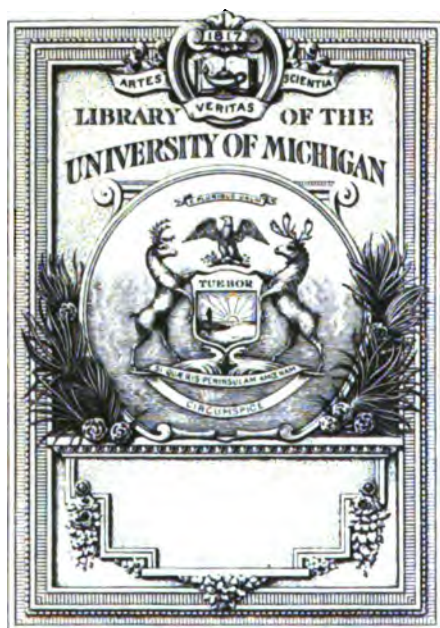

1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

6 From the Sup. to the Encyc, Brit. art Boscovich.

"To the end that he might be the more useful to his scholars, he took time from higher pursuits to compose new elements of Arithmetic, Algebra, Plain and Solid Geometry, and of Plain & Spheric Trigonom; and, although these subjects had been well treated by a great many authors, yet Boscovich's work will always be esteemed by good judges a masterly performance, well adapted to the purpose for which it was intended. To this he afterwards added a new exposition of Conic Sections in which, from one general definition, he draws, with admirable perspicuity, all the properties of those three most useful curves. He had meditated a complete body of pure & mixed mathematics, in which were to be comprehended treatises on Music and on civil & military architecture; but from accomplishing this he was prevented by other necessary occupations."

He was recd. by the wt. great respect, by the R. S. of London, to whom he dedicated his Poem on Eclipses printed there in 1760; another ed. at Venice in 1761, & a 3d. at Paris [the most correct There is also a French Transl. of it. "This very el [illegible] of astron] & he h[illegible]

ELEMENTORUM UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE
P. ROGERIO JOSEPHO
BOSCOVICH
SOCIETATIS JESU
PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

TOMUS I.

CONTINENS
GEOMETRIAM PLANAM, ARITHMETICAM VULGAREM, GEOMETRIAM SOLIDORUM, TRIGONOMETRIAM PLANAM, ET SPHÆRICAM.



ROMÆ MDCCLIV.

PROSTANT APUD FAUSTUM AMIDEI BIBLIOPOLAM
IN VIA CURSUS.

ET IN TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI.
PRÆSIDUM FACULTATE.

AUCTORIS PRÆFATIO.



Rodiit jam superiore anno hic ipse liber sub titulo partis primæ Tomi primi Elementorum Matheseos sine meo nomine, & alter itidem sine meo nomine continens Algebræ Elementa sub titulo partis secundæ Tomi primi. Iis nunc accedunt Sectionum Conicarum Elementa, cum Locorum Geometricorum transformationibus. Primis iis Tomi primi partibus, quamquam hoc anno distractis jam magna ex parte, non quidem iterum recusis, sed iisdem illis, mutatur titulus: accedit meum nomen, & quæ fuerant binæ partes Tomi primi, evadunt Tomus primus, & secundus, ut jam novus, qui nunc additur, fiat tertius. Cur superiore anno meum defuerit nomen, facile intelliget, qui fusiorem præfationem legerit adjectam Tomo tertio, quam ut percurrat, Lectorem rogo. Id ut nunc accederet, impressa simul præfatione illa, facile a me impetravit is, cujus sumptibus tertius nunc prodit Tomus.

Idem autem priores illos non Tomi partes, sed Tomos appellari maluit, cum nominis mei addendi gratia mutari deberet titulus, crescente nimirum universo opere, in quo jam integra postulor totius Matheseos Elementa.

Porro prima illa Geometriæ, & Arithmeticæ Elementa, quæ solent sub Præceptoris disciplina addisci contractiore methodo exposita sunt in hoc primo Tomo ita, ut præcipua quædam tantummodo capita percurrantur, & Præceptoris ipsius ductum omnino requirant, qui appendicem legat in fine addiectam. Ejus appendicis ope, confido, fore, ut Tyro rite institutus brevi, & maxime cum fructu Geometriam addiscat, & se abunde in inventione exerceat. A fine Arithmeticæ usque ad primi Tomi finem omnia, quæ occurrunt, & uberius explica-

in

ta sunt, & fusius pertractata. Menda nonnulla Typographi, vel librarii exscribentis per sese facile deteguntur. In Trigonometria plana vel mihi scribenti præpropere, vel Editori, qui plura in hoc Tomo quandoque contraxit, effugit quintus casus triangulorum rectangulorum, qui addendus fuisset post num.10, quo nimirum dato altero angulo, quærantur reliqua. Facile autem solvitur, cum augulus alter inveniatur per canonem 1, basis per 2, latus alterum per 3.

In tertio Tomo omnia sunt abunde explicata, nec ductorem, ut arbitror requirent. In reliquis itidem curabo, ne quid Tyro in Geometria, & primis calculi rudimentis versatus requirat. Eorum autem, quæ consequentur, & quorum materia omnis in promptu est, hic erit ordo. Quarto Tomo persequar Elementa infinitorum, & infinitesimorum pure geometrica, ubi etiam de generalibus agam curvarum proprietatibus, & earum, quæ omnium maxime, vel utiles vel notæ sunt Elementa tradam. Alius deinde aget de applicatione Algebræ ad Geometriam, & de seriebus infinitis, alius præcipua calculi differentialis, & integralis fundamenta aperiet, & usum demonstrabit. Hinc absolutis, quæ ad puram Mathesim pertinent, aggrediar mixtam. Primo quidem ea, quæ ad motum pertinent, tum quæ ad Lucem, exponam, deinde Sphæram, & ex ea pendentem Gnomonicam, tum Astronomiam præcedentibus omnibus indigentem evolvam; quibus adiiciam demum illa, quæ ex Mathesi requiruntur ad Geographiam, Chronologiam, utramque Architecturam, & Musicam, si nimirum vita, & otium superest.

In iis omnibus erunt pleraque, ut in his ipsis, quæ jam edidi sunt sane multa, mihi quidem nova, & deductionis ordinem habebo in primis ob oculos, cujus deductionis specimen in primo potissimum, ac tertio tomo, & vero etiam in secundo me abunde dedisse arbitror.

DO-

DOMINICUS FRANCHINI
SOCIETATIS JESU

In Provincia Romana Præpositus Provincialis.

CUM Librum, cui titulus: *Elementorum Matheseos &c.* a nostræ Societatis Sacerdote conscriptum, aliquot ejusdem Societatis Theologi recognoverint, & in lucem edi posse probaverint, potestate nobis a R. P. Nostro Ignatio Vicecomite Præposito Generali ad id tradita, facultatem concedimus, ut Typis mandetur, si ita iis, ad quos pertinet, videbitur. In quorum fidem has litteras manu nostra subscriptas, & sigillo nostro munitas dedimus. Romæ 11. Decembris 1751.

Dominicus Franchini.

IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

F.M. de Rubeis Patriarcha Constantinopolitanus Vicesg.

JUssu Reverendissimi Patris Sacri Palatii Apostolici Magistri legi librum, cujus titulus: *Elementorum Matheseos &c.*, in eoque nihil reperi a Fide Orthodoxa, & a bonis moribus alienum. Itaque magno cum studiosæ juventutis fructu edi posse censeo. In quorum fidem &c.

Dat. die 20. Decembris 1751.

Benedictus Stay.

IMPRIMATUR.

Fr. Joseph Augustinus Orsi Ordinis Prædicatorum, Sacri Palatii Apostolici Magister.

EDI-

EDITORIS MONITUM
AD LECTOREM.



ATHESEOS Elementa edenda curavimus Adolescentium rationibus accommodata, qui publicis in Scholis huic facultati dant operam: eorum scilicet, quibus plerumque ex hujusmodi disciplinis ea tantum delibare est animus; quæ & captu faciliora sint, & cum cæteris *facultatibus* arctius connexa. Si qui sunt *igitur*, quos paulo major & exquisitior harum rerum scientia delectet; ubi satis fuerint in his Elementis exercitati, privato studio a probatissimis Scriptoribus haurire poterunt, quæ communem discentium captum excedunt. Brevitati consulendum in primis esse duximus, ut liber evaderet qui & facile parari posset, & commodè circumferri.

Licet autem perſpicuitatis etiam ratio ſit habita, tamen ſi cui quædam videbuntur aliquanto preſſius dicta, & obſcurius, Magiſtri voce aliquid præſtandum eſſe meminerit. Arithmeticæ locum inter planam, & ſolidorum geometriam medium dedimus Euclidis exemplum magis ſequuti, quam quod id rerum natura poſtularet. Cæterum ſatius censemus eodem tempore in utroque genere quantitatis, continuæ nempe, & diſcretæ, tyronem exerceri, ob eamque rem nihil veriti ſumus in Geometriæ planæ decurſu ad contrahendas, aut clarius exponendas demonſtrationes arithmeticam adhibere. Reliquorum ratio ſatis legentibus conſtabit. Vale.



ELE-



ELEMENTA GEOMETRIÆ.

Axiomata.

1. QUÆ eidem sunt æqualia, inter se sunt æqualia: Et quod uno æqualium majus est vel minus altero quoque majus vel minus erit.

2. Si æqualibus æqualia demas vel addas, residua in primo aggregata in secundo casu sunt æqualia. Et si æqualibus inæqualia demas, vel addas, ea quæ remanent sunt inæqualia.

3. Quantitates quæ certam aliquam quantitatem tantundem continent, vel ab ea tantundem continentur, sunt æquales; unde quantitates æquales in eamdem quantitatem ductæ, vel per eamdem divisæ sunt æquales.

4. Si ex duabus quantitatibus prima sit dupla, tripla, vel utcumque multiplex alterius, & a prima auferatur pars dupla, tripla, vel æquè multiplex ejus, quæ aufertur a secunda; erit residuum primæ duplum, triplum, vel æquè multiplex residui alterius.

5. Quæ sibi mutuò superimposita perfectè congruunt sunt æqualia.

6. Totum qualibet sui parte majus est: est autem omnibus sui partibus simul sumptis æquale.

Definitiones.

1. Punctum est, cujus nulla pars est.
2. Linea est longitudo latitudinis expers.
3. Superficies est longitudo, & latitudo profunditatis expers.
4. Solidum est extensio in longum, latum, & profundum.

Scholion.



D tres priores definitiones probè intelligendas, finge tibi tabulam KL affabrè expolitam (Fig. 1.), cujus pars A alba sit, B nigra, D rubra, C cærulea, EI limes album colorem a nigro dirimens, nullam certè latitudinem habet; utcumque enim in alterutram partem inclines, vel in albo, vel in nigro consistes; limitem tamen hunc in longum partiri licet. Idem dic de limitibus IG, IH, IF. Et hæc est notio lineæ.

Concursus autem harum linearum I neque latitudinem, neque longitudinem habet, adeoque nec partes. Et hæc est notio puncti Mathematici, ex qua oritur axioma illud; lineam a linea secari in unico tantum puncto.

Quod si tabula KL aliquam habeat licet minimam profunditatem, limes interius dirimens partem albam A, a nigra B habebit longitudinem EI, tantamque latitudinem, quanta est tabulæ profunditas, ipse vero profunditatis expers erit. Et hæc est notio superficiei.

Si jam omnes colores uno obducantur, qui sit omnibus partibus communis, limes EF videri desinet; adhuc tamen erit in tabula, quandoquidem locus manet ubi & albus desierat color, & niger cœperat. Quare sublatis coloribus manet adhuc puncti, lineæ, & superficiei notio.

Duo hinc eruuntur: 1. hoc punctum, & hæc linea Physica non sunt; uti esset ex. gr. ferri filum tam tenue, quod neque latitudinem habeat, neque profunditatem, hoc enim fieri posse plerique negant.

2. Ejusmodi puncta, lineæ, superficies, posita corporum continuitate, non sunt res imaginariæ, quas sibi intellectus a rebus abstrahens confingat, sed verè existunt independenter ab ingenii nostri commentis. Corpora quidem non sunt, sed corporum affectiones, quæ ab invicem distrahi non possunt. Hinc punctum est terminus lineæ, linea superficiei, superficies corporis.

Def. 5. Circulus est figura plana, unica curva linea comprehensa, quæ peripheria dicitur, sive circumferentia, ad quam omnes rectæ lineæ a puncto medio, quod centrum dicitur, ductæ, æquales sunt inter se.

6. Linea recta per centrum ducta, & utrinque in peripheria terminata diameter dicitur, quod circulum bifariam dividat.

Scholion.

In fig. 2. circulus est ADEB, sive FGLK; diameter est AB, sive FL, unde æquales sunt rectæ CA, CD, CE, CB, quæ semidiametri dicuntur, sive radii. Circulus dividi solet in partes æquales 360, quæ gradus dicuntur; singulos gradus partimur in 60

minu-

minuta prima, quodlibet minutum primum in 60 secunda, & sic in infinitum. Solent autem hæc designari quibusdam lineis numeris superimpositis, cum gradus per o designentur. Ita si forte occurrant $35^{o}.25'.36''.42'''$. lege 35 gradus, 25 minuta prima, 36 secunda, 42 tertia.

Si duo circuli idem habeant centrum, ac rectæ lineæ CD, CE comprehendunt in interiori circulo 30, aut 40 gradus, manifestum est, quod totidem gradus in exteriori comprehendent; quod probe notandum est ad angulorum notionem rite concipiendam.

Sed antequam de angulis dicere aggrediar, subjiciam hic postulata, quo nomine Geometræ operationes designant, quas Geometria ex Mechanicis mutuatur. Constat autem has perfici posse, & per circinum, & regulam facile perficiuntur.

Postulata.

1. A puncto ad punctum rectam lineam ducere.

2. Rectam terminatam producere, ita ut recta maneat.

3. Ex dato puncto tamquam centro, dato intervallo tamquam radio, circulum describere.

4. Ex recta majori partem auferre minori æqualem.

Scholion.

Quidquid geometricè fit, per hæc postulata perficitur; aliter non dicetur geometricè factum.

Def. 7. Angulus est unius rectæ lineæ ad alteram inclinatio.

Scholion.

Anguli notio est omninò necessaria, & ope circuli facillime concipitur. Duæ rectæ lineæ HK, FL, quæ

quæ concurrunt in C, efficiunt angulos LCH, HCF, FCK, KCL, qui non ex eo majores fieri intelliguntur, quod producantur ipsorum latera; sed ex eo profectò quod latera ipsa, sive crura divaricentur: quandoquidem anguli natura in majori, aut minori inclinatione unius lineæ ad aliam consistit. Hinc angulorum mensura sunt gradus, quos ipsorum latera comprehendunt in peripheria circuli ex anguli vertice tamquam centro descripti. Si arcus EB 60 gradus continet, angulus LCH erit graduum 60. Et quia eumdem numerum graduum continebit arcus HL, ad hunc angulum definiendum idoneus est quilibet circulus centro C descriptus.

Corollarium.

Hinc si ad punctum M (Fig.3.) rectæ datæ ON fieri debeat angulus æqualis angulo dato LCH, centro facto in C, & M, & quolibet intervallo, dummodo sit *utrobique æquale*, describatur arcus BE occurrens lateribus CL, CH in B, & E; itemque arcus QP *indefinitè*: tùm facto centro in P intervallo BE ducatur arcus alterius circuli, qui ex priori abscindet arcum PQ æqualem arcui BE, & ducatur recta MQR: patet angulum NMR æqualem fore dato angulo LCH.

Def.8. Linea dicitur alteri lineæ perpendicularis, quando in ipsam incidens facit angulos hinc & inde æquales, cujusmodi sunt anguli GCL, GCF. Anguli hujusmodi dicuntur recti.

9. Angulus obtusus dicitur, qui est recto major, ut FCH.

10. Acutus, qui recto minor, ut HCL.

Co-

Coroll. 1.

Patet illum esse angulum rectum, qui quartam circuli partem, sive 90 gradus comprehendit; illum esse acutum, qui pauciores, illum obtusum, qui plures continet gradus.

Coroll. 2.

Manifestum est quoque, quod recta HC incidens in rectam FL vel duos angulos rectos facit (si videlicet cum perpendiculari coincidat) vel duobus rectis æquales: etenim anguli FCH, HCL simul sumpti totam semicircumferentiam, sive 180 gradus comprehendunt, totidem scilicet, quot duo recti.

Coroll. 3.

Hinc quotcumque sint lineæ rectæ, quæ concurrant ad punctum C, omnes, quos faciunt, anguli KCL, LCK, KCF &c. totam peripheriam, sive 360 gradus comprehendunt, adeoque 4 rectis æquales sunt.

Coroll. 4.

Si rectæ HC, LC producantur, manifestum est, quod in unam lineam coalescere non possunt, sed efficient angulos FCK, LCH, qui dicuntur ad verticem oppositi, æquales inter se: cum sit enim dimidia peripheria FKL æqualis dimidiæ peripheriæ HLK, sublata communi parte KL, erunt arcus reliqui FK, HL æquales inter se.

Def. 11. Triangulum æquilaterum illud est, quod habet omnia latera æqualia, ut ABC. (Fig. 4.)

12. Isoscele dicitur, quod duo tantum habet æqualia latera, uti sunt AB, BC. (Fig. 5.)

13. Scalenum est, quod omnia habet latera inæqualia, ut ABC. (Fig. 6.)

14. Trian-

14. Triangulum rectangulum est quod unum habet angulum rectum, ut BAC. (Fig.6.)

15. Quadratum est figura quatuor lateribus constans, quæ & æqualia sint inter se, & ad angulos rectos juncta. (Fig.1.)

16. Si autem angulos quidem habeat rectos, sed duo latera opposita reliquis duobus majora, dicitur simpliciter rectangulum. (Fig.7.)

17. Parallelæ dicuntur rectæ lineæ, quæ in infinitum productæ nusquam sibi occurrunt, nec magis ad invicem accedunt.

Scholion.

Ex ipso parallelismi conceptu, affectiones quædam parallelarum descendunt, quibus in demonstrandis magnopere laborant Geometræ vel ex hoc ipso, quod sine ullo magisterio natura ipsa de illarum veritate nos edocet. Sunt autem hæ. Lineæ rectæ in eodem plano *existentes vel* convergunt, uti (Fig.8.) GI, FD divergentes ex parte opposita GH, FC: vel eodem *inter se* ubique distant intervallo nusquam invicem occurrentes, uti sunt AB, CD. Si æque ubique distent ab invicem, ducta qualibet recta EO, quæ parallelas secet in G, & F; ipso naturæ lumine notum est, eamdem fore parallelæ utriusque inclinationem ad rectam EO, adeoque erit 1.° angulus OFD æqualis angulo OGB, quorum primus dicitur externus, secundus autem internus & oppositus. 2.° cum angulus GFC æquetur angulo DFD ad verticem opposito (per Coroll.4. Def.10.) erunt etiam æquales anguli BGF, GFC, qui dicuntur alterni. 3.° tandem anguli OFD, GFD cum æquentur duobus rectis (per Coroll.2. def.10.) æquales item erunt duobus rectis anguli

anguli interni, & ad eamdem partem positi DFG, FGB.

Pariter: quoties angulus OFD æqualis erit interno & opposito FGB, erit eadem inclinatio rectarum CD, AB ad rectam EO, ac proinde rectæ illæ neque convergunt, neque divergunt, sed parallelæ sunt inter se. Rursus quoties æquales erunt anguli alterni BGF, GFC, vel duobus rectis erunt simul æquales interni ad eamdem partem positi BGF, GFD; semper angulus externus DFO æqualis erit angulo interno & opposito BGF, & rectæ AB, CD erunt parallelæ.

Coroll. 1.

En igitur tres parallelarum necessarias affectiones, quarum ex una qualibet inferre licet rectas illas esse parallelas. 1.° Angulus externus æqualis est interno & opposito. 2.° Anguli alterni æquales sunt inter se. 3.° Interni & ad eamdem partem duobus rectis æquantur.

Coroll. 2.

Si duæ rectæ AB, HK (Fig. 9.) parallelæ sint eidem rectæ CD, erunt etiam inter se parallelæ. Etenim ductâ rectâ EO illis occurrente in G, F, I, inclinatio rectarum KH, BA ad rectam EO, eadem erit atque inclinatio rectæ CD ad eamdem.

Coroll. 3.

Si per datum punctum F ducere oporteat rectam CD parallelam datæ rectæ AB, ex quolibet hujus puncto G ducatur recta GFO, & fiat (per Coroll. def. 7.) angulus OFD æqualis angulo OGB, eritque recta FD parallela ipsi AB.

Scho-

Scholion.

His parallelarum affectionibus nititur methodus, quia Eratosthenes telluris ambitum mensus est. Urbis Sienes puteos norat ille solstitii æstivi tempore solis radios in imo excipere, cum illis sol ad perpendiculum immineret. Porro Sienem, & Alexandriam in eodem meridiano sitas existimavit, ut eodem temporis momento meridies utrobique esset; ac præterea Sienem Alexandria abesse stadiis 5000. His positis en methodum, qua usus est. Sit T (Fig. 10.) telluris centrum, PAF meridiani circulus utrique Civitati communis. Siene, cui sol imminet ad perpendiculum, sita sit in P: & quidem si radius SP produci intelligatur, per centrum terræ transibit. Sit demum A Alexandria. In hac ita collocavit hemisphærium cavum CAD, ut acies stili AE in centro esset hemispherii, stilus vero ipse perpendicularis esset horizonti, *adeoque per terræ centrum* transiret si produci *intelligeretur*. Exinde in ipsa solstitii meridie *aciem umbræ* a stilo projectæ AB diligenter notavit, reperitque eam comprehendere in hemisphærio quinquagesimam partem totius peripheriæ, seu 7°, 12'. Cum radii Solis SPT, sEB ob immanem solis distantiam sint ad sensum paralleli; æquales erunt anguli alterni BET, ETP; quare erit etiam angulus ATP, adeoque arcus AP, quinquagesima totius circuli pars. Igitur cum hæc ex hypothesi contineat stadia 5000; totus telluris ambitus continebit stadia 250000, sive passuum millia 31250, siquidem 8 stadia singulis passuum millibus tribuantur. Et hæc quidem methodus pluribus de causis minus est idonea ad exactam telluris dimensionem, ac perperam ab Eratosthene

assumi

assumi censent, quod Sienes & Alexandria sub eodem jaceant meridiano, quod locorum intervallum stadiorum fuerit 5000, & quod radii SP, sE pro parallelis haberi possint. Nihilo tamen minus libuit hujus Astronomi artificium exponere, ut vel hinc agnoscant Tyrones quantam & utilitatem,& voluptatem ex hoc studio sibi debeant polliceri, quantoque laboris sui fructu Geometræ ex his levibus initiis, quæ nullius fere momenti videntur, gradum sibi fecerint ad ea cognoscenda, quæ longe ab oculis nostris natura seposuit.

*Def.*18. Parallelogrammum est figura quadrilatera, cujus latera opposita parallela sunt. (Fig. 11.)

PROPOSITIO I.

IN omni triangulo si latus unum producatur, angulus externus æqualis est duobus internis & oppositis: Et uniuscujusque trianguli tres anguli duobus rectis æquantur.

In Triangulo ABC (Fig. 12.) producto latere AC in D, angulus BCD externus dicitur. Dico igitur primò hunc angulum æquari duobus A & B internis & oppositis.

Demonstr. Ducatur CE parallela lateri AB (per Coroll.3. def. 17.) Erit angulus externus ECD æqualis interno & opposito BAC (Coroll.1. def. 17.); & angulus ECB æquatur alterno ABC: ergo totus angulus BCD æquatur duobus A, B, Q.E.D.

2. Tres anguli simul sumpti trianguli ABC, hoc est A, B, BCA æquantur duobus rectis. Nam (Coroll.2. def.10.) anguli BCD, BCA æquantur duobus rectis;

rectis: sed BCD æquatur angulis B, & A: ergo anguli B, A, BCA æquantur duobus rectis. Q. E. D.

Coroll.

Hinc cujusvis trianguli tres anguli simul sumpti æquantur tribus angulis cujusvis alterius simul sumptis: quare si in duobus triangulis duo anguli inveniantur æquales, etiam tertius unius alterius tertio æqualis erit: & si unius trianguli duo anguli innotescant, etiam tertius notus erit.

Scholion.

Hujus propositionis usus incredibilis dictu est: Ex ea Keplerus ambitum telluris metiri docuit sine ullo ad solem, & stellas recursu. Sint T & M (Fig. 13.) duorum montium vertices satis dissiti inter se: sitque AB arcus interceptus inter utriusque montis radices, quem diligenter metiri oportet. Præterea quam fieri poterit accuratissimè notentur anguli CTM, CMT quos pendulum efficiet per rectas TC, MC ad centrum telluris constanter vergens, & linea visualis TM. *Horum angulorum summam ex* 180. gradibus aufer, differentia dabit angulum ACB; ex quo cognosces quota portio totius circuli sit arcus AB; cumque hujus dimensio per notas mensuras deprehensa fuerit, ad easdem licebit totius ambitus dimensionem revocare.

Ricciolius hanc methodum adhibuit, ut ipse refert Geogr. Ref. lib. 5, cap. 33, in Turri campanaria Mutinensi, & in vertice montis Paterni, qui Bononia non longe abest. Invenit angulum CTM 90°, 15', 7''; angulum verò CMT 89°, 26', 13'', 27''', his ex 180° subductis reliquus fuit angulus C 18', 39'', 33'''. Cumque locorum intervallum AB reper-

 tum

tum ab eo esset passuum Bononiensium 20016 $\frac{1}{5}\frac{1}{0}\frac{0}{4}$ facile intulit gradum telluris passus continere 64363. ac totum proinde ambitum passus 23179680.

Accuratius multo quæsitæ sunt a recentioribus Telluris dimensiones, ex quibus constat imminui gradus a Polis ad Æquatorem, & contra. Ad usus tamen præsentes, ubi Tellurem pro sphæra habere possumus, retinebimus cum Cassino Picardi mensuram, ut singuli gradus exapedas habeant 57060; hoc est, Milliaria Parisiensia 68, ac præterea passus 472. Unde totus telluris ambitus continebit milliaria 24649, passus 920. Minor proinde quam qui a Ricciolio inventus fuerat, ut patet si pes Parisiensis ad Bononiensem revocetur, qui ad illum est ut 1682 $\frac{2}{5}$ ad 1440.

PROPOSITIO II.

SI duo triangula duo latera habuerint æqualia, & angulos ab his lateribus interceptos æquales; & basim æqualem habebunt, & aream, & angulos æqualibus lateribus oppositos æquales.

In triangulis ABC, DEF (Fig. 14. 15.) sint AB, & BC unius latera æqualia alterius lateribus DE, EF, & angulus B æqualis angulo E; dico basim AC æqualem esse basi DF, angulos A & C angulis D & F, & totum triangulum ABC toti triangulo DEF. Etenim si latus AB ejus æquali lateri DE superimponi intelligatur cum illo congruet, & ob angulum B æqualem angulo E etiam latus BC cadet super sibi æquale EF, & punctum C in F. Ergo basis AC congruet cum basi DF, angulus A cum D, C cum F, & totum triangulum cum toto. Ergo æqualia erunt (Ax. 4.) Q. E. D.

Co-

Coroll. 1.

Rectæ igitur, quæ rectas lineas parallelas, & æquales jungunt, ipsæ quoque parallelæ sunt, & æquales. Nam si BC (Fig. 16.) parallela est, & æqualis rectæ AD, ductâ AC erunt (Coroll. 1. def. 7.) anguli alterni BCA, CAD æquales. Quare in duobus triangulis BCA, DAC erunt latera BC, AC æqualia lateribus AD, AC, & anguli ab his lateribus intercepti æquales. Ergo & bases æquales erunt, & anguli alterni DCA, CAB; adeoque rectæ AB, CD parallelæ sunt, & æquales.

Coroll. 2.

Si triangulum ABC (Fig. 17. 18.) sit isoscele; habens nempe duo latera AB, BC æqualia, eodem pacto ostenditur angulos A, C ab basim æquales habere. Intelligatur enim ejusmodi triangulum bis positum, & triangulum BAC superimponi triangulo *b a c* situ inverso. Ob æqualitatêm laterum inter se, latus AB superimpositum lateri *b c* cum illo congruet, & ob æquales angulos B & *b* jacebit BC super sibi æquale latus *a b*, quare punctis A & C abeuntibus in *c* & *a* basis cum basi congruet, angulus A cum angulo *c*, & C cum *a*. Æquantur igitur hi anguli inter se, adeoque angulus A angulo C.

Coroll. 3.

Cum sit triangulum æquilaterum quaquaversus isoscele, omnes ejus anguli sunt æquales inter se, ac proinde erunt singuli 60 graduum. Si vero triangulum isoscele duobus æqualibus lateribus rectum angulum comprehendat, erunt duo reliqui semirecti, graduum singuli 45. (per Prop. 1.)

Coroll. 4.

Si ACB (Fig. 19.) ſit diameter circuli ADF, cujus centrum in C, & centro B intervallo BC deſcribatur alter circulus priorem ſecans in D, & F, ducanturque rectæ CD, DB, erunt hæ (def. 5.) æquales ſemidiametro CB, ac proinde æquales inter ſe. Ergo triangulum BCD erit æquilaterum, & angulus DCB. itemque arcus DB graduum 60, ſive ſexta pars peripheriæ ADF. Quare ſi iterum centro facto in A intervallo AC abſcindantur arcus AE, AG, conſtabit ratio, qua exagonum regulare (hoc eſt figura ſex æqualibus lateribus conſtans) in dato circulo inſcribi poſſit. Illud quoque manifeſtum eſt, quomodo per gemini circuli deſcriptionem ſuper data recta CB triangulum æquilaterum deſcribi poſſit.

PROPOSITIO III.

SI duo triangula habuerint duos angulos æquales, & latus his angulis interjectum æquale, habebunt & reliqua latera, & aream æqualem.

Sint anguli A, C (*Fig.* 14. 15.) æquales angulis D, F, & latus AC lateri DF, dico fore latera AB, BC æqualia lateribus DE, EF, & totum ABC, toti DEF. Nam ſi latus AC lateri æquali DF ſuperimponi intelligatur, anguli A & C congruent cum æqualibus D & F, ac proinde latera AB, BC cum lateribus DE, EF poſitione congruent. Quod autem etiam terminatione congruant patet ex eo, quod ſi punctum B lateris AB non caderet in punctum E, ſed ſupra, vel infra, tunc latus BC neceſſario caderet vel extra, vel intra latus EF, adeoque angulus C major, vel minor foret angulo F contra hypotheſim.

sim. Ergo punctum B cadit in E, & latera lateribus perfectè congruunt, & angulus B angulo E, & totum triangulum ABC cum toto DEF. Q. E. D.

Coroll. 1.

Si præter latera AC, DF æquentur anguli A, B angulis D, E; etiam C æquatur F (per Coroll. pr. 1.) ac proinde & reliqua latera, & tota triangula æqualia. Quoties igitur in duobus triangulis æquantur duo anguli, & unum latus: tota sunt æqualia.

Coroll. 2.

Si triangulum ABC (Fig. 17. 18.) habet angulos ad basim A, C æquales, æqualia etiam habet latera his opposita. Nam si triangulum ejusmodi bis positum intelligatur, & ABC situ inverso superimponi triangulo *abc*; ob æqualitatem angulorum inter se angulus A superimpositus angulo *c* cum illo congruet, & ob AC æqualem *a c* puncto C abeunte *in a*, *angulus* C congruet cum *a*, ac proinde AB cum *b c*, CB cum *a b*. Unde AB æquatur ipsi *BC*.

Coroll. 3.

Si in triangulo rectangulo acutorum unus fuerit semirectus, alter quoque semirectus erit (Coroll. 1. pr. 1.), & triangulum proinde erit isoscele.

Scholion.

Hinc eruitur ratio omnium expeditissima ad turrium, aliorumve ædificiorum altitudines investigandas. Paretur ex aliqua materia satis spissa triangulum MCN (Fig. 20.) rectangulum in C, & isoscele. Ita oculo applicetur in M, ut alterum latus NC situm verticalem constanter obtineat (id quod ope penduli ex N suspensi facile perficitur) ac

tamdiu ad turrim accedas, vel ab eadem recedas; donec radius visualis secundum latus MN directus in turris TR vertice T terminetur. Notetur punctum Q, in quem desinit radius MC, eritque altitudo QT æqualis intervallo MQ. Cum enim parallelæ sint lineæ NC, TQ, ac proinde angulus TQC æqualis externo NCM (Coroll. 1. def. 17.) erit TQM rectus. Quare cum sit angulus M semirectus (Coroll. 3. pr. 2.) etiam T semirectus erit, & triangulum MQT isosceles; & latus TQ æquale lateri MQ, & tota turris altitudo TR æqualis rectis MQ, QR, quas metiri licet.

Coroll. 4.

Ex eadem propositione tertia eruitur, quod in omni parallelogrammo latera, & anguli oppositi sunt æquales, & totum parallelogrammum bifariam dividitur a diametro, sive diagonali AC. (Fig. 16.) Nam in triangulis ABC, ACD, præter basim AC communem, æquantur anguli alterni DCA, CAB, & DAC, ACB (Coroll. 1. def. 17.) ac proinde & reliquus angulus, & latera, & tota triangula æqualia sunt.

PROPOSITIO IV.

SI in duobus triangulis tria latera æqualia sint; & anguli æqualibus lateribus oppositi, & tota triangula erunt æqualia.

In triangulis ABC, DEF (Fig. 21. 22.) æqualia sint latera AB, BC, CA lateribus DE, EF, FD; dico etiam angulos A, B, C æquales fore angulis D, E, F. Nam si latus DF concipiatur superimponi lateri

teri æquali AC, vertex E cadet in B. Cadat enim, si fieri potest, extra verticem B in aliquod punctum G. Quoniam ex hypothesi AB æquatur lateri AG, & BC ipsi GC; ductâ BG, erunt isoscelia triangula BAG, BCG, ac proinde angulus ABG æqualis erit angulo AGB, (Coroll.2, prop.2.) qui cum sit minor angulo CGB, pars toto, etiam ABG minor erit eodem angulo BGC. Jam verò cum sit etiam triangulum BCG isoscele, erit idem angulus CGB æqualis angulo CBG: ergo prior ille ABG minor esset etiam hoc ultimo GBC, totum parte, quod est absurdum. Igitur non possunt esse latera AB, BC æqualia lateribus AG, GC, quin punctum G cadat in B. Quare si triangulum DEF triangulo ABC superimponatur, uti dictum est, perfectè congruent, angulique, & areæ æquales erunt. Q. E. D.

Coroll.

Duo *igitur circuli* nonnisi in duobus punctis *se mutuò intersecant*. Nam si recta AC (*Fig.23.*) centra *jungat duorum* circulorum se mutuò secantium in B & H; ductis rectis lineis AB, BC, sequitur ex modo demonstratis inveniri non posse ex parte ipsius B punctum aliud G, ad quod ductæ lineæ AG, GC æquentur duabus AB, BC: quod tamen necesse esset, si punctum G in utriusque circuli peripheria situm esset, adeoque si in eo puncto iterum se circuli intersecarent.

PROPOSITIO V.

DAtum angulum rectilineum bifariam dividere.

Oporteat bifariam dividere angulum rectilineum HCI. (Fig.24.) Centro facto in C, quolibet

intervallo CA describatur circulus EAL secans alterum latus in B, ac deinde centris A & B, eodemque intervallo notentur arcus circulorum sibi mutuo occurrentium in K, & ducta KC, dico quod hæc datum angulum bifáriam secabit. Etenim in triangulis ACK, BCK ex constructione latera AC, AK æquantur lateribus CB, BK, & basis CK utrique communis est: ergo (prop.4.) anguli æqualibus lateribus oppositi æquales sunt, adeoque angulus ACK æquatur angulo KCI: Q. E. F.

Scholion.

Anguli trisectio, sive methodus, qua quivis angulus in tres partes æquales dividi possit, frustra a Geometris quæsita est per circinum & regulam. Franciscus Vieta solutionem hujus problematis mechanicam dedit, sed elegantem, & expeditam. Sit angulus HCI (Fig.25.) quem oporteat in tres partes dividere. Centro facto in C quovis intervallo CA describatur circulus ABD secans latus CI in B, & latus HC indefinite productum versus F in A & D. Regula BF circa punctum B moveatur, donec ita occurrat rectæ AD in F, ut segmentum EF inter hoc punctum, & peripheriam interceptum circino inveniatur æquale rectæ CA (id autem est, quod geometricè fieri nequit): tùm sumptis arcubus AG, GK æqualibus arcui DE, ducantur rectæ CG, CK; eritque angulus HCI in tres æquales partes divisus. Etenim ducta CE, erit hæc æqualis radio CA, cui per constructionem æqualis est recta EF; erit ergo isoscele triangulum CEF, ac propterea æquales anguli ECF, EFC (Coroll.2. prop.2.). Quare cum angulus externus CEB horum quolibet duplus sit (Prop.1.)

cum-

cumque sit etiam triangulum BCE isoscele, erit etiam angulus CBE duplus angulo F. Ergo angulus externus BCH æqualis duobus internis oppositis B & F, triplus erit angulo F, sive ECD, qui est illi æqualis; ac propterea triplus erit tam angulo ACG, quam angulo GCK. Unde etiam KCB tertia pars est totius HCB, & HCB in tres æquales partes divisus est; Q. E. F.

Coroll. 1.

Si puncta A, B (Fig. 24.) jungantur recta AB, quæ occurret rectæ CK in D, in triangulis ACD, BCD, præter latera AC, CB æqualia, & latus CD commune, anguli ACD, BCD ab æqualibus lateribus intercepti æquales sunt: ergo etiam basis AD basi DB æqualis erit (Prop. 2.). Quare si rectam terminatam AB bifariam dividere oporteat, vides quid facto opus sit. Nempe centro facto in A, & B quolibet *intervallo*, dummodo utrobique idem sit, satis erit notare arcus circulorum sibi mutuo occurrentium *in punctis* C & K, & hæc puncta jungere recta CK, quæ datam lineam bifariam secabit in D.

Coroll. 2.

Ex eadem prop. 2. constat æquari angulos CDA, CDB; ac propterea CD perpendicularis est rectæ AB. Ergo si ex puncto C demittere oporteat perpendicularem lineam in rectam indefinitam FG, satis erit centro C, & quolibet intervallo CA notare arcum circuli AB, & invento, uti supra dictum est, puncto K, rectam ducere CK, quæ ad perpendiculum insistet rectæ datæ in puncto D.

Coroll.3.

Quod si in ipsa recta FG detur punctum D, ex quo perpendiculum oporteat excitare, sumptis ad arbitrium AD, BD hinc & inde æqualibus; centro facto in A & B, eodem intervallo notentur arcus circulorum, qui se mutuò intersecant in C, ducaturque CD, quæ erit perpendiculum quæsitum. Nam in triangulis CDB, CDA latera omnia æqualia erunt, ac propterea anguli CDB, CDA æquales (per Pr.4.)

Coroll.4.

Ex iisdem demonstrationibus patet, quòd in circulo EABL recta CD per centrum transiens, si bifariam secat chordam AB, secat etiam ad angulos rectos: & si secat ad angulos rectos bifariam secat.

Schol.2.

Ex perpendicularium doctrina, ac præcipuè ex prop.3. ratio pendet ictûs reflexi in ludo trudiculari, sive unica reflexione opus sit, sive duplici.

Præmittere tamen oportet tamquam experientia notum, globum perfectè elasticum A (Fig.26.) cujusmodi ferè sunt eburnei, obliquè occurrentem plano immobili CD in B ita resilire versus E, ut fiat angulus reflexionis DBE æqualis angulo incidentiæ CBA: quam legem in luminis reflexione natura constanter servat.

Sit igitur MCDF (Fig.27.) mensæ lusoriæ portio, in qua sphæram ebbrneam A trajicere oporteat per anulum ferreum E ex parte ipsius, quæ respicit punctum N. Producatur FN ad CD perpendicularis in I, donec fuerit IN æqualis ipsi NE. Sphæra impellatur versus punctum I, quæ occurrens repagulo immobili in B resiliet per BE, anulumque trajiciet.

Etenim

Etenim in triangulis EBN, IBN æquantur latera EN, NI, & BN utrique commune; quare cum æquentur anguli recti BNE, BNI ab his comprehensi, tota æqualia sunt (*Prop*.2.), & anguli EBN, IBN æquales. Sed angulus IBN æquatur angulo CBA ad verticem opposito (Coroll.4. def.10.); ergo etiam angulus NBE æquatur angulo CBA, & sphæra impulsa per rectam *BA* resiliet per rectam BE.

Si in linea AB alia sphæra jaceat, quæ motum per AB impediat, id ipsum duplici reflexione poterit hoc pacto obtineri. Ex A ducatur in repagulum CM perpendiculum AM, quod producatur in L, donec fuerit LM æqualis ipsi AM. Ex L inspiciatur idem, de quo supra, punctum I, & notentur puncta K, H, quibus in utroque repagulo linea visualis occurret. Dico, quod si sphæra impingat in K, inde resiliet per KH, & iterum impingens in H resiliet per HE, annulumque *trajiciet*. Nam demonstrabitur ut supra æquari angulos AKM, LKM, CKH, itemque KHC, *IHN*, *NHE*.

Si recta LI tota jaceret extra angulum C, casus esset impossibilis. Sæpe etiam continget, ut repagula MC, CD vel superficiem habeant inæqualem, vel non satis firma sint, in quo casu angulus reflexionis angulo incidentiæ æqualis non erit. Ad hæc ipsa sphæræ moles, cujus nullam habuimus rationem, si satis magna sit, aliquem producet errorem, præsertim in angulis valde acutis.

PRO-

PROPOSITIO VI.

PArallelogramma ſuper eadem baſi, & intra eaſdem parallelas conſtituta æqualia ſunt inter ſe.

Super eadem baſi AD (Fig.28.), & intra eaſdem parallelas AD, BF, ſint parallelogramma ABCD, AEFD. Dico hæc æqualia eſſe.

Dem. In triangulis ABE, DCF æquantur latera AE, DF, & AB, DC (Coroll. prop.3.), itemque EF, & BC æquales eidem AD, æquales erunt inter ſe: itaque addito communi ſegmento CE, erit quoque latus BE æquale lateri CF, & tota triangula æqualia (Prop.4.). Dempto igitur communi triangulo CLE, erit quadrilaterum BCLA æquale quadrilatero DLEF, & addito communi triangulo ALD erit parallelogrammum ABCD æquale parallelogrammo AEFD. Q. E. D.

Coroll. 1.

Ductis AC, AF erunt triangula ACD, AFD parallelogrammorum dimidia (Coroll.4. pr.3.) Ergo etiam triangula ſuper eadem baſi, & intra eaſdem parallelas conſtituta æqualia ſunt.

Coroll. 2.

Si non eidem baſi, ſed æqualibus tamen baſibus intra eaſdem inſiſtant parallelas, & triangula, & parallelogramma erunt æqualia. Etenim ſi parallelogramma DB, HE habent æquales baſes AD, GH, ductis rectis lineis AE, DF ob AD & EF parallelas, & æquales eidem GH: adeoque & inter ſe, erunt AE, DF parallelæ, & æquales (Coroll.1. pr.2.), erit-

eritque AEFD parallelogrammum, quod cum sit æquale parallelogrammis ABCD & EGHF erunt hæc æqualia inter se.

Coroll. 3.

Igitur parallelogrammum duplum est trianguli super eamdem, vel æqualem basim, & intra easdem parallelas constituti.

Scholion.

Multa ex hac propositione & mira, & utilia descendunt. Ac primo quidem ostenditur, nullam esse quantitatem ita tenuem, qua minor dari non possit. Cum enim recta BF in infinitum produci possit, puncto F magis ac magis recedente a puncto B; dummodò sumatur EF æqualis rectæ BC, sive AD, semper parallelogrammum AEFD utcumque productum æquale erit parallelogrammo ABCD, unde apparet nullum in eo producendo, vel attenuando limitem inveniri. Quod si hæc parallelogramma sint corporum superficies, quæ ex. gr. habeant unius digiti crassitudinem, poterit idem corpus in infinitum attenuari, & produci.

Secundò: licebit metiri planam quamlibet superficiem in plura divisam triangula, & agrorum dimensiones ad invicem comparare; in qua re cum veterum Geometrarum potissimùm se exerceret industria, inde facultas ipsa & nomen habuit, & ortum. Nam in primis quodlibet rectangulum BD (Fig. 29.) tot unius pedis quadrata, sive, ut ajunt, quadratos pedes continebit, quot prodeunt, si unum latus per alterum multiplicetur; quandoquidem si latus AD quatuor continet pedes, AB verò quinque, ductis totidem lineis adjacenti lateri parallelis, quatuor erunt

erunt ordines quadratorum pedum, & in singulis ordinibus quinque pedes quadrati; quare ut omnium summam habeas, duc 4 in 5, & habebis 20 pedes quadratos totius areæ dimensionem. Jam verò triangulum AED super eadem basi, & intra easdem parallelas ejus rectanguli dimidium est, & demissa perpendiculari EF in basim AD productam, si opus fuerit, erit hæc æqualis lateri AB. Unde ad habendam aream trianguli, dimidia basis in ejus altitudinem ducenda erit, vel dimidia altitudo in basim. Sic in eadem hypothesi dimidia basis duorum pedum, ducta in altitudinem EF quinque pedum, dabit 10 pedes quadratos, qui erunt ejus trianguli dimensio.

Igitur si metiri oporteat superficiem polygoni ABCDE (Fig. 30.) dividatur in triangula, ductis rectis DB, DA ab uno angulorum in alios, & habebitur singulorum dimensio ex basis, & altitudinis dimensione, quæ in singulis fuerit inventa. Contineat ex. gr. basis BD pedes 30, altitudo CF 20, duc 30 in 10, sive 15 in 20; habebis pedes quadratos 300, dimensionem trianguli BCD. Quod si idem in reliquis triangulis facias, habebis ex omnium summa totius polygoni dimensionem.

Eadem ratione areæ circularis dimensio obtinetur. Cum enim circulus ABE (Fig. 31.) divisus possit intelligi in infinitos sectores BCD, qui nullam ferè habeant curvitatem in arcu infinitè parvo, hi pro triangulis haberi possunt, quorum basis sit arcus BD, altitudo verò radius CB; itaque singulorum dimensio habetur ducendo radium BC in dimidium arcum BD; adeoque omnium summa, seu, quod perinde est, area circularis æquatur facto ex dimidia peri-

peripheria in radium. Itaque si circularis areæ mechanica dimensio quæratur, peripheriam, & radium metiri oportet, & hunc in dimidiam ducere peripheriam.

PROPOSITIO VII.

IN omni triangulo rectangulo quadratum lateris angulo recto oppositi æquatur quadratis reliquorum laterum simul sumptis.

Sit triangulum BCD (Fig.32.) rectangulum in C. Dico quadratum BAGD hypothenusæ, seu subtensæ DB (sic enim vocant latus angulo recto oppositum) æquari quadratis reliquorum laterum DHIC, CKLB simul sumptis. Ducatur enim CF parallela lateribus BA, DG (per Coroll.3. def.17.), & rectæ BH, CG. In duobus triangulis CDG, HDB latera DG, DC æquantur lateribus DB, DH (per def.15.) anguli verò ab his lateribus comprehensi *GDC*, *BDH* æquales sunt, cum ambo coalescant ex angulo recto, & angulo CDB utrique communi. Ergo tota triangula æqualia sunt (per prop.2.). Sed triangulum GCD habet eamdem basim cum rectangulo DGFE, & intra easdem parallelas GD, CF continetur; ergo hoc rectangulum hujus trianguli duplum est (per prop.6.). Similiter quadratum DCIH duplum est trianguli DBH, sunt enim super eamdem basim HD, & intra easdem parallelas HD, IB constituta; ergo cum æqualia sint triangula, erit etiam quadratum HICD æquale rectangulo GDEF. Eadem demonstratione ostenditur quadratum CBLK æquari rectangulo FEBA: ergo quadratum subtensæ DB

DB æquatur quadratis laterum rectum angulum comprehendentium: Q. E. D.

Coroll.

Quod si quadrata duorum laterum in triangulo simul sumpta æqualia sint tertii lateris quadrato, facile ostenditur, angulum huic lateri oppositum rectum esse. Nam si in triangulo ACB (Fig.33.) quadrata laterum AC, CB simul sumpta æquentur quadrato lateris AB, ex puncto C erigatur super CB perpendicularis CD (per Coroll.3. pr.5.) quæ fiat æqualis lateri CA, & ductâ BD, erit hujus quadratum æquale quadratis laterum BC, CD, sive BC, CA per constuct. adeoque etiam quadrato AB ex hypothesi. Igitur recta AB æquatur rectæ BD, & (per prop.4.) triangula ACB, BCD æqualia sunt, & angulus ACB æqualis angulo BCD, qui rectus est per constructionem.

Scholion.

Per hanc propositionem, cujus auctor fertur Pithagoras, datis in triangulo rectangulo duobus lateribus, tertius invenitur. Nam si unum latus ex. gr. 3 palmorum sit, alterum 4; quadratum primi 9 quadratos palmos continebit; quadratum alterius 16; igitur horum summa dabit quadratum lateris angulo recto oppositi palmorum 25, cujus radix erit ipsa lateris extensio, quinque scilicet palmorum. Contra si detur latus angulo recto oppositum 5 palmorum, & alterutrum latus 3 palmorum, ex primi quadrato 25 aufer quadratum secundi 9, & differentia 16 erit quadratum lateris quæsiti, cujus radix 4 est ipsum latus.

Porrò

Porrò sicuti factum ex numero in seipsum ducto numeri quadratum dicitur, ita numerus qui in seipsum ductus datum efficit numerum hujus radix quadrata dicitur. Ita quadratum 3 est 9, & radix 9 sive ✓ 9 (sic enim radices designantur) est 3. Igitur datis in triangulo rectangulo lateribus duobus, utriusque quadratum, ac propterea quadratum tertii lateris numquam non licebit obtinere. At non semper ipsius quæsiti lateris exacta habebitur dimensio, quandoquidem non omnis numeri quadrata radix inveniri potest nisi per approximationem. Sic Radix 1 est 1, & ✓ 4 est 2, at ipsius 2 non potest accurate radix inveniri, cum nullus sit numerus vel integer vel fractus, qui in seipsum ductus efficiat 2. Definiunt Arithmetici ✓ 2 quamproximè: æqualem nempe 1. 4 1 4 2 &c. hoc est, unitati, quatuor decimis partibus unitatis, uni centesimæ, quatuor millesimis, duabus denismillesimis: verum supersunt adhuc ad exactam radicem obtinendam plus quam duo, & minus quam tres denæ millesimæ partes unitatis, & numquam ea radix determinabitur, quin aliqua quantitate vel a vera deficiat, vel veram excedat. Si itaque latera rectum angulum comprehendentia æqualia sint, subtensa latus unum continebit, ac præterea quatuor decimas ipsius partes, 1 centesimam 4 millesimas, 2 denas millesimas, & sic in infinitum, ita ut aliquid semper supersit, nec ullo possit vel integro vel fracto numero exactè definiri: ex quo quantitatum divisibilitas in infinitum colligitur.

Hinc etiam quantitatum incommensurabilium notitia pendet. Mensura quantitatis dicitur quanti-

tas, quæ aliquoties sumpta illam adæquat. Ita pes est passûs mensura, qui quinque pedibus constat; digitus est mensura pedis Parisiensis, qui duodecim digitis constat; at ejusmodi digitus pedem Romanum non metitur, nam decies sumptus ipsum non adæquat, & undecies sumptus ipsum excedit, siquidem pes Romanus decem continet digitos Parisienses ac præterea 11 partes ipsius duodecimas, posita ratione pedis Parisiensis ad Romanum, ut 144 ad 131.

Quantitates commensurabiles dicuntur illæ, quæ aliquam habent communem mensuram: Ita pes Romanus, & Parisinus commensurabiles sunt, communemque mensuram habent Lineam sive duodecimam digiti partem, siquidem Parisinus ejusmodi Lineas continet 144, Romanus 131.

Contra incommensurabiles sunt, quæ nullam habent mensuram communem.

Quod dentur ejusmodi quantitates incommensurabiles etiam Geometria demonstrat, cum geometricè demonstretur in triangulo rectangulo & Isoscele ABC (Fig. 34) nullam esse communem mensuram lateris AB, vel BC, & subtensæ AC. Duo tamen præmittere oportet axiomata, quæ ex data Mensuræ definitione per se patent.

I. Quod metitur totum, & ejus partem, etiam residuum metitur.

II. Quantitas major minorem metiri non potest.

Sit igitur, si fieri potest, BM communis mensura basis AC, & laterum. Bifariam dividatur angulus BAC (per prop. 5.) per rectam AE, quæ occurrat in E lateri BC, & ex E ducatur in basim perpendicu-

dictum EF (per Coroll. 2. prop. 5.), ducaturque EG basi parallela (per Coroll. 3. def. 17.) In duobus triangulis AEB, AEF præter basim AE communem, & angulos ad B & F rectos, æquales erunt anguli ad A: ergo etiam latera AF, FE æquantur lateribus AB, BE (per Coroll. 1. prop. 3.) Præterea ob parallelas GE, AC facilè ostenditur esse etiam isosceele triangulum GBE (Coroll. 1. def. 17. & Coroll. 2. prop. 3.) cumque duobus triangulis rectangulis EFC, ABC communis sit angulus C: erit (Coroll. pr. 1, & Coroll. 2. pr. 3.) isoscele etiam triangulum EFC: Quare ob æqualia latera EB, EF, erunt etiam æqualia BG, FC, eruntque æqualia (per prop. 2.) triangula rectangulà EBG, EFC, & æquales bases EG, EC. Quod si iterum bifariam secetur angulus BGE per rectam GH, & demittatur HL perpendicularis in GE, & HI eidem parallela, eadem demonstratione *invenientur* æquales rectæ lineæ GB, GL; BH, HL; *BI*, *LE*, ac demum HI, HE: eademque *omninò contingent*, si hæc operatio continuari intelligatur donec recta respondens ipsi GH cadat alicubi in D supra M.

Jam verò si BM metiebatur & latera AB, BC; & basim AC, metietur quoque AF æqualem ipsi AB; ergo per primum axioma ex paulo ante traditis metietur quoque ipsius residuum FC, & GB, BE ipsi æquales: sed metiebatur totam BC, ergo etiam residuum EC, & ipsi æqualem GE. Eodem argumento ostenditur eamdem BM metiri rectas GL, LE, IB, BH, HE, HI &c. unde patet eo demum deveniri ut eadem BM metiatur quoque BD se minorem, quod implicat per axioma secundum. Ergo nequit inve-

niri communis mensura laterum AB, BC, & basis AC, licet minor & minor in infinitum inquiratur.

PROPOSITIO VIII.

IN omni triangulo majori lateri major angulus opponitur.

In triangulo ABC (Fig.35.) sit latus AB majus latere AC; dico etiam angulum ACB majorem fore angulo ABC.

Demonst. abscindatur ex majori latere segmentum AD æquale lateri AC, & ductâ CD erit triangulum ACD isoscele, adeoque (Coroll.2. prop.2.) angulus ADC æqualis erit angulo ACD: sed CBA minor est externo CDA (prop.1.) ergo minor est angulo ACD, & adhuc minor angulo ACB. Q.E.D.

Coroll. 1.

Hinc sequitur in omni triangulo majori angulo majus latus opponi. Sit enim angulus ACB major angulo ABC; latus AB non erit lateri AC æquale, nam triangulum esset isoscele, & anguli prædicti essent æquales (Coroll.2.prop.2.); sed neque latus AB minor est latere AC, nam angulus ABC major esset angulo ACB ex demonstratis, reliquum ergo est, ut AB majus sit latere AC.

Coroll. 2.

Quod si igitur in duobus triangulis ABC, ABD (Fig.36.) fuerint duo latera AB, BC, æqualia duobus AB, BD, anguli verò ab his lateribus comprehensi fuerint inæquales, erit basis AD quæ majorem angulum subtendit, major quam AC minori angulo opposita. Nam si intelligatur unius trianguli latus AB lateri alterius sibi æquali superimponi, ut hic

hic factum supponitur, congruent quidem ista latera, sed latus BD cadet extra latus BC ob angulum ABD majorem angulo ABC. Jam verò centro facto in B intervallo BD describatur circulus, qui transibit per C ob æquales BD, BC, ducaturque CD. Erit CBD isoscele, in triangulo verò ACD angulus ACD major est angulo BCD, ac proinde angulo quoque CDB (per Cor.2. pr.2.) ergo multo major erit angulo CDA; adeoque latus AD oppositum angulo majori majus est latere AC, quod minori opponitur.

Coroll.3.

Contra verò si duo triangula, duo latera habuerint æqualia, unius vero basis alterius basi major sit, erit angulus basi oppositus in illo major quàm in hoc. Nam si hos angulos æquales esse dicas, bases quoque æquales esse oportebit (per prop.2.) quod est contra *hypothesim*; si vero dicas angulum minori basi oppositum majorem esse, ex modo facta *demonstratione* constabit hunc angulum a majori basi subtendi, quod hypothesi item repugnat.

Coroll.4.

Omnium rectarum, quæ ab aliquo puncto C (Fig.37.) duci possunt ad rectam indefinitè productam KL, brevissima est perpendicularis CB; nam si ducatur alia quævis CA in triangulo rectangulo CBA erunt anguli C & A simul sumpti recto æquales (Coroll.3. prop.2.): ergo angulus A minor est recto ABC, adeoque latus AC majus est latere CB; id quod etiam ex præcedenti constat, siquidem quadratum lateris AC æquatur quadratis laterum AB, BC simul sumptis.

Coroll.5.

Quod si igitur centro facto in C intervallo CB circulus describatur, hic rectam CA alicubi secabit in G ita ut abscindat CG æqualem CB. Ergo quodlibet punctum A rectæ AL extra circulum cadet, qui propterea tangitur ab hac recta in unico puncto B, in quo perpendicularis est diametro BC. Recta igitur, quæ ab extrema circuli diametro eidem perpendicularis ducitur, circuli tangens est.

Coroll.6.

Si ducatur BF sub angulo quantumvis tenui ABE, eique fiat æqualis angulus BCA, in triangulo EBC, erunt duo anguli EBC, & BCE simul sumpti æquales recto ABC: ergo tertius angulus CEB rectus erit (prop.1.), & recta CE erit per hanc minor recta CB, sive CG. Quare punctum E erit intra circulum. Ex quo sequitur inter tangentem AB & arcum circuli nullam duci posse rectam lineam BEF; & angulum, quem arcus circuli efficit cum tangente minorem esse quolibet rectilineo, licet hic in infinitum minuatur.

Coroll.7.

Si duo circuli FGB, IOB (Fig.38.) eamdem habent tangentem, recta PB eidem perpendicularis per utriusque centrum C, D transibit, id quod ex Corollario quarto facilè deducitur. Quod si ducatur CG, & DG, quæ producta secabit in O circulum IOB, & in N tangentem AB, erit semper in triangulo GDC latus DG minus duobus reliquis GC, CD simul sumptis (quod etiam facilè ostenditur per hanc, & Coroll.2. prop.2, & per se patet): Quare cum radii CG, CB æquales sint, erit recta DG minor quàm DB,

sive

five DO, quæ item ut DB radius est circuli IOB. Ergo quodlibet punctum G circuli FGB erit intra circulum IOB, ac propterea illi circuli in unico puncto B se mutuo contingent ubi rectam tangunt AH.

Scholion.

Hinc quoque divisibilitas in infinitum, & admirabilis infiniti natura deducitur. Nam si adhuc supra punctum D centro facto in L describatur circulus QMB, ille quoque dictos circulos, & communem tangentem AH in unico puncto B continget; ac proinde rectam DN alicubi secabit in M inter O & N, & si alii & alii in infinitum majori semper radio describantur circuli, minus semper abscindent segmentum MN, illudque in totidem partes secabunt; cumque incrementa radii circulorum nullum habeant limitem, nullum pariter habebunt decrementa rectæ MN. Quod verò majorem habet admirationem, & magnas *omni tempore* concertationes excitavit, angulus contactus, quem scilicet facit arcus FGB cum *tangente AB* in infinitas partes dividitur ab arcubus illorum circulorum, licet ipse quovis angulo rectilineo minor sit ex Coroll.4. Hujus rei non alia videtur esse causa, quam anguli rectilinei natura diversa ab ea quam habet angulus curvilineus in puncto contactus: ita ut, quemadmodum infinitæ lineæ numquam superficiem efficiunt, nec ulla inter has quantitates ratio potest assignari licet in infinitas partes dividi possint; ita etiam infiniti anguli contactus quovis rectilineo minores sint, licet sint divisibiles in infinitum. Et licet id majorem habeat admirationem; tamen Geometricas demonstrationes percipienti erit evidens angulum contactus &

minorem esse quovis rectilineo, & in infinitos curvilineos dividi posse.

PROPOSITIO IX.

IN circulo angulus ad centrum duplus est angulo ad peripheriam, si eidem arcui insistant.

Eidem arcui AB (Fig.39. 40. 41.) insistant anguli ACB ad centrum, & ADB ad peripheriam: dico primum illum hoc altero duplum esse.

Nam si alterutrum latus DA per centrum transeat (ut in Fig.39.) cum æquales sint anguli CDB, CBD in triangulo isoscele BCD, erit externus BCA æqualis duobus internis oppositis CDB, CBD (prop.1.) ac duplus ipsorum utrovis D.

Quod si centrum C cadat vel intra angulum, ut in Fig.40., vel extra, ut in Fig.41., ducta DCE, erit ut supra angulus externus ACE duplus interno opposito ADE, itemque ECB duplus angulo EDB: quare angulus ACB, qui est angulorum ACE, ECB summa in primo, differentia in secundo casu, duplus est angulo ADB, qui angulorum ADE, BDE est item summa in primo, differentia in secundo casu: Q.E.D.

Coroll. 1.

Quare sicut anguli ad centrum mensura est totus arcus, cui insistit, erit anguli ad peripheriam mensura dimidium illius arcus. Angulus igitur ADB (Fig.42.) diametro AB, hoc est semiperipheriæ AFB insistens, quique angulus in semicirculo dicitur, mensuram habet quartam circumferentiæ partem, ac re-

rectus proinde est; angulus EDB in minori segmento existens, ac propterea arcui majori EFB insistens obtusus, ac demum angulus FDB in majori segmento acutus est.

Coroll.2.

Si ex dato puncto A (Fig.43.) ducere oporteat rectam lineam, quæ datum circulum tangat, ductâ AC ad centrum dati circuli C, eâque bifariam divisâ in B (Coroll. 1. pr.5.) centrò facto in B, intervallo BA describatur circulus priorem secans in D & E, ducanturque rectæ AD, AE, quæ circulum tangent (Coroll. 5. prop. 8.). Junctis enim punctis E, C, D rectus erit tam angulus AEC, quam ADC, cum uterque in semicirculo existat.

Coroll.3.

Hinc quoque manifestum fit in omni quadrilineo ABCD (Fig.44.) circulo inscripto angulos oppositos simul sumptos duobus rectis æquari. Etenim mensura anguli ABC est dimidius arcus ADC, & mensura anguli ADC est dimidius arcus ABC. Quare utriusque simul mensura est semicirculus, sive 180°. Unde etiam facilè deducitur, quod quadrilineum, in quo anguli oppositi duobus rectis æquantur, in eodem circulo existit.

Coroll.4.

Mensura anguli ABC (Fig.45.), quem efficiunt chordæ CD, AE intra circulum concurrentes, erit semisumma arcuum interceptorum AC,DE: mensura vero anguli AFC, quem efficiunt chordæ AE, CG extra circulum concurrentes erit semidifferentia arcuum interceptorum AC, EG. Ductâ enim EC erit angulus externus ABC (Prop.1.) æqualis duobus internis

ternis oppositis BEC, BCE, quorum alterum metitur dimidius arcus AC, alterum dimidius arcus DE; horum igitur summam, sive angulum ABC metitur semisumma eorumdem arcuum. Pariter cum angulus externus AEC æquetur internis oppositis ECF, EFC, erit angulus AEC dempto angulo ECG æqualis angulo F, sed anguli AEC mensura est dimidius arcus AC, & anguli ECG dimidius arcus EG. Ergo mensura anguli F est dimidius arcus AC dempto dimidio arcu EG, sive semidifferentia eorumdem arcuum.

Coroll. 5.

Si chordæ circuli AB, CD (Fig.46.) parallelæ sint, ductâ CB, erunt anguli alterni DCB, CBA æquales (Coroll.1. def.7.) ac proinde arcus quoque AC, DB æquales sunt, cum ipsorum dimidia æquales angulos metiantur. Ergo lineæ in circulo parallelæ æquales utrinque arcus intercipiunt.

Coroll. 6.

Angulos ABE, ABF (Fig. 47.) quos efficit chorda BA cum tangente EF metiuntur arcus dimidii BA, BDA. Etenim cum sit diameter DB tangenti perpendicularis (*Coroll.* 3. *prop.* 8.) & ducta AD angulus in semicirculo DAB rectus sit, erunt anguli reliqui ejusdem trianguli ADB, ABD simul sumpti æquales recto EBD (Coroll.3. prop.2.). Quare sublato communi ABD erit reliquus ADB æqualis reliquo EBA, ac proinde hujus mensura eadem erit quæ anguli ADB, dimidius nempe arcus AB. Præterea anguli ABE, ABF duobus rectis æquantur, (Coroll.2. def.10.) & mensuram habent semicirculum, quare cum angulum ABE metiatur dimidius

arcus

arcus AB, anguli ABF menſura erit dimidium reſidui ADB.

Scholion.

Pleræque propoſitionum, quas Euclides in ſecundo libro demonſtravit, vel etiam in tertio, facilius demonſtrantur, præmiſſis aliquibus ex ſexto, quæ Proportionum doctrinam ſupponunt. Hanc ab Euclide fuſius traditam & obſcure in quinto breviter hic & dilucide exponemus.

Noſſe oportet in primis notarum quarumdam ſignificationem, quarum uſus in Algebra frequens eſt. Litteræ *a*, *b*, *c* &c. denotant quamlibet quantitatem, & ut a cognitis incognitæ diſcriminentur has denotare ſolent poſtremis alphabeti litteris *x*, *y*, *z* &c.

Signum additionis eſt +, effertur autem plus: ita 2 + 3 legitur, duo plus tria, ac denotat utriuſque illius numeri ſummam.

Signum ſubtractionis eſt —, effertur autem minus. Sic 5 — 2, legitur, quinque minus duo, ac denotat id quod relinquitur, ſi e priori numero poſterior auferatur.

Signum æqualitatis eſt =, ſic 2 + 3 = 5 denotat ſummam duorum numerorum tertio æqualem eſſe.

> eſt ſignum exceſſus unius quantitatis ſuper aliam: < verò eſt ſignum defectus unius quantitatis ab alia. Sic 10 > 8 denotat denarium numerum majorem eſſe quam 8, & 7 < 9 denotat 7 eſſe minorem quam 9.

Si quantitati quantitas interpoſita lineola ſubjiciatur, quotum denotat ex ſuperiori per inferiorem

rem divisa: sic $\frac{a}{b}$ denotat quotum ex *a* divisa per *b*, seu quoties inferior terminus *b* qui denominator dicitur, in superiori, seu numeratore contineatur. Sic $\frac{8}{2}=4$. Designari etiam solet divisio unius quantitatis per aliam duobus punctis litteris interjectis, sic $a:b=\frac{a}{b}$.

Demùm signum multiplicationis est $\times$, & efferri solet *in*: sic $a\times b$ legitur *a* in *b*, & denotat factum ex multiplicatione ipsius *a* per *b*. Sic $2\times 3=6$, hoc est 2 ter sumpta efficiunt 6. Cæterum multiplicatio quantitatum per litteras communiter designari solet per immediatam ipsarum litterarum conjunctionem. Sic ab denotat factum ex *a* in *b*, sive *a* toties sumi, quot unitates continentur in *b*, si *b* numerus est integer. Quod si quantitas se ipsam multiplicet, denotatur factum apponendo litteræ ad partem ejus dextimam numerum, qui aliquantulum supra ipsam litteram assurgat. Sic aa, sive quadratum *a* scribitur a^2, & aaa, sive cubus ipsius *a* scribitur a^3, & sic deinceps.

Proportio alia est Arithmetica, alia Geometrica. Arithmetica est quæ inter quatuor terminos invenitur, quorum duo primi æque differunt inter se, ut duo reliqui, ita ut si primus secundo major est, etiam tertius major sit quarto, & contra. Indicatur autem hæc proportio punctis quibusdam hoc pacto 3 . 5 . . 7 . 9. Sunt nempè hæ quantitates arithmeticè proportionales, quia eadem quantitate differunt 3 & 5, 7 & 9, duabus scilicet unitatibus.

bus. Ex quo fit, ut in Arithmetica proportione summa extremorum semper æqualis sit summæ mediorum, cum quartus terminus tertium contineat, atque id præterea, quo secundus differt a primo: sic 3 + 9 = 5 + 7 = 12.

Proportio Geometrica est quæ inter quatuor terminos intercedit, quorum primus toties secundum continet, vel aliquam ejus partem, quoties tertius continet quartum, aut similem ejusdem partem: vel etiam generalius, quorum primus ita continet secundum, quemadmodùm tertius continet quartum. Hæc autem ipsa continentia dicitur ratio unius termini ad alium, quorum primus dicitur *antecedens*, secundus *consequens*, & illo aucto, hoc imminuto ratio crescit. Hæc proportio punctis ita indicatur $a . b :: c . d$; nempe, ita est a ad b, ut c ad d. Sic 4 . 2 :: 6 . 3, quia sicut antecedens primæ rationis 4 bis continet suum consequentem 2, ita antecedens secundæ rationis 6 bis continet suum consequentem 3: & 3 . 7 :: 6 . 14, quia sicut numerus 7 bis continet 3, ac præterea tertiam ipsius partem 1, ita 14 bis continet 6, ac præterea tertiam ipsius partem 2. Et in genere ut sit $a . b :: c . d$, si $a = mb$, oportet ut etiam sit $c = md$.

Ex data rationis explicatione duo inferuntur:

I. Ratio est ille ipse numerus m, qui exprimit relationem termini primi ad secundum: unde si primus bis continet secundum, dicitur *duplam* ad hunc rationem habere, si ter, *triplam* &c. Si vero continet ejus dimidium, dicitur habere ad illum rationem *subduplam*, si tertiam partem *subtriplam* &c.

Quare

Quare ratio a ad b ſcribi poteſt tamquam ſi fractio eſſet $\frac{a}{b}$, aut $a:b$.

II. Termini æquales eamdem habent ad alium rationem, & ſi eamdem habeant ad alium rationem æquales ſunt.

PROPOSITIO X.

IN terminis geometricè proportionalibus factum extremorum æquatur facto mediorum: & contrà, ſi factum ſub extremis terminis æquatur facto ſub mediis, ipſi termini ſunt geometricè proportionales.

Sit $a.b::c.d$, & ſi m exprimat quomodo, aut quoties b contineatur in a, ita ut ſit $a=mb$, erit etiam ex proportionum notione $c=md$: eſt ergo $ad=mbd$, & $cb=mdb$, ſunt autem mbd, & mdb idem factum ex b in d iterum ductum in m, ergo $ad=cb$: ſive factum ex primo in quartum æquale facto ex ſecundo in tertium, quod erat primum.

Sit jam $ad=cb$, dico eſſe $a.b::c.d$. exprimat m rationem a ad b, ſive ſit $a=mb$. Erit $ad=mbd$, ſed $ad=bc$, ergo $cb=mbd$, ſive dividendo per b, $c=md$, hoc eſt, idem numerus m exprimet etiam rationem c ad d: Q. E. D.

Coroll. I.

Primæ hujus propoſitionis parti nititur regula, quam auream vocant Arithmetici, ſive trium. Emit aliquis 15 frumenti modios aureis 95, quærit quanti ſtabunt

stabunt modii 45. Exprimat x hunc numerum ignotum aureorum, eritque $15 . 95 :: 45 . x$. Unde $15x = 95 \times 45 = 4275$, & dividendo per 15, erit $x = 285$. Obtinetur igitur quæsitus numerus, si tertius terminus in secundum ducatur, & factum dividatur per primum.

Coroll.2.

Ex altera propositionis parte liquet, quod quoties sit $a . b :: c . d$, erit quoque *alternando*, ut ajunt, $a . c :: b . d$, & *invertendo* $b . a :: d . c$, & *componendo* $a + b . b :: c + d . d$, & *dividendo* $a - b . b :: c - d . d$, nam semper productum extremorum æquale invenitur producto mediorum. In primis enim duabus permutationibus habentur ad & bc æquales quantitates ex supposita proportione. In tertia habentur $ad + bd$, & $bc + bd$, in quarta $ad - bd$, & $bc - bd$, quæ item quantitates æquales utique inter se sunt, quandoquidem æqualibus ad, & bc, in primo casu adjicitur, in secundo adimitur eadem quantitas bd. Quinimmò regula quoque universalior ex eadem ratione deducitur. Nempe in terminis geometricè proportionalibus est, ut summa, sive differentia primi & secundi ad primum vel secundum, aut contra, uti primus vel secundus ad summam vel differentiam primi & secundi: ita summa, vel differentia tertii & quarti ad tertium vel quartum; sive tertius vel quartus ad summam vel differentiam tertii & quarti. Qui Canon nil fere differt ab axiomate quarto. Porro omnes has permutationes quivis poterit in numeris experiri.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Rationem compositam explicare.

DIfficilius intelligitur ratio ex pluribus rationibus composita, quam alii aliter definiunt. Nos illam dicemus rationem ex pluribus compositam rationibus, quæ intercedit inter productum ex omnibus illarum rationum antecedentibus, & productum ex omnibus earumdem consequentibus. Sic ratio composita ex rationibus 2 ad 3, & 4 ad 5, est ratio 2×4 ad 3×5, sive 8 ad 15. Et in genere ratio composita ex rationibus a ad b, c ad d, e ad f est ratio ace ad bdf.

Coroll. 1.

Hinc ratio duplicata dicitur quæ intercedit inter quadrata, & triplicata quæ inter cubos, & sic deinceps. Cum enim quadratum sit quantitas quævis in se ipsam ducta, & cubus sit idem quadratum in eamdem ductum quantitatem, manifestum est rationem compositam ex a ad b, iterumque ex a ad b esse rationem aa ad bb, hoc est unius quadrati ad aliud, & sic de reliquis.

Coroll. 2.

Sequitur etiam rationem a ad b componi ex rationibus ejusdem a ad quemlibet alium terminum c, & hujus ipsius c ad ipsum b; nam ratio ex his composita est ac ad cb, quæ non alia est quam ratio a ad b. Etenim si quantitas a est tripla, centupla &c. quantitatis b, erit eadem quantitas a in aliam quamlibet c ducta dupla pariter, centupla &c. quantitatis

ipsius

ipsius b in eamdem c ductæ. Immò in genere ratio a ad b componitur ex rationibus a ad quamlibet c, & c ad quamlibet d, & d ad quamlibet e &c. & postremi termini ad b: etenim ratio ex his omnibus composita est ratio $a\,c\,d\,e$ &c. ad $c\,d\,e$ &c. b, sive (ob $c\,d\,e$ &c. commune terminorum coefficiens) eadem ratio ipsius a ad b. Id vero probe tenendum est cum quantitatis incognitæ ratio ad notam quantitatem inquiritur, cujus ratio ad aliam pariter notam quantitatem habetur, & hujus ad aliam &c. & tandem postremi termini ad quantitatem quæsitam. Nam ratio quantitatis datæ ad quæsitam erit factum ex omnium illarum rationum antecedentibus, ad factum ex omnibus consequentibus.

Coroll. 3.

Facile etiam deducitur fractiones esse inter se in ratione composita ex directa numeratorum, & inversa denominatorum; ex. gr. ratio $\frac{a}{b}$ ad $\frac{c}{d}$ componitur ex ratione directa numeratoris a ad numeratorem c, & inversa denominatoris b ad denominatorem d; sive (quod perinde est) ex ratione d ad b. Est enim $\frac{a}{b} . \frac{c}{d} :: a\,d . b\,c$. quandoquidem factum sub extremis terminis invenitur æquale facto sub mediis. Nam $\frac{c\,a\,d}{d} = \frac{a\,b\,c}{b}$ cum utrumque sit $c\,a$. Idem patet in numeris.

PROPOSITIO XII.

IN triangulis æquales habentibus angulos latera æqualibus angulis opposita sunt proportionalia.

Sint triangula ABC,FGH (Fig.48.49.) æquiangula: dico latera FG, GH lateribus AB, BC æqualibus angulis oppositis esse proportionalia.

Demonstr. Fiat BE = FG, BD = GH, & ducta ED ob æquales angulos B,G erunt æqualia (Prop.2.) triangula FGH, EBD, & anguli ad basim E, D æquales angulis F, H, hoc est (ex hypothesi) angulis A & C. Ergo ED, AC parallelæ sunt (Coroll. 1. def. 17.), ac propterea ductis rectis AD, EC erunt triangula EDA, EDC super eadem basi, & intra easdem parallelas æqualia; (Coroll. 1. prop. 7.) Addito ergo communi triangulo EBD, erunt tota triangula ABD, CBE æqualia. Sed triangula, quæ eamdem habent altitudinem, & æqualibus basibus insistunt æqualia sunt (Coroll. 2. prop. 6.), ergo triangulum CEB ita continebit triangulum DEB, quemadmodum basis CB basim BD; pariterque triangulum ADB ita continebit idem triangulum EDB, quemadmodum basis AB continet basim EB. Jam verò idem triangulum EBD æquè continetur ab æqualibus triangulis CEB, ADB: ergo etiam CB ita continet BD sive HG, quemadmodum AB continet EB sive FG, eritque AB. BC : : FG. GH, sive alternando AB. FG : : BC. GH: Q. E. D.

Co-

Coroll. 1.

Eadem methodo facilè ostenditur ipsa triangula æquiangula esse inter se in ratione duplicata laterum homologorum, hoc est, ut quadrata laterum quæ angulis æqualibus opponuntur. Etenim triangulum DEB est ad triangulum CEB, ut basis DB ad basim CB, & triangulum CEB est ad triangulum CAB ut EB ad BA, sive iterum ut BD ad BC. Ergo ratio trianguli DEB ad CAB (Coroll.2.prop.11.) componitur ex rationibus DB ad CB, atque iterum ejusdem DB ad eamdem CB, eruntque triangula ut quadrata ipsarum DB, CB. Itaque si fuerit DB dimidia ipsius CB, adeoque etiam BE dimidia AB, erit triangulum DEB dimidium trianguli CEB, & CEB dimidium trianguli CAB, ac proinde triangulum DEB erit dimidium dimidii, sive quarta pars trianguli CAB.

Coroll. 2.

Si in triangulis FGH, ABC *anguli* B & G *fuerint æquales, & latera* FG, GH *proportionalia lateribus* AB, BC, *erunt triangula æquiangula*. Fiat enim BF = GF, ducaturque ED parallela AC. Æquiangula erunt triangula BED, BAC (Coroll.1. def.17.) ac proinde AB . BC : : EB . BD. Est autem ex hypothesi AB . BC : : FG . GH, ergo EB . BD : : FG . GH, & alternando EB . FG : : BD . GH. Cum sit igitur EB = FG, erit etiam BD = GH: & ob angulos B & G æquales, erunt æqualia tota triangula EBD, FGH (Prop.2.). Sunt vero EBD, ABC æquiangula, ergo etiam FGH & ABC æquiangula sunt.

Coroll.3.

Quod ſi triangulorum FGH, ABC tria latera tribus ſint lateribus proportionalia, etiam hæc eadem demonſtratione erunt æquiangula. Sumpta enim EB = FG, & ducta ED parallela AC, erit EB. BD : : AB. BC : : FG. GH: & alternando EB. FG: : BD. GH, hoc eſt, in ratione æqualitatis. Eodem pacto oſtendetur FH = ED: quare triangula FGH, EBD habent tria latera æqualia ſingula ſingulis, adeoque æqualia ſunt (Prop. 4.) Cumque EBD, ABC æquiangula ſint, erunt etiam FGH, ABC.

Coroll.4.

Cum ſit, ex demonſtratis in propoſitione, AB. BE : : BC. BD, erit dividendo (Coroll. 2. prop. 10.) AE. BE : : DC. BD, ex quo ſequitur rectam BD (Fig. 50.) quæ biſariam dividit angulum B in triangulo ABC baſim dividere in ratione laterum. Etenim producto latere AB donec fiat BE = BC, ductaque EC, erunt æquales anguli ad baſim in triangulo iſoſcele EBC (Coroll. 2. prop. 2.), quare angulus externus ABC duobus internis & oppoſitis æqualis (Prop. 1.) duplus erit angulo E, & ejus dimidium ABD = BEC. Cum igitur in rectis BD, EC externus angulus ABD ſit interno oppoſito BEC æqualis, erunt ipſæ parallelæ inter ſe, ac proinde AD. DC : : AB. BE, ſive BC, quæ per conſtructionem ipſi BE æquatur.

Coroll.5.

Pariter ſi duæ rectæ AB, HR (Fig. 51.) occurrant utcumque parallelis EC, FD, GK, ab his ſecantur in partes proportionales, ut ſit EF. CD : : FG. DK. Ducta enim CLM, quæ ſit parallela ipſi AB,

AB, erunt CL, LM æquales ipsis EF, FG (Coroll.4. prop.3.): sunt verò in triangulis MCK, LCD, LC. LM :: CD. DK, ergo etiam EF. FG :: CD. DK.

Coroll.6.

Si datis tribus rectis quæratur quarta proportionalis, fiat quilibet angulus CAB (Fig.50.), & in alterutro latere sumantur AE, AB duabus primis datis æquales, tertiæ vero æquale fiat latus AC, & ducta EC ducatur ex puncto B recta BD ipsi EC parallela, eritque AD quarta proportionalis quæsita: erit enim AE. AB :: AC. AD. Si verò rectam AC in data ratione dividere oporteat, sumantur AB, BE æquales terminis datæ rationis, & eadem constructio dabit AB. BE :: AD. DC. Ex quo etiam divisibilitas in infinitum deducitur. Cum enim esse possit AE utcumque multiplex ipsius AB in infinitum, poterit etiam esse AD quantum libuerit submultiplex AC pariter in infinitum.

Scholion.

Figuræ similes dicuntur, quarum omnes anguli æquales sunt singuli singulis, & latera circa æquales angulos proportionalia. Hinc patet similia esse triangula æquiangula, quorum proprietates, quas exposuimus, increbile dictu est quanti sint usus in Mathematicis. Earum ope facillimè solvuntur problemata omnia, quæ ad Trigonometriam, hoc est ad triangulorum dimensionem, pertinent. Hinc & altitudines, & distantias metimur, & alias hujusmodi quantitates per quadrantem in gradus divisum, & eam quam scalam vocant.

Quadrantis constructio non est admodum difficilis. Fiat in aliqua solidiori materia rectus angulus ABC (Fig.58.) & centro facto in B mediocri intervallo BA describatur qnadrans ADEC, ac duo alii interius paulo minori intervallo. Centris A & C intervallis AB, CB inveniantur puncta D, E, eritque tam AE, quam CD graduum 60. (Coroll.4. prop.2.): quare cum graduum 90 sit totus quadrans, erit tam AD quam CE, & DE graduum 30: Si igitur in tres partes æquales secentur arcus AD, DE, EC (Schol. prop.5.), dividetur quadrans in novem arcus æquales, quorum singuli denos gradus contineant. Quod si hi rursus bifariam dividantur (Prop.5.), quinos quosque gradus obtinebis. Demum singuli gradus haberi poterunt, eorum mensuram per attentationem inquirendo, vel per Coroll.6. hujus, cum arcus ejusmodi parum differant a rectis lineis. Hæc figura rectis lineis CB, BA, & arcu CA comprehensa quadrans dicitur.

Scala quoque facile costruitur hoc pacto. Sub angulo quocumque B (Fig.59.) ducantur rectæ AB, BD. A puncto B ad E sumantur decem partes æquales, & fiat BD quintupla ipsius BE in decem partes æquales divisa, quarum prima est a B ad 100, sumptisque a B ad A 20 partibus æqualibus, compleatur Parallelogrammum ABDC, & ab omnibus divisionum punctis rectæ AB, itemque rectæ BD (excepto primo quod jacet inter B & E) ducantur rectæ parallelæ lateribus parallelogrammi: tum divisa quoque AF in decem partes æquales, quarum prima sit AI, agantur obliquè a singulis divisionum punctis BI, & reliquæ, quarum postrema desinit in F, quæque

que parallelæ erunt inter se (Coroll. 1. pr. 6.) cum æquales, & parallelas lineas includant. Numeris, ut in figura factum est, distributis, manifestum est rectam BD quinquaginta particulas EO continere, quarum decem in EB continentur; partemque EO in viginti æquales partes gradatim divisam esse ob latus EF trianguli OFE in totidem æquales partes divisum. Harum particularum unam prima post verticem F parallela continet, duas secunda, tres tertia, & sic deinceps, inter rectas FO, FE interceptas. Itaque recta BD continebit ejusmodi particulas 20 X 50 = 1000, ac proinde inveniri potęrunt ipsius rectæ BD in eadem scala partes millesimæ quotcumque.

Metiri jam oporteat locorum A & B(F.52.53.) distantiam BA eorum accessu vel a flumine, vel ab alia quavis causa intercluso. Assumpto quolibet loco C, cujus distantiam a B metiri liceat, ope quadrantis & linearum visualium AC, BC notentur anguli B & C. *Tum in* charta probe complanata assumatur ex scala *bc* totidem partium, quot pedes in intervallo BC continentur, fiantque anguli *b*, *c* ope quadrantis ejusdem æquales angulis B, C. Lateribus *ba*, *ca* in aliquo puncto *a* coeuntibus exploretur quotnam in scala particulas contineat latus *ba*, totidemque pedes intervallum AB continebit. Nam cum in triangulis BAC, *bac*, anguli B, C æquentur angulis *b*, *c* per constructionem, ac propterea A quoque & *a* æquales sint (Coroll. prop. 1.), erunt triangula similia, & latera proportionalia.

Si BAC campus sit, cujus mensura in quadratis pedibus inquiritur, demittatur in basim *bc* per-

 pendi-

pendiculum *ad*, & inveniantur particulæ, quæ ab illo in ſcala continentur. Tot enim pedes continebit perpendiculum AD ob ſimilitudinem triangulorum ADB, *adb*, ejuſque dimidium in baſim ductum dabit aream ABC in pedibus quadratis (Schol. prop. 6.)

Eadem ratione altitudinem Montis A (Fig. 54.) metiri licebit, ſi in ſubjecta planitie duæ dentur ſtationes B, C, quarum diſtantiam metiri poſſimus.

Et ita quidem inveniuntur latera, & area in triangulo, cujus unum detur latus cum duobus angulis. Si verò tria dentur latera, & quærantur anguli, ſumptis ex ſcala tribus rectis *bm*, *bc*, *cn* (Fig. 52. 53.) totidem partium, quot in datis lateribus pedes continentur, centris *b*, *c*, intervallis *bm*, *cn* deſcribantur arcus circulorum ſe mutuo interſecantium in *a*, & ductis *ab*, *ac*, erit triangulum *bac* dato triangulo æquiangulum (Coroll. 3. hujus) ob latera proportionalia, unde & altitudo, & area innoteſcet. Sed de his planius in Trigonometria conſtabit.

PROPOSITIO XIII.

SI duæ chordæ ſive intra circulum, ſive extra circulum ſe mutuò interſecent, factum ſub unius ſegmentis erit æquale facto ſub ſegmentis alterius.

Secent ſe mutuo chordæ AC, DE (Fig. 55. 56.) ſive intra, ſive extra circulum; dico eſſe AB×CB = DB × BE.

Dem. Ductis AD, CE, erit in primo caſu in duobus triangulis ADB, BCE angulus ABD æqualis angu-

angulo EBC ad verticem (Coroll.4. def.10.), ac præterea æquantur anguli ADB, ECB, ut qui eidem insistunt arcui AE (Coroll.1. prop.9.): ergo æquiangula sunt triangula & similia, ac proinde (Prop.12) BA . BD : : BE . BC.

In secundo autem casu quadrilinei circulo inscripti anguli oppositi ACE, ADE æquantur duobus rectis (Coroll.3. prop.9.), & duobus item rectis æquantur ACE + BCE (Coroll.2. defin.10.), quare ADE æquatur ipsi BCE; & cum angulus B sit utrique communis, æquiangula & similia erunt triangula BAD, BEC. Ergo in utroque casu erit BA . BD : : BE . BC, ac proinde $BA \times CB = BD \times BE$ (Prop.10.): Q. E. D.

Coroll.1.

Si fuerit AC (Fig.57.) circuli diameter. & chorda DE ad illam perpendicularis, ac propterea bifariam divisa in B (Coroll.4. pr.5.); erit $AB \times BC$ æqualis DE^2, nam in hoc casu $EB \times BD = BD^2$. Est igitur AB . DB : : DB . BC (Prop.10.). Quare si inter AB & BC quæratur media proportionalis, bifariam divisa AC in F, ac descripto semicirculo erigatur in B perpendiculum BD donec circulo occurrat, eritque BD media proportionalis quæsita.

Coroll.2.

Ducto radio FD erit, ob angulum rectum B; $FB^2 + BD^2 = FD^2 = FC^2$ (Prop.7.) Quare cum sit $DB^2 = AB \times BC$, erit $AB \times BC + FB^2 = FC^2$: Hoc est, si recta AC secta fuerit bifariam in F, & non bifariam in B, erit quadratum dimidiæ æquale rectangulo sub inæqualibus segmentis una cum quadrato intermedii.

Co-

Coroll.3.

Si ducantur præterea AD, DC, erit angulus ADC in ſemicirculo rectus (Cor.1. pr.9.), quare $AC^2 = AD^2 + DC^2$: ſed ob angulos rectos in B, $AD^2 = AB^2 + BD^2 = AB^2 + AB \times BC$, & $DC^2 = BD^2 + BC^2 = BC^2 + AB \times BC$: ergo $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2AB \times BC$. Hoc eſt, utcumque ſecetur recta AC in B, quadratum totius AC æquatur quadratis ſegmentorum AB, BC una cum rectangulo bis comprehenſo ſub ipſis ſegmentis.

Coroll.4.

Cum ſit autem $AD^2 = AB^2 + AB \times BC$, erit (Prop.10.) AB . AD :: AD . AB + BC : hoc eſt, chorda eſt media proportionalis inter ſegmentum AB, totamque diametrum AC, & illius quadratum æquatur rectangulo $AB \times AC$.

Coroll.5.

Si figura 56 mutetur in 60, ita ut BD tranſeat per centrum F, & BCA accedat ad circumferentiam, donec evaneſcente AC evadat BC tangens, erit $BC^2 = BE \times BD$, & ducta FC, quæ tangenti occurret ad angulos rectos (Coroll. 5. prop.8.) erit in triangulo rectangulo FCB, $FB^2 = FC^2 + CB^2 = FE^2 + EB \times BD$. Hoc eſt, ſi recta DE bifariam dividatur, eique in directum adjiciatur recta quævis EB, erit quadratum compoſitæ ex dimidia & adjecta æquale quadrato dimidiæ una cum rectangulo ex tota in adjectam.

Scholion.

Ex hoc poſtremo corollario definiri poteſt quam longè pateat proſpectus in maris ſuperficiem ex data altitudine: ſed telluris diametrum prius definire

finire oportet ex ipsius circumferentia, quam in annotationibus ad primam propositionem invenimus. Id autem fiet si proxima ratio circumferentiæ ad diametrum inveniatur, in quo etiam circuli quadratura veræ proxima sita est, qua contenti esse possumus cum exactam habere non liceat. Archimedes ad rem conficiendam polygonis usus est inscriptis & circumscriptis.

Concipiatur radius AC (Fig, 61.) in partes 1000000 aut plures etiam, ut libuerit, divisus, & tangenti AD occurrat in D recta CD angulum rectum ECA, & quadrantem AE bifariam dividens. Erit ob angulum ACD semirectum, & angulum CAD rectum (Coroll. 3. prop. 8.) angulus quoque ADC semirectus, & triangulum isoscele (Coroll. 3. pr. 3.) Quare $DA = CA = 1000000$, & $DC^2 = DA^2 + AC^2 = 2000000000000$, cujus radix DC major est quam 1414212, & minor quam 1414213. Bifariam diviso angulo DCA rectâ CH, quæ occurrat tangenti in H, erit DC . CA : : DH . HA (Coroll. 4. prop. 12.), & componendo DC+CA ($2414212\frac{1}{2}$). CA (1000000) : : DA (1000000). HA. Unde invenitur HA major quam 414213, minor quam 414214. Hinc eruitur HC, & secto iterum bifariam angulo HCA invenietur nova portio tangentis AD, atque aliæ deinceps, ut libuerit. Quod si chorda IL parallela fuerit tangenti HAM, ac proinde radio CA perpendicularis, & bifariam secta in K (Coroll. 4. prop. 5.), erit CH . HA : : CI . IK (Prop. 12). Cumque tres priores quantitates notæ sint, quarta quoque IK innotescet & major & minor vera, ac propterea etiam ipsius dupla IL, &

ducta

ducta CLM, quæ tangenti occurrat in M, erit tota HM dupla ipsius AH.

Sit jam circulus APT (Fig.62.) primò in quatuor partes æquales divisus, deinde in 8, in 16, in 32, in 64, in 128 &c. prout cuique libuerit, & concipiamus per ea divisionum puncta tangentes, & chordas alternatim ductas, habebuntur, ut patet, duo polygoni, quorum alter inscriptus circulo est, alter circumscriptus; ambo autem triangulis constant æqualibus triangulis HCM, ICL; cumque haberi possint HM & IL quantumlibet veris proximæ, & numerus laterum habeatur, omnium quoque summa innotescet, hoc est, perimeter inscripti proxime minor vera, & perimeter circumscripti proxime major vera, ita ut hic defectus vel excessus quantum cuique libuerit tenuis sit, cum radius in quemlibet partium numerum dividi possit. Jam vero manifestum est perimetrum polygoni circumscripti circuli peripheria majorem esse, perimetrum verò inscripti minorem, ac propterea intra hos limites ipsam peripheriam contineri. Isti limites quantum quisque velit contrahentur aucto laterum numero. Etenim ob triangulorum HCA, ICK similitudinem cum sit CA . CK : : AH . KI, erit quoque dividendo AC . AK : : AH . AH — KI, & in eadem ratione erit tota perimeter polygoni circumscripti ad ejus differentiam ab inscripto (Axiom.4.) Quod si laterum numerus augeatur minuitur quantumlibet IK, & multo magis AK, adeoque minuitur quantumlibet polygonorum differentia, & contrahuntur limites, intra quos situs est valor peripheriæ circuli.

Hinc

Hinc quoque accurratius demonſtratur aream circuli factum eſſe ex radio in dimidiam peripheriam. Nam triangulum HCM eſt factum ex radio AC in dimidiam baſim HM (Schol. prop. 6.), ac proindè totum Polygonum habetur ducendo radium AC in dimidiam perimetrum. Eſt autem area polygoni circumſcripti major quam area circuli, ità tamen ut ejus exceſſus ſupra aream circuli minor ſit quam exceſſus ſupra polygonum inſcriptum. Verum ita poteſt laterum numerus in infinitum augeri, ut differentia perimetri polygoni circumſcripti a circuli peripheria, & illius areæ ab area polygoni inſcripti minor ſit data qualibet quantitate. Quamobrem factum quoque ex radio in dimidiam peripheriam ab area circuli differet differentia quæ minor ſit data qualibet quantitute, ac proinde nulla.

Hac methodo Archimedes invenit diametrum ad peripheriam eſſe in ratione 7 ad 22, ita ut tenuiſſimus ſit exceſſus peripheriæ ſic inventæ ſupra veram.

Hæc eadem ratio ſubtilius ab aliis quæſita eſt, in quibus Ludolphi Colonienſis eminet induſtria, qui eam ad cifras uſque 60 promovit. Ex Leibnitio in Actis Lipſienſibus tom. 1. habetur ratio diametri ad quartam peripheriæ partem, ut 1 ad $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}$ &c. producendo hanc ſeriem quouſque libuerit per ſigna contraria, & numeros impares; eamdemque rationem habet quadratum circulo circumſcriptum ad aream circuli. Sed omnium eſt elegantiſſima ratio diametri ad peripheriam, quam exprimunt tria paria trium primorum numerorum imparium, videlicet 113 ad 355.

In

In re nostra contenti esse possumus Archimedis ratione., cumque peripheria maximi telluris circuli (Schol. prop. 1.) passus Parisinos contineat 24649920 ; fiat ut 22 ad 7 ita prædictus ille passuum numerus ad telluris diametrum, quæ obveniet passuum 7843156, ac proinde milliaria continebit 7843, ac passus 156.

Sit jam HI montis altitudo ad mille passuum assurgens, & quæratur intervallum HA quousque patet in maris superficiem oculi prospectus; erit HS passuum 7844156, ergo $AH^2 = IH \times HS = 1000 \times 7844156 = 7844156000$, cujus radix 88567 milliaria dabit 88, ac passus præterea 567, intra quod spatium continentur objecta ex hoc monte conspicua, cum cætera omnia ob ipsam telluris rotunditatem ex oculis sese subducant. Refractio tamen, vi cujus radius AH inflectitur, nonnulla adhuc objecta deteget, quæ aliquanto longius distent. At si HI sit unius passus, quantum ferè e solo assurgit hominis oculus stantis in littore, erit HS passuum 7844157, & $IH \times HS$ erit pariter 7844157, cujus radix passus dabit 2800. 7. Quare si duo homines sex passuum millibus distent in eodem maris littore ob telluris rotunditatem se invicem videre non poterunt.

PROPOSITIO XIV.

OMnes figuras similes rectilineas in eumdem similium triangulorum numerum partiri licet.

Sint duæ figuræ similes rectilineæ ABCDE, *abcde* (Fig. 63. 64.), & ductis BE, CE; *be*, *ce*, dico

dico similia esse triangula ABE, *abe*; BEC, *bec* &c.: nam in triangulis EAB, *eab* anguli A & *a* æquales sunt, ut ipsa notio figurarum similitudinis indicat, eruntque latera proportionalia; hoc est AE . *ae* : : AB . *ab* . Ergo (Coroll. 2. prop. 12.) similia erunt triangula ABE, *abe*, ac proinde (Prop. 12.) anguli ABE, *abe* æquales sunt; cumque essent æquales anguli ABC, *abc*, erunt etiam æquales EBC. *ebc*. Erant autem latera circa æquales angulos ABE, *abe* proportionalia, hoc est BE . *be* : : AB . *ab* : : BC . *bc* (ob figurarum similitudinem) ergo iterum in triangulis BCE, *bce* latera circa æquales angulos EBC, *ebc* proportionalia sunt, ac propterea ipsa triangula similia. Eadem methodo si progrediaris, reliqua quoque triangula similia esse comperies, easque figuras in eumdem similium triangulorum numerum divisas esse: Q. E. D.

Coroll. 1.

Eodem pacto ostenditur similes esse figuras illas *rectilineas*, quas similia triangula eodem numero, eodemque ordine partiuntur.

Coroll. 2.

Cum duo quælibet similia triangula sint inter se ut quadrata laterum homologorum (Coroll. 1. prop. 12.), latera autem sint in eadem ratione constanti, erunt (Ax. 4.) perimetri similium figurarum ut duo quælibet ipsarum latera homologa; & areæ totæ erunt ut quadrata eorumdem laterum. Id etiam circulis convenit, ut patet ex his quæ adnotavimus ad Propos. 13.: quare si unius circuli radius alterius radio duplus sit, illius quoque peripheria dupla erit, area vero quadrupla.

Scho-

Scholion.

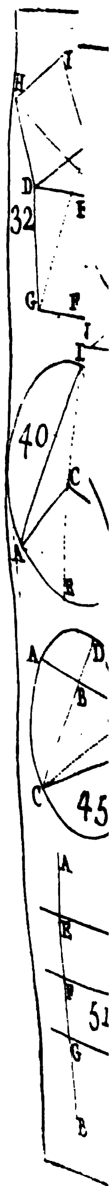
Possunt etiam alia quadam ratione similia triangula in similibus figuris considerari. Nempe si fuerint similes figuræ ABCDE, *abcde* (Fig. 65. 66.) ducanturque ex duobus angulis æqualibus A & *a*, B & *b*, ad reliquos angulos rectæ lineæ AD, BD, AC, &c. *ad*, *bd*, *ac* &c. simili methodo demonstrabitur similia esse triangula AEB, *aeb*, ADB, *adb* &c. id quod in agrimensura maximum habet usum. Etenim si alicujus fundi aut agri ichnographiam describere oporteat, ac dimensiones accipere ex duobus locis A, B: metire prius locorum distantiam AB, & oculorum aciem in objecta conspicua dirigens, quibus ager terminatur in E, D, C, probè observa angulos BAE, BAD, BAC, itemque ABC, ABD, ABE: tum in charta aut tabula duc rectam lineam *ab* tot particulis e scala desumptis constantem, quot inventi sunt pedes in intervallo AB, & ope quadrantis fiant in *a* & *b* anguli æquales inventis in A & B. Linearum ita ductarum concursus in *e*, *d*, *c* determinabunt perimetrum figuræ *aedcb*, quæ similis est agro describendo ut ex demonstratis constat. Itaque quot fuerint particularum inventæ rectæ lineæ *ae*, *ad*, *de*, *be* & totidem pedibus constant intervalla AE, ED, DC, CB &c. area vero invenietur ex dictis ad propos. 13. & 6.

Eadem ratione, ut patet, distantiam DC utrinque inaccessam metiri licet. Etenim sumptis duabus stationibus A & B, quarum intervallum metiri liceat, & angulis in A & B triangulorum ADB, ACB, fiat ut antea simile quadrilineum *dabc*, & quot particulas in scala continebit recta *dc*, totidem pedes, vel decempedas continebit distantia quæsita DC. *Scho-*

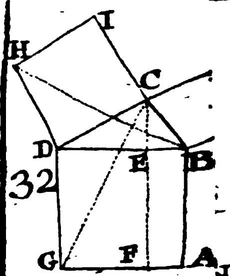
Scholion.

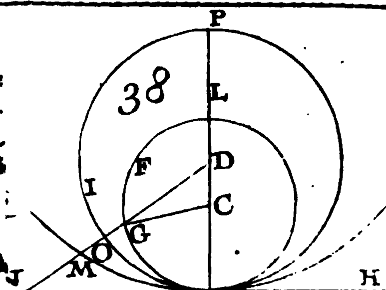
Cum Euclidis Elementa passim ab auctoribus citentur, non erit inutile indicem subjicere, unde constare possit ubinam in his nostris elementis eorum demonstratio quærenda sit, quæ Euclides in sex prioribus libris complexus est, quibus planam geometriam absolvit. Usu autem constabit nullam ferè ejus propositionem paulò frequentius adhiberi in geometricis quæ non fuerit a nobis demonstrata, aut non facile ex his demonstretur. Cœterum libri 5 & 6 propositiones præcipuas complectitur Scholion ad prop. 9, & propositiones 10, 11, 12 cum suis Corollariis, quod cum semel notasse satis fuerit, supervacaneum duximus has cum nostris comparare. Sed & rationum theoriam uberiorem dabimus in Arithmetica:

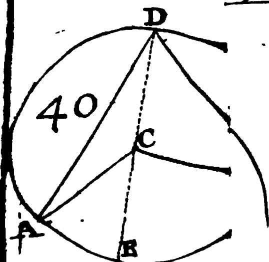
Euclidis Lib. I.	Nobis est	Euclidis Lib. I.	Nobis est
Pr. 1	Cor. 4. pr. 2.	Pr. 13	Cor. 2. def. 10.
4	Pr. 2.	15	Cor. 4. ejusd.
5	Cor. 2. pr. 2.	18	Pr. 8.
6	Cor. 2. pr. 6.	19	Cor. 1. pr. 8.
7	Coincidit cum pr. 4.	22	In sch. pr. 12.
		23	Cor. def. 7.
8	Pr. 4.	24	Cor. 2. pr. 8.
9	Pr. 5.	25	Cor. 3. ejusd.
10	Cor. 1. pr. 5.	26	Pr. 3. & Cor. 1. ejusd.
11	Cor. 3. pr. 5.		
12	Cor. 2. pr. 5.		

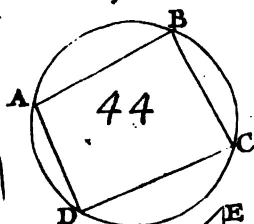


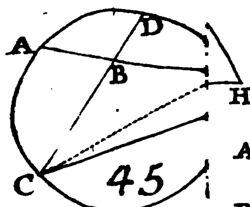
H
I
D
E
32
G
F
I
I
40
C
A
B
A
D
B
C
45
A
E
F
51
G
E

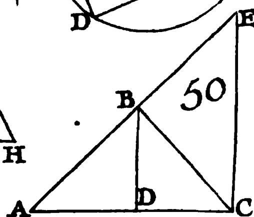

I
H
C
D
E
B
32
G
F
A

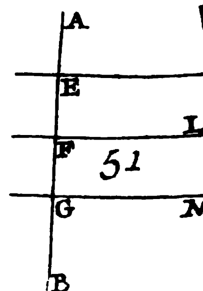

P
38
L
D
F
I
C
G
O
M
J
B
H

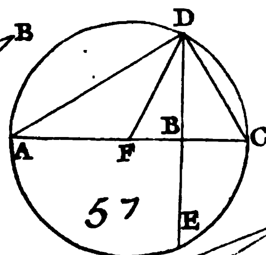

D
40
C
A
E

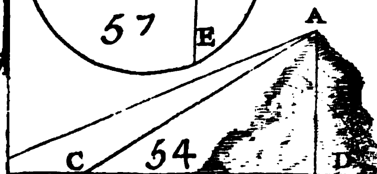

B
A
44
C
D


D
A
B
H
C
45

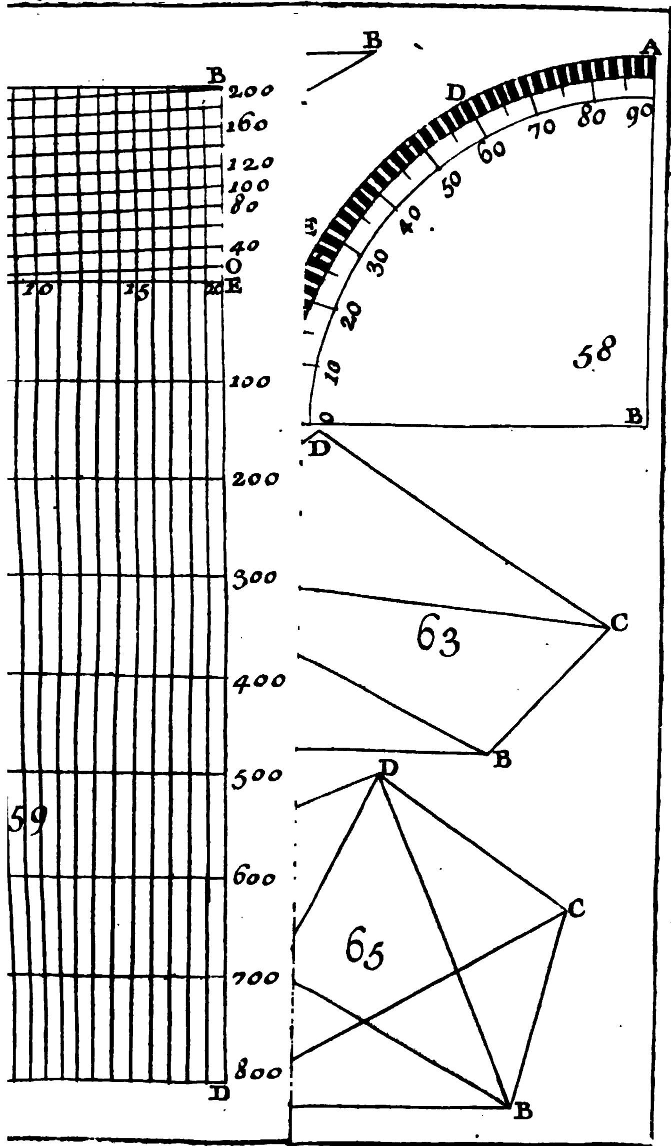

E
B
50
D
A
C

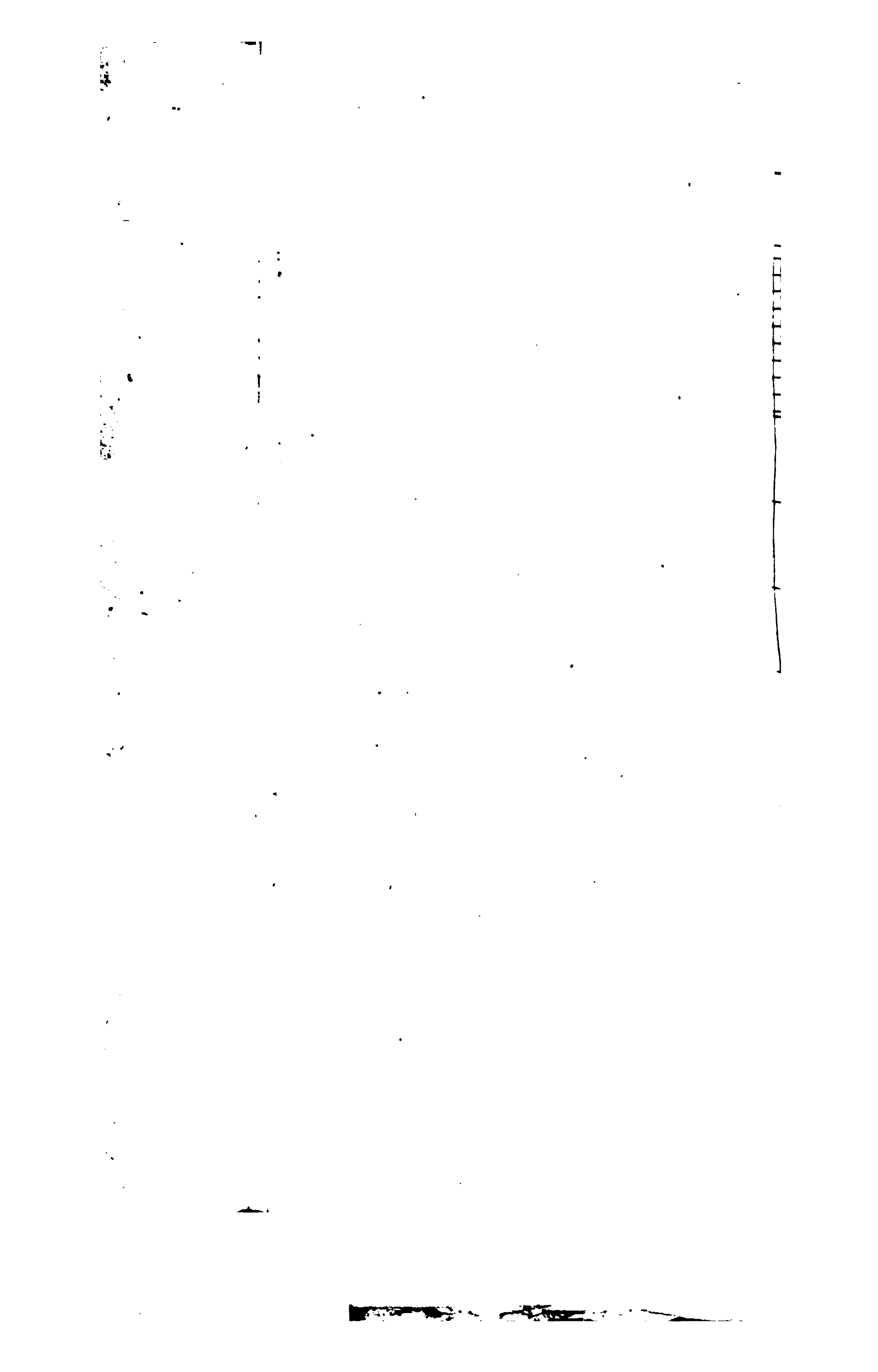

A
E
L
F
51
G
M
B

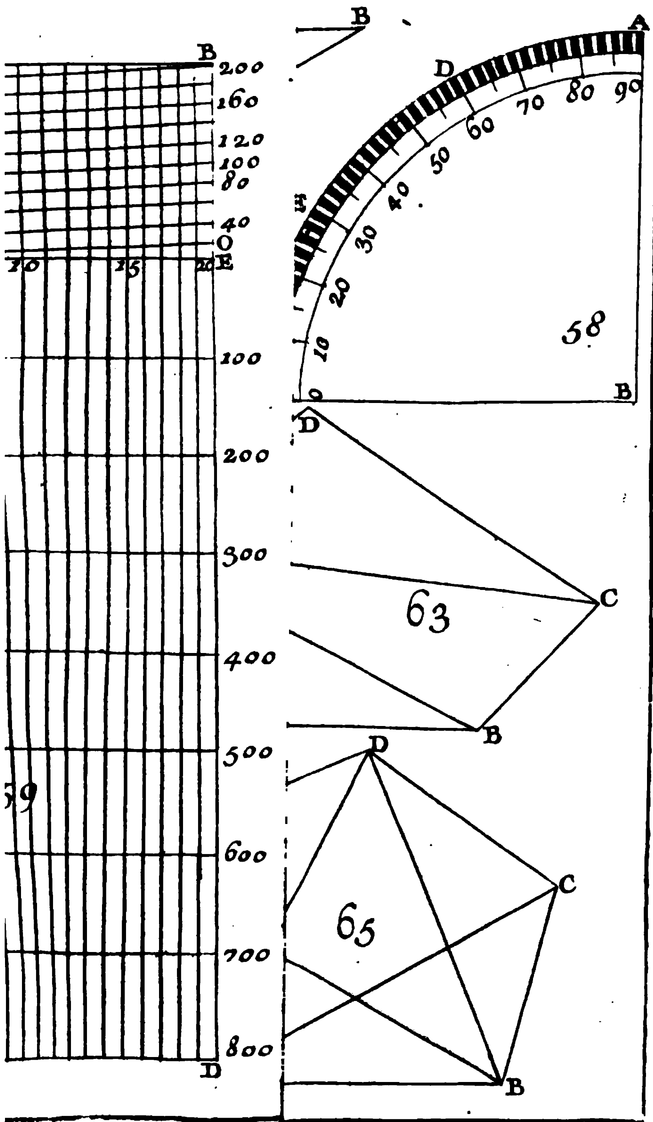

B
D
B
C
A
F
57
E


A
C
54
D


10


B
A
D
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
58
B
B
200
160
120
100
80
40
O
10
15
20 E
100
200
300
400
500
59
600
700
800
D
D
C
63
B
D
C
65
B

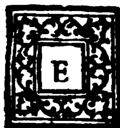



B
200
160
120
100
80
40
O
10
15
20 E
100
200
300
400
500
600
700
800
D
59
B
A
D
10
20
30
40
50
60
70
80
90
0
58
B
D
C
63
B
D
C
65
B

ELEMENTA ARITHMETICÆ.

CAPUT I.

De fundamentalibus Arithmeticæ operationibus.



1. Æ sunt notatio, additio, subtractio, multiplicatio, divisio, & extractio radicum, quas omnes hoc capite breviter expediemus.

§. I.

Notatio.

2. NUmeros omnes in vulgari arithmetica decem notis designamus, quarum Arabes feruntur auctores; sunt autem, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Harum notarum varia est significatio non solum ex diversa ipsarum forma, sed etiam ex diverso loco, quem occupant. Nam quæ ante punctum postremæ legenti occurrunt unitates designant, quæ proxime præcedunt unitatum decades; exinde centenarii sequuntur, millenarii, & sic deinceps in declupa proportione. Atque huic potissimum usui cyphra, seu o destinatur, cum enim ipsa nullum designet numerum, auget tamen reliquarum notarum significationem longius illas a puncto remove-

movens; sic unitatis nota, quæ punctum proxime præcedens unicam designaret unitatem, beneficio unius vel duplicis cyphræ in secundum aut tertium locum rejecta denas unitates, aut centenas designabit.

3. Breviores numeri facilè leguntur, nemo enim non videt numerum A (Tab. 1.) ducentas quadraginta septem unitates exprimere; at in numeris longioribus aliquo opus est artificio. Numerum B, quem legere oporteat, ita divides a postremis notis exorsus, ut ternos singulis partibus numeros attribuas. Tres postremos a præeuntibus divides puncto superius apposito: tribus sequentibus appones 1; & sic deinceps reliquis ternariis punctum alternatim appones, vel numerum, ita tamen ut numeri unitate semper augeantur, quemadmodum in apposito schemate factum vides. His peractis quamlibet notarum classem perinde leges, ut si sola esset, & ubi punctum invenies dic mille, ubi 1 dic decies centena millia, seu, ut vulgo loquimur, millionem; ubi 2, dic milliones millionum, sive Billiones; ubi 3, dic Trilliones, & sic deinceps. Sic itaque numerus B legendus erit. Ter mille ac ducenti quadragintaduo Trilliones, quingenta septuaginta octo millia ac quingenti sexaginta duo Billiones, nongenta quatuordecim millia, ac viginti Milliones, quadringenta sexaginta septem millia, bis centum, ac duodecim.

4. Quod si notæ eædem punctum subsequantur, fractos exprimunt decimales; ita quidem, ut quæ primum occurrit decimas unitatis partes designet, secunda centesimas, tertia millesimas, & sic deinceps,

ceps. Has autem notas vel singulas seorsim efferre licet, vel omnes simul denominatione a postrema desumpta. quæ denominatio ex numero desumitur, quem exprimit unitas tot cyphris ducta quot sunt post punctum notæ. Sic numerus C designat viginti tres unitates, & duas decimas partes unitatis, quatuor centesimas, nullam millesimam, sex denas millesimas, vel bis mille quadrigentas sex denas millesimas. Numerus D denotat ducentas triginta duas unitates, nullam decimam, duas centesimas, tres millesimas, seu 23 millesimas partes unitatis. Demum numerus E nullam exhibet unitatem, nullam decimam, nullam centesimam, sed tantum duas millesimas, & sex denas-millesimas, sive 26 denas-millesimas partes unitatis.

5. Fractiones aliæ duobus numeris exprimuntur, quos lineola interjecta dirimit, ita ut alter supra lineam scribatur, alter infra lineam. Qui inferior est denominator dicitur, qui superior est numerator. Ille denotat in quot partes unitas divisa sit, hic autem ejusmodi partium numerum designat. Sic numerus F duas tertias unitatis partes exprimit, numerus C quinque octavas, numerus H septem duodecimas. Fractiones quoque sunt particulæ, quibus horas, & gradus circuli patiri consuevimus; nam & horas & gradus singulos in 60 minuta prima dividimus, singula minuta prima in 60 secunda, singula secunda in 60 tertia, & sic deinceps. Has autem fractiones peculiaribus quibusdam notis designamus, nam horas integras exprimit numerus cui apponitur littera *h*, gradus integros numerus cui superius apponitur o; & in utroque casu unica lineo-

la numeris superimposita minuta prima designat, duæ lineolæ minuta secunda, tres tertia, & sic deinceps : unde numerum I sic leges : 23 horas. 46 minuta prima, 52 secunda, 37 tertia. 41 quarta.

§. II.

Additio in numeris integris.

6. NUmeri his notis expressi, si integri sunt, in unam summam facile colliguntur. In exemplo primo, quatuor numeros, quos addere oportet, ita alios aliis adscribe serie descendente, ut unitates unitatibus subijciantur, decades decadibus, & sic de reliquis ; tum infra omnes numeros ducta linea, & a postrema columna exorsus dic : 1 & 8 efficiunt 9, 9 & 2 efficiunt 11, 11 & 1 efficiunt 12. Colligis ergo ex hac columna unam decadem unitatum, ac præterea duas unitates : quare scribe 2 in loco unitatum, & decadem illam reijce in sequentem decadum summam dicens : 2 & 1 efficiunt 3, 3 & 6 efficiunt 9, 9 & 9 efficiunt 18, 18 & 6 efficiunt 24, hoc est duas decades decadum, sive duo centenaria, & 4 decades : scribe ergo 4 in loco decadum, & duo centenaria in sequentem columnam reijce, eodemque pacto in hac & reliquis operare, & tandem invenies numerum K, qui quatuor numerorum erit quæsita summa. Eodem pacto, in Ex. 2, trium numerorum summa colligitur numerus L, qui una nota supra numeros datos est auctus, quod in prima columna quæ postrema est operanti, 12 colliguntur, & unitas illa in sequentem locum reijcienda fuit.

7. No-

7. Notandum est autem quod uniuscujusque columnæ numeri ita colliguntur tamquam si essent unitates, ex eaque summa tot unitates in proximè sequentem reijciuntur, quot in præcedente decades supra unitates collectæ sunt.

8. Totius autem operationis ratio constat, quia dum progredimur ab unitatum columna ad reliquas, nota quælibet in ordine subsequente decuplo majorem habet valorem quam in proxime præcedente.

§. III.

Subtractio in numeris integris.

9. UT numerum datum a dato numero subducas, subducendum numerum illi subijcies, a quo subtrahi debet, ita ut unitates unitatibus respondeant, decades decadibus, & sic de reliquis. Tum ab unitatibus exorsus quamlibet inferiorem notam a superiori subtrahe, & residuum scribe infra lineam & habebis numerum qui sit datarum quantitatum differentia. Quod si alicubi occurrat inferiorem notam superiori majorem esse, hanç augere oportebit decem unitatibus, easque mutuas accipies a proxime sequenti nota, quam propterea deinceps habebis tamquam unitate mulctatam.

10. In Ex.3.numerus M est inter datos numeros differentia quæsita, quia auferendo 5 ex 7 relinquitur 2, auferendo 4 ex 9 relinquitur 5 &c.At in Ex: 4. cum numerus 8 ex 7 subduci nequeat, adijce huic denas unitates, & auferendo 8 ex 17 residuum habebis 9; tum vero notam superiorem proximè sequentem unitate mulctabis, hanc enim ab ea mu-

tuam accepisti, ut denis unitatibus præcedentem augeres. Aufer ergo 4 ex 5 & habebis residuum 1. Eodem pacto in reliquis duabus notis operare, & habebis numerum N differentiam quæsitam. Haud absimili ratione invenitur differentia O in Ex.5° ,ubi cum ex o nequeat auferri 6, aufertur ex 10, & residuum 4 infra lineam ponitur: tum quia iterum sequitur o ex quo nequit auferri 4, aufertur non quidem ex 10 sed ex 9, quandoquidem denarius numerus, qui eo loco substituitur ex proxime sequenti 9, jam in antecessum unitate mulctatus est; atque ita fieret si plures essent o, cum tamen numerus qui primo occurrit unica tantum unitate minor fiat.

11. Si nota inferiori ex superiori sublata nihil reliqui fit, eo loci notari debet o, quod tamen non fit, si nullus præterea sequatur numerus, qui in differentia quæsita ante cyphram sit adscribendus, ut factum vides in Ex.6°, in quo præter duas postremas notas reliquæ omnes se mutuo elidunt.

12. Operationis ratio satis per se constat, cum unitates ab unitatibus auferantur, denarii a denariis &c. Nam quod in ex. 4°: numerus 7 decem augeatur unitatibus, & numerus insequens 6 una mulctetur, ratio in promptu est. Hæc nempe unitas in numero 6 decem valet earum quibus constat numerus 7, eique respondens 8, quare etsi unam ille amittat huic tamen decem acquiruntur. Similiter in ex. 5°, unitas e 9 sublata decem valet unitates si in locum reijciatur, cui subest auferendus numerus 4, & rursus una ex his decem unitatibus in locum translata cui subest numerus 6, decem valet unitates ejusmodi, quibus nota auferenda constat. Quare his subla-

sublatis ex 10, relinquitur numerus 9, ex quo auferas 4, & deinceps 8, ex quo 2 auferre oportebit.

13. Si explorare velis utrum subductio ritè peracta sit, differentiam inventam adde numero sublato, & quantitas redibit, ex qua subductio facta est.

14. Si tota quantitas auferenda illam excedat, ex qua debet auferri, adhuc minor numerus è majori subducitur; sed differentia quæsita erit quantitas negativa, & minor nihilo. Sic si quis expensas faceret, quæ suas opes excederent, has subduceret ab expensis, & differentia ostenderet quanto deterioris conditionis sit factus, quam si nihil haberet, vel quid sibi desit, ut ære alieno expeditus nihil habere incipiat. Unde vides æs alienum congrue dici quantitatem negativam & nihilo minorem. Innumera sunt ejusmodi, ex quibus Tyrones oportet negativæ quantitatis notionem probè concipere.

§. IV.

Multiplicatio in numeris integris.

15. QUantitas data per numerum integrum multiplicatur cum toties sumitur, quoties unitas in numero continetur, per quem debet multiplicari. Tum verò per numerum fractum multiplicari dicitur, cum tot illius partes sumuntur, quot fractio indicat, in quam ducitur. Augetur itaque numerus cum in integrum ducitur: minuitur si in fractum ducatur.

16. Singulæ notæ in singulas facile ducuntur, si numeri breviores sint. Sic nemo non videt 3 in 4, sive 4 tèr sumptum 12 efficere. Si numerorum alter denarius sit, factum ex multiplicatione emergens

tot erunt decades, quot alter numerus habet unitates; at si quinarius fuerit, tot erunt decades sumendæ, quot in alterius dimidio sunt unitates: demum si uterque numerus quinario major sit, in altera manu, reliquis compressis, tot digiti erigantur, quot alter numerus habet unitates supra quinarium, itemque in altera manu tot erigantur, quot unitatibus alter numerus quinarium excedit. Tùm verò tot decades sumantur quot sunt erecti digiti, iisque adijciatur quod prodit invicem ducendo digitos in utraque manu compressos, atque ita habebis factum ex utriusque dati numeri multiplicatione. Sic si ducere oporteat 7 in 9, erunt erecti digiti in altera quidem manu 2, in altera 4, unde sex decades sumendæ sunt; compressi verò erunt in illa 3, in ista 1, ex quorum multiplicatione emergunt tres unitates; factum ergo ex 7 in 9 sunt 6 decades, & 3 unitates, sive 63.

17. Idem facile absolvitur per tabulam, ut vocant, Pythagoricam. Rectanguli ACDB latus AC in novem partes æquales dividè, latus verò CD in decem. Per utriusque divisionis puncta duc rectas lineas his lateribus parallelas, ac divisum erit rectangulum in decem columnas, quarum singulæ novem continent rectangula. Scribe in prima columna novem primos numeros, in secunda eorum duplos, in tertia triplos, & sic deinceps. In decima vero columna nonnisi cyphras conscribes ad usus postea indicandos. Interim habebis, ut vides, productum cujuslibet numeri in alium quemlibet ab 1 ad 9, quod facile invenies si alterum numerum in prima columna inquiras, alterum in primo ordine

ne rectangulorum; nam si ab hoc descendas ad ordinem usque, in quo primus invenitur, ibi erit productum quæsitum. Sic si factum quæratur ex 9 in 6, sume in prima columna 6, in primo autem ordine sume 9, & descende usque ad ordinem sextum, in quo 6 invenitur, & numerus 54 erit factum ex 6 in 9.

18. Idem productum invenitur si in prima columna assumas 9, & in primo ordine 6: ex quo patet nihil omninò interesse sive primum numerum per secundum multiplices, sive secundum per primum. Idipsum in genere de numeris omnibus ostenditur, unde si tres aut mille numeri invicem debeant multiplicari, undecumque incipias, aut quocumque ordine progrediaris unum ducens in alterum, & factum ex his duobus in tertium, & sic deinceps, semper idem postremo loco factum emerget.

19. Si numeros pluribus notis constantes multiplicare oporteat, horum alterutrum infra alterum scribe ita, ut unitates unitatibus subijciantur; deinde notas omnes superioris numeri per singulas inferioris multiplica initio utrobique a postremis facto. Decades quæ inter multiplicandum colliguntur sepone adijciendas facto ex eadem numeri inferioris nota in proxime sequentem superioris, si qua supersit. Facta quæ emergunt ex singulis notis inferioris in omnes superioris infra lineam seorsim notentur, ita ut uniuscujusque unitates subijciantur numero per quem multiplicatio peragitur. Quod si horum omnium summa colligatur, ea erit productum quæsitum.

20. In Ex. 7° quæritur factum ex 235 in 43. Scribe 43 sub 235, uti dictum est, tum ducta linea dic: 3 in 5 efficiunt 15. Scribe quinque sub numero multipli-

tiplicante 3, & unam decadem sepone adjiciendam facto sequenti ex 3 in 3, quod est 9, cui si 1 addas, habebis unam decadem, & nullas præterea unitates: scribe igitur 0, & facto ex 3 in 2 adjiciens 1 scribe 7. Rursus dic: 4 in 5 efficiunt 20; scribe 0 ita ut multiplicatori 4 subjaceat, & facto sequenti 4 in 3, quod est 12, adjiciens 2 habebis 14: scribe igitur 4, & 1 servans dic: 2 in 4 efficiunt 8, & adjecto 1, scribe 9. Demum ducta linea collige in unam summam hos numeros ita dispositos, eritque numerus Q factum ex datis numeris.

21. Demonstratio facilè eruitur ex ipsa numeralium notarum natura, quæ in anterioribus locis decuplo plus valent, quam in posterioribus, & ex eo principio quod partes simul sumptæ totum adæquant.

22. Ipse verò usus docebit, quod si vel alteruter vel uterque numerus in cyphras desinit, poterunt hæ in multiplicatione omninò negligi, dummodò producto tot in fine cyphræ apponantur, quot erant in coefficientibus. Sic in Ex. 8° idem prodit numerus R ex 52300 in 8420. Sive per ipsas cyphras multiplicationem instituas, sive his neglectis ducas 523 in 842, & producto tres cyphras apponas. Similiter si intra notas ipsas multiplicatoris aliqua cyphra occurrit, poterit ea negligi, dummodo factum ex numero subsequenti sub ipso multiplicante numero notari incipiat, ut in Ex. 9°.

23. Si explorare velis utrum multiplicatio rite peracta sit, jubent eosdem numeros iterum multiplicare, sed ordine inverso; ita nempe ut qui prius multiplicator fuerat fiat multiplicandus, & contra.

Sed

Sed hoc valde molestum accidit ubi numeri longiores sunt. In his casibus ad calculi molestiam levandam, & ad erroris periculum longius amovendum satius erit artificium adhibere, quod Neperus excogitavit. Tabulam Pythagoricam ita scribe ut numeri, qui duabus notis constant transversa lineola dirimantur, uti factum est in rectangulo ACDB, deinde tabulæ columnas divide ut ordine quolibet disponi possint, ac plures ejusdem numeri tabellas compara, ut tot præsto esse possint, quot ejusdem numeri notas in numero multiplicando esse contingat. Quin etiam cum fieri possit ut inter numeri multiplicandi notas cyphræ occurrant, lamellas quoque habere necesse est in quibus solæ cyphræ notentur. His positis si detur in Ex. 10° numerus T, quem per V multiplicare oporteat tabellas selige, quarum singulæ singulas notas numeri T habeant in fronte, easque eodem ordine dispone, quo in dato numero disponuntur. Quoniam T per 8 multiplicare oportet; numeros omnes in ordine octavo occurrentes initio a postremis facto scribe infra lineam ita ut postremus jaceat sub numero 8, hoc tamen animadverte quod qui in eodem rhombo includuntur colligi debent in unam summam, & decades, si quæ occurrunt, proxime subsequenti adijciendæ. Habebis ea ratione factum ex numero T in 8. Rursus nota eodem pacto sub numero 9 numeros, quos lamellæ exhibent in ordine nono, & habebis factum ex T in 9. Idem in reliquis præsta, & omnium summa dabit numerum X, quod est productum ex numero T in V. Totius operationis ratio facile intelligitur ex dictis.

§. V.

Divisio in numeris integris.

24. CUM quantitas data per aliam datam quantitatem dividenda proponitur, eo demum quæstio reducitur ut inveniatur quoties in dividenda quantitate dividens quantitas contineatur; unde numerus ex divisione resultans, per quem scilicet huic quæstioni satis fit, quotus dicitur.

25. In Ex. 11° proponatur numerus 10105 per 43 dividendus. Dividendo numero divisorem præfige lineola interjecta: tum operationem instituens in notis initialibus dividendi, quæ quantitatem exhibeant divisori æqualem, vel proxime majorem, dic: quoties 43 continentur in 101? Resp. 2. Scribe ergo 2 ex altera parte dividendi, lineola pariter interjecta, & factum ex 2 in 43, sive 86, aufer ex 101, & residuo 15 notam appone, quæ in dividendo proximè sequitur quantitatem jam divisam 101. Dic iterum: quoties 43 continentur in 150? Resp. 3. Scribe 3 in quoto & factum ex 3 in 43, seu 129 aufer ex 150. Residuo 21 adnecte sequentem notam dividendi 5, & dic iterum: quoties 43 continentur in 215? Resp. 5. scribe 5 in quoto, & aufer ex 215 factum ex 5 in 43, sive 215. Cum nihil ex ea divisione superfit, constat numerum 235 illum præcisè esse qui oritur ex divisione 10105 per 43.

26. Demonstrationem habebis, si animadvertas in ejusmodi quæstione ita prorsus se rem habere ut si quæreretur quota pars totius quantitatis singulis hominibus obveniret, si eam ex æquo tot homini-

bus

bus distribui oporteret, quot habet divisor unitates. Nam in singulis operationibus illud scilicet inquirimus, quot unitates, decades &c. singulis dari possint; iisque datis, quæ dari possunt, quot adhuc distribuendæ supersint. Rem transfer in quæstorem regium, qui 10105 nummos aureos a Rege acceperit militibus 43 ex æquo largiendos, & adhuc res magis in aperto erit.

27. Facile vides post quamlibet subtractionem peractam id quod relinquitur, antequam notam ulteriorem ex dividendo adijcias, divisore minorem esse oportere: nam si residuum æquale foret vel majus, jam divisor pluries contineretur in quantitate jam divisa, quam numerus indicet in quotum relatus.

28. Postquam residuo ulteriorem divisoris notam adjeceris, si adhuc quantitas manet divisore minor, qui proinde nusquam in ea contineatur, cyphram scribes *in quoto*, & adhuc ulteriorem divisoris notam residuo adijcies ut divisionem promoveas. Sic in Ex. 12° quia sublatis 1641 ex 1684, residuum 43 auctum nota 7 adhuc minus est divisore 547, ponitur 0 in quoto, & nota 6 apposita numero 437, quæritur quoties divisor in 4376 contineatur.

29. Si divisione peracta, cum nulla reliqua est in dividendo nota, adhuc aliquid residui ex postrema subtractione supersit, quoto adijcienda est fractio, cujus denominator est divisor, numerator vero residuum illud postremum. Sic in Ex. 12° cum 182 superfuerint, quoto adjecta est fractio $\frac{182}{853}$. Nempe si nummos 43602 patiri deberes ex æquo hominibus 853, singuli

guli acciperent nummos 52, & præterea 182 partes ejusmodi, qualium in singulis nummis 835 continentur. Poteris etiam divisionem promovere si postremo residuo cyphram adijcias puncto interposito, ut unitates ad decimas partes unitatis redigantur; nam si puncto item interposito quoto notas adscribas, quæ deinceps obveniunt, ex divisione (quam per novas subinde cyphras residuis adjectas continuare poteris ut libuerit) habebis partes unitatis decimas, centesimas, millesimas &c. integris notis addendas, eadem prorsus methodo, qua notæ integræ inventæ sunt, ut videre est in Ex. 14°. Continget interdum ut ad ultimum divisionis limitem hoc pacto pertingas, plerumque tamen fiet ut in seriem incidas abeuntem in infinitum, cujus termini serius ocius iidem redeant, numquam tamen seriùs, quam post totidem terminos, quot habet divisor unitates. In hoc casu producitur divisio, donec valor obtineatur tam vero proximus, quantum quæstio, de qua agitur, requiret.

30. Cum numeri longiores sunt, omnis difficultas in eo sita est, quod non satis pateat, quoties divisor in assumptis dividendi notis contineatur. Qui satis fuerit in ejusmodi calculis exercitatus facile videbit ex primis ipsis utriusque numeri notis, quoties unus sumendus sit, ut altero fiat proximè minor; at qui usu careat facilè in eo decipietur. Tutius incedet, si divisionem aggressurus eam prius, quam scalam vocant, sibi confecerit. Divisor nempe per numeros omnes ab 1 ad 9 multiplicandus est, omnesque producti ex ea multiplicatione numeri divisori ex ordine subjiciendi, ut in Ex. 14° factum est;

hoc

hoc enim pacto si hos numeros compares cum dividendi notis, in quibus divisionem instituis, statim videbis quinam ex illis sit proxime minor: pones in quoto numerum, in quem ductus divisor eam efficit quantitatem, quantitatem vero ipsam ex dividendi notis subduces.

31. Verum ea res admodum molesta accidit, & animus defatigatione victus facilius quam credi possit impinget ubi cæteroquin nulla est difficultas. Quare in his præsertim casibus Neperianis lamellis uti præstat. *In* Ex. 15° (Tab. 2.) tabellas selige, & dispone ut earum in fronte numeri exhibeant divisorem 37895. Deinde resectis ad dexteram dividendi notis, quibus numerus fiat divisori par, vel eodem proxime major, quære in lamellarum ordinibus, numerum 94076, vel proxime minorem, probe animadvertens quod diximus, hos numeros in lamellis ita legendos ut qui eodem *rhombo* includuntur in unam summam colligantur, denariis, si quæ occurrunt, in anteriores notas de more translatis. Invenies hoc pacto in ordine secundo numerum proxime minorem prædicto, 75790: scribe ergo 2 in quoto, & numerum inventum a dividendo subtrahe, residuo adijce proxime sequentem dividendi notam, & sic porro perge donec vel divisionem absolvas, vel quotum habeas quantum libuerit vero proximum.

32. Divisionis rite peractæ argumentum habebis si divisorem in quotum ducas, redeatque divisus numerus; nam si non redeat, manifestum est alicubi errorem esse admissum. Nota tamen quod si divisorem exactum habere non licuit, facto ex divisore in quotum addere oportet residuum ex ultima divisio-

 nis

nis subtractione, ut redeat divisa quantitas ? Sic in Ex. 15° si ducas 37895 in 2482, & facto addas postremum residuum 21138, habebis divisum 94076528.

§. VI.

Additio & subtractio in numeris fractis ?

33. ET haec quidem in numeris integris ita peraguntur, at in fractis aliam fere rationem inire oportet. Fractiones ejusdem speciei dicuntur, si eumdem habeant denominatorem, diversae si diversum. Quae ejusdem speciei sunt facile in unam summam adduntur, vel ab invicem subtrahuntur addendo vel subtrahendo numeratores: qua in re illud est animadvertendum, quod quoties ex numeratoribus colligitur numerus denominatori aequalis, toties unitas ad integros est reijcienda: itemque in subtractione si subtrahenda fractio illa major est unde subtrahitur, unitas ex integris, si qui sunt in quantitate mulctanda, mutua est accipienda, ex qua fractio fiat eumdem habens cum subtrahenda denominatorem, ac numeratorem ut minori fractioni adijciatur.

34. In exemplo 16° si fractionum numeratores colligas bis pervenies ad 5 partes unitatis quintas, quare duae unitates integris sunt adjiciendae, & summam colliges 64 $\frac{2}{5}$. At in Ex. 17° quoniam fractio $\frac{4}{5}$ ex $\frac{2}{5}$ auferri nequit, ex 23 unitas sumitur quae valet $\frac{5}{5}$, & $\frac{4}{5}$ aufertur ex $\frac{7}{5}$, tum 8 auferuntur ex 22, & reliqua est differentia 14. $\frac{3}{4}$.

35. Licet etiam in unam summam seorsim colligere numeratores, & numerum exinde provenientem per denominatorem dividere: quotus enim integros

tegros dabit numeros, & residuum erit numerator fractionis adjiciendæ. Sic in Ex. 18° summa numeratorum est 94, quem numerum si dividas per 24, quotus est 3 . $\frac{2}{2}\frac{2}{4}$, quem integrorum summæ addere oportet. Et hac quidem methodo uti præstat ubi numeris majoribus fractiones constant.

36. Cum pondera & mensuræ, aut alia ejusmodi in unam summam colliguntur, vel ab invicem subtrahuntur, quorum majores partes certum minorum partium numerum continent, eadem methodo in his pertractandis uti debemus, qua in reliquis ejusdem speciei fractionibus usi sumus: nam & hæ re ipsa fractiones sunt, quibus denominator idcircò non apponitur, quia jam constat quot ex illis requirantur ut unam ex partibus proximè majoribus efficiant. Sic in Ex. 29° cum 18 octavæ colligantur duæ tantum hæreant loco suo, reliquæ vero 16 cum duas uncias efficiant, earum numerum duabus augent unitatibus: & similiter cum unciæ colligantur 32, duas ex his libras conficimus, & in unciarum loco 8 tantum, quæ superfluunt, notari debent. At in Ex. 20° cum 4 octavæ a 3 auferri nequeant, mutuam accipe unam unciam, quæ 8 continet octavas, & ex 11 sublatis 4, supersunt septem. Similiter cum ex 5 reliquis unciis 9 auferri nequeant, mutuam accipimus unam ex libris, quæ duodecim unciis constat, & 9 unciis sublatis ex 17, supersunt 8: ac denique ex libris 40 subducimus 17 & reliquas habemus 23.

§. VII.

Fractiones ad eumdem denominatorem redigere.

FRactiones diversæ speciei addi nequeunt vel subtrahi, nisi prius ad eumdem denominatorem redigantur. Potest autem quælibet fractio salva quantitate diversum habere denominatorem, si numeratorem per eamdem quantitatem multiplices, vel dividas, per quam denominator multiplicatur, aut dividitur; Sic $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ &c. eadem quantitas sunt, licet diversi sint numeri, quia unius numerator numeratoris alterius æque multiplex vel submultiplex est, ut denominator denominatoris. Itaque si duæ dentur fractiones diversæ speciei, ut alia ratio non suppetat qua redigi possint ad eamdem speciem, numeratorem unius duces in denominatorem alterius, & viceversa; denominatores vero ipsos invicem duces, ut in Ex. 21° factum est. Nam factum ex denominatoribus erit novarum fractionum communis denominator, & duo priora producta novos dabunt numeratores. Et eadem ratione progredi licebit si plures sint ejusmodi fractiones ad eandem speciem revocandæ. Nam ubi priores duas addideris, vel invicem subduxeris, prout res postulat, summa, vel differentia, ad eundem denominatorem redigetur, quo tertia afficitur, & sic deinceps.

38. Dixi, *ut alia ratio non suppetat*, nam multoties idem obtineri potest una tantum immutata fractione, si nempe hujus denominator ad eumdem numerum revocari possit cum denominatore alterius,

terius, sive per integrum multiplicetur (in quem numerator etiam ducendus erit) sive per integrum dividatur, quo etiam numerator dividi possit. Sic si dentur duæ fractiones $\frac{a}{3}$, $\frac{b}{6}$, nemo non videt primam revocari posse ad denominatorem secundæ duplicando ipsius denominatorem, ac numeratorem: & si dentur $\frac{a}{3}$, $\frac{6b}{18}$, secunda ejusdem evadit speciei cum prima, si per 6 uterque illius numerus dividatur. Verum non id semper licebit, nam $\frac{a}{5}$ & $\frac{b}{7}$ Ex: gr. non possunt ad eumdem denominatorem adduci, nisi utroque denominatore immutato per traditam methodum; cum nullus sit integer, in quem ductus 5 evadat 7, & nullus sit integer per quem 7 divisus evadat 5.

§. VII.

Inventio divisorum.

39. Generatim loquendo, nusquam licebit unam fractionem ad eamdem speciem cum altera revocare, nisi utraque immutata, quoties denominatores numeri erunt vel in se primi, vel inter se. Numeri in se primi dicuntur, quos sola unitas metitur, cujusmodi sunt 1, 5, 7, 11, 19: Inter se primi dicuntur, qui præter unitatem nullum habent inter se communem divisorem.

40. His opponuntur numeri compositi, quos nempe præter unitatem alii quoque numeri metiuntur: sic 12 componitur ex 2 & 6, itemque ex 3 & 4, unde 2, 3, 4, 6 metiuntur 12, seu (quod perinde est) aliquoties sumpti 12 adæquant. Quod si igitur alicujus fractionis denominator sit numerus compositus, & resolvi possit in alterius fractionis deno-

denominatorem divisione instituta per numerum, ex quo numerator etiam componatur, licebit per divisionem fractionem hanc ad alterius denominatorem deprimere.

41. Et in minoribus quidem numeris facile dignoscitur utrum, & quos communes habeant divisores, at in majoribus aliquo artificio opus est, quo etiam utimur cum fractionem ad minimos terminos deprimere volumus. Etsi autem methodus tradi solet, qua communes ejusmodi divisores inveniantur, libet tamen docere quomodo omnes dati numeri divisores inveniendi sint, quod & ad rem facit, de qua loquimur, & alias etiam in arithmetica præstat utilitates.

42. Quærantur omnes divisores numeri 148. Ducta linea horizontali (Ex.22°) super illam aliam erige transversam lineam, cui ex alterutra parte numerum datum, & quotos ex divisione emergentes adscribas, ex altera vero divisores inveniendos. Quæratur primò minimus dati numeri divisor, qui in casu nostro est 2, ut vel ex eo potest intelligi, quod numerus datus est par. Scribe ergo 2 in divisoribus, & ex altera parte quotum ex hac divisione 74. Rursus cum hic quotus sit numerus par, dividi poterit per 2: quare scribe iterum 2 in divisoribus, & quotum 37 ex alia parte. Tum duc 2 in 2, & factum 4 adjice divisoribus inventis. Nam si 148 dividi potest per 2, & quotus hujus divisionis iterum dividitur per 2, manifestum est, quod totus numerus etiam per 4 dividi potest. Quoniam verò postremus quotus 37 numerus est primus, qui per se ipsum tantummodo dividi potest, aut per uni-

unitatem, nam alii ipsius divisores frustra inquiruntur: scribe 37 in divisoribus, & unitatem in quotis; deinde ob rationem jam dictam duc 37 in divisores antea inventos 2 & 4, & qui inde fiunt numeri 74, 148 divisoribus adjiciantur, habebisque omnes dati numeri divisores 2, 4, 37, 74, 148. Quod si igitur revocanda esset ad minimos terminos fractio $\frac{37}{148}$ ex his intelligeres dividendam esse per maximum divisorem communem 37, ut evaderet $\frac{1}{4}$; & si ad eamdem denominationem revocare oporteret fractiones $\frac{2}{37}$, $\frac{8}{148}$, hanc ad illam redigendam esse intelligeres divisione instituta per 4, qui numeratorem etiam dividit, & evaderet $\frac{2}{37}$.

43. Notandum hic est, quod numeri etiam integri ad quamlibet fractionis speciem revocari possunt, si per numerum multiplicentur, qui denominator est fractionis datæ, & facto idem subjiciatur denominator, Sic 7 & $\frac{2}{5}$ ad eamdem speciem rediguntur si 7 ducatur in 5, exinde conficiatur fractio $\frac{35}{5}$. Ratio in promptu est ex dictis, si numeri integri pro fractis habeantur, quorum denominator est unitas.

§. VIII.

Fractiones multiplicare, & dividere.

44. NUlla reductione opus est, ubi fractiones multiplicare oportet; satis est enim numeratores, & denominatores invicem ducere, ut novus existat numerator & denominator fractionis, quæ erit factum ex datis fractionibus emergens. Sic

Sic factum ex $\frac{2}{6}$ in $\frac{4}{8}$ est $\frac{8}{48}$. Contra vero si fractio per aliam fractionem dividenda sit, dividendæ numerator per alterius denominatorem est multiplicandus, & illius denominator in hujus numeratorem ducendus est. Sic quotus ex $\frac{3}{6}$ per $\frac{2}{16}$ est $\frac{48}{12}$, sive 4. Nec mirum esse debet, si fractio per fractionem divisa dat numerum integrum, cum revera una fractio bis, ter, quater &c. in alia contineri possit. Itaque fractionis valor per multiplicationem minuitur, augetur per divisionem, & ratio constat, si ipsa divisionis, & multiplicationis natura attendatur. Quod si numerus compositus ex integro & fracto per numerum ex fracto & integro pariter compositum multiplicandus sit aut dividendus, uterque integer ad eamdem cum fracto suo speciem revocandus est, & in unam summam cum eodem colligendus, ubi enim hoc feceris eadem prorsus methodo res absolvitur, ut in puris fractionibus factum est. Atque ita etiam si diversæ speciei quantitates, ut puta, libræ, unciæ, octavæ per similes quantitates multiplicandæ essent, aut dividendæ, utrasque prius oporteret ad infimam speciem redigere. Sic ut habeatur factum ex 2. $\frac{4}{5}$ in 3. $\frac{5}{6}$, prior quantitas ad eamdem speciem redacta dat $\frac{14}{5}$, secunda verò $\frac{23}{6}$, & factum ex utraque $\frac{322}{30}$, sive 10. $\frac{22}{30}$, aut 10. $\frac{11}{15}$, fractione ad minimos terminos depressa.

De

§. IX.

De iisdem in fractionibus decimalibus.

45. Fractiones decimales eadem omninò ratione, qua integri, pertractantur. Solum habenda est maxime ratio puncti, quo ab integris dirimuntur. Hoc enim punctum in eadem verticali linea jacere debet cum plures quantitates vel in unam summam colligendæ sunt, vel ab invicem subducendæ. Ubi vero multiplicatio instituitur, eum locum in facto occupare debet, ut totidem post se notas relinquat quot erant in utroque coefficiente. Demum si divisio peragitur, divisi numeri decimales notæ probe notandæ sunt computando in his etiam cyphras, quæ ad divisionem continuandam adjectæ essent; nam in quoto & divisore simul totidem esse debent post punctum notæ, quot erant in dividendo. Additionem, subtractionem, multiplicationem, & divisionem ejusmodi exhibent exempla 23, 24, 25, 26.

46. Notandum est tamèn quod interdum vacantia loca cyphris supplenda sunt. In subtractione, si numerus subtrahendus plures habet notas quam is unde subtrahitur, huic adijcere oportet tot cyphras, quot in illo notæ superfluunt. Sic in Ex. 27° subtractio peragitur non aliter quam si vacantia superioris numeri loca cyphras continerent.

47. At si quantitates se mutuo destruant antequam ad punctum pervenias, quæ vacant in differentia loca ad punctum usque cyphris supplenda sunt, sive etiam integri numeri omnino se destruant, ut in

ut in Ex.28° , sive aliquam relinquant differentiam, ut in Ex.29° .

48. In multiplicatione, si non tot fuerint in facto notæ, quot in utroque coefficiente decimales, tot illi sunt cyphræ anterius apponendæ, donec hunc notarum numerum adæquent. Ita factum est in Ex: 30.

49. Demum in divisione instituenda, si dividendus non tot habet notas quot requiruntur ut divisorem superet vel adæquet, tot in fine cyphræ adjiciantur, quot opus fuerit ad hunc defectum supplendum. Quod si divisione peracta, plures sint in diviso numero decimales notæ quam in divisore simul, & quoto, huic erunt apponendæ anterius tot cyphræ quot in diviso notæ superfluunt. Utrumque contingit in Ex.31° . Nam si divisor est 356 . 27, & dividendus sit 2 . 314, huic erunt duæ cyphræ apponendæ, ut divisio possit institui, quæ cum deinde per duplicem cyphræ adjectionem continuetur, numerabit dividendus septem decimales notas, cum duæ tantum sint in divisore. Quinque igitur ejusmodi notæ esse debebunt in quoto, & ut totidem sint duæ illi cyphræ erunt anterius apponendæ.

§. X.

Extractio Radicum.

50. VEniendum est jam ad extractionem radicum, qua in re illud in primis est animadvertendum quod si numerus in se ipsum ducitur, productum dicitur quadratum, sive potentia aut digni-

dignitas secunda ejusdem numeri, cum numerus ipse potentia prima dicatur. Si quadratum iterum ducitur in suum numerum, factum dicitur cubus, sive potentia tertia. Si cubus in eumdem ducatur numerum factum dicitur potentia quarta. Si hæc iterum ducatur in eumdem numerum, factum erit potentia quinta, eodemque modo sexta, septima &c. ejusdem numeri potentiæ gignuntur. Sic 3 est sui ipsius potentia prima, 9 secunda, 27 tertia, 81 quarta, 243 quinta, & sic deinceps.

51. Contraria prorsus ratione 3 dicitur radix quadrata, aut secunda, sive sine ullo addito radix numeri 9, radix cubica aut tertia numeri 27, Radix quarta 81, quinta 243 &c.

52. Dati numeri potentiam quamlibet invenire facillimum est ope multiplicationis; at radicem investigare longe difficilius: immo infiniti numeri nullas habent radices veras, quas numeris liceat exprimere, sed tantummodo veris proximas, quæ scilicet fractionum ope ad veras quantum libuerit accedant, quin usquam ad exactum earumdem valorem pertingant. Sic potentia secunda binarii est 4, ternarii est 9, adeoque Radix 4 est 2, radix 9 est 3: sed nullus numerus inter 4 & 9 radicem habet exactam in numeris vel integris vel fractis. Non in numeris integris quia major esse debet quam 2, minor quam 3; non in fractis vel in integris simul cum fractis, quia numerus fractus, vel compositus ex integro & fracto, in suo quadrato fractionem aliquam semper habet.

53. Radices extrahere dicimur cum ejusmodi radices veras, vel veris proximas investigamus. Methodum

thodum hic dabimus expeditam ad radices quadratas extrahendas, de altioribus dicemus in arithmetica speciosa, ubi formulæ algebraicæ ipsam hujus operationis rationem facile demonstrabunt. Ante tamen in promptu habere necesse est quadrata novem primorum numerorum, quæ sunt, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, ut statim assignari possit radix vera, vel proxime minor vera cujuslibet numeri minoris quam 100.

54. Detur in Ex.32° numerus 18190225 cujus radicem quadratam extrahere oporteat. Numerum datum in classes divide, quarum singulæ duas notas contineant, initio a postremis facto, nihil enim refert sive unica tantum nota prima classis constet, sive duabus, ut in hoc casu contingit, & quot erunt ejusmodi classes, totidem radix quæsita habebit notas. Hinc ductâ lineâ transversa ad calcem numeri, ut in divisione fit,

55. Quære radicem veram, aut proxime minorem vera notarum primæ classis, quæ in nostro casu est 4, scribe 4 ubi in divisione quoti numeri notari solent, & ejus quadratum 16 aufer ex 18. Residuo 2 adnecte notas classis proxime sequentis, & hujus novi numeri postrema nota contempta, quære quoties duplum radicis hactenus inventæ, sive 8, contineatur in 21? Resp. 2. scribe ergo 2 in radice & ex 219 aufer productum ex 2 in 82, hoc est, in numerum compositum ex duplo radicis prius inventæ in decadum ordinem translato, & ex radice postremo inventa. Quod si contingeret factum ex 2 in 82 majorem esse, quam ut ex 219 subduci posset, pro 2 scribendus esset in radice numerus proxime minor &

in eo

in eo tota operatio esset reformanda. Sed in casu nostro id minime contingit, quare ex 219 aufer 2 in 82, sive 164, & residuo adnecte notas classis proxime sequentis. Rursus contempta novi numeri postrema nota dic: quoties duplum radicis hactenus inventæ, sive 84 continetur in 550? Resp.6, & quoniam factum ex 6 in 846 est ejusmodi ut auferri possit ex 5502, scribe 6 in radice, & ea subtractione peracta residuo adnecte postremas duas dati numeri notas. Dic ergo iterum quoties duplum radicis hactenus inventæ, sive 852 continetur in 4262? Resp: 5 : & quoniam factum ex 5 in 8525 auferri potest ex 42625, scribe quinque in radice, & substractione peracta quoniam nihil reliqui fit, id erit indicio radicem exactam dati numeri esse 4265.

56. Quod si post ultimam subtractionem aliquid supersit, punctum residuo apponitur, & duæ cyphræ adijciuntur, ut operatio continuetur in partibus decimis unitatis. Exinde eadem ratione progredimur ad centesimas, & sic deinceps quantum libuerit, ut videre est in Ex.33°.

57. Idem hic quoque notare oportet quod est in divisione animadversum. Nempe si post adiectas alicui residuo notas duas classis proxime sequentis duplum radicis inventæ nusquam contineatur in numero, qui per illud dividendus est postrema hujus notâ contemptâ, cyphra ponenda est in radice, & classis sequentis duabus notis demissis operatio continuanda.

58. Denique hæc operatio divisioni est perquam simillima, in qua radix fit quotus, divisor verò fit duplum radicis postremò inventæ auctum nota, quæ dein-

deinceps inquiritur. Hoc unum interest, quod in divisione divisor semper est idem, hic autem semper augetur; ibi totus divisor cognoscitur, hic autem ignota est novi divisoris nota, quæ inquiritur; quod in causa est, cur in hac divisione instituenda postrema quantitatis dividendæ nota prætereatur:

59. Si numerus, unde radix extrahenda est, fractiones habeat decimales, classium divisio hinc & inde a puncto exordium sumit, ut videre est in Ex.34° ubi nota quod cum decimalium classes desinant in unam notam, ubi hæc postremo residuo est adjicienda, appositâ cyphrâ ad binas adducitur.

60. Hujus operationis ritè peractæ argumentum habebis, si radicis inventæ quadratum quæras, & huic residuum addas, si aliquid peracta operatione superfuit, redibit enim numerus, unde radix extracta est. Quod si radix extracta est ex quantitate composita ex integris & decimalibus, ubi operationis periculum facies numerus emerget, qui præter dati numeri notas aliquot in fine cyphras contineat; ne tamen putes alicujus erroris indicium hoc esse, nam cyphræ decimalibus in fine numeri adjectæ nihil mutant quantitatem, quemadmodum nihil eamdem mutant in integris cyphræ anterius appositæ.

§. XI.

De numeris surdis.

61. MUltoties ab extrahenda radicè supersedemus, ubi veram invenire non licet, & numero, ex quo esset extrahenda signum radicale præfigimus

figimus $\sqrt{\ }$: sic $\sqrt{3}$ significat radicem quadratam numeri 3, & $\sqrt[3]{10}$ denotat radicem cubicam denarii, & $\sqrt[4]{28}$ denotat radicem quartam 28. Et hi sunt quos Arithmetici vocant numeros surdos, sive irrationales.

62. Ubi plures dantur ejusmodi numeri surdi, adduntur, vel subtrahuntur facillime, si & ejusdem sint ordinis, & idem sit ubique sub signo radicali numerus, præfigendo scilicet numerum, qui denotet quoties ea surda quantitas sumenda sit; sic $7\sqrt{2}$ est summa $2\sqrt{2}$ & $5\sqrt{2}$, & $5\sqrt{2}$ est differentia inter $7\sqrt{2}$, & $2\sqrt{2}$. At ubi numeri sub signo radicali positi diversi sunt non aliter fere addi possunt, aut subtrahi quam connectendo quantitates per additionis, aut subtractionis signa, de quibus dictum est in Scholio post prop. 9. Geom. & iterum dicetur in §. I. Elem. Algebræ.

63. Contingit tamen interdum ut quantitates surdæ ad eumdem numerum revocari possint; in quo casu licebit post reductionem easdem addere, aut subtrahere, uti dictum est. Reducuntur autem eadem ratione, qua ad minimos terminos revocantur. Numeri sub signo radicali positi quære omnes divisores, & inspice an inter illos sit aliquis, ex quo liceat radicem extrahere ejus ordinis, cujus est surda quantitas. Si aliquem ejusmodi divisorem invenias, ejus radicem præfige signo radicali, sub quo hærebit tantummodo alter dati numeri coefficiens. Sic $\sqrt{8}$ resolvitur in radicem facti ex 2 in 4, unde æqualis invenitur $2\sqrt{2}$, & $\sqrt{32} = \sqrt{16 \times 2}$ æquatur $4\sqrt{2}$.

$4\sqrt{2}$. Eadem ratione $\sqrt[3]{16}$ æquatur $2\sqrt[3]{2}$, quia 16 resolvitur in coefficientes 8 & 2, quorum ille habet radicem cubicam 2, & $\sqrt[4]{96}$ æquatur $2\sqrt[4]{6}$, quia 96 resolvitur in 16 & 6, quorum prior habet radicem quartam 2.

64. Demum multiplicantur, & dividuntur numeri irrationales, quemadmodum reliqui numeri, & facto vel quoto idem quod prius erat signum radicale præfigitur, quod quidem in utroque numero sit ejusdem ordinis; nam si sint ordinis diversi, prius ad eumdem ordinem quantitates erunt ejusmodi revocandæ, de qua re commodius dicetur ubi de potentiarum exponentibus & logarithmis agemus. Interim factum ex $\sqrt{2}$ in $\sqrt{8}$ est $\sqrt{16}$, sive 4, & quotus ex $\sqrt{8}$ divisa per $\sqrt{2}$ æquatur $\sqrt{4}$, seu 2. Factum vero ex $\sqrt{2}$ in $\sqrt{3}$ est $\sqrt{6}$, & quotus ex $\sqrt{5}$ per $\sqrt{3}$ æquatur $\sqrt{\frac{5}{3}}$. Quod si quantitates irrationales per rationales multiplicare oporteat aut dividere, non alia re opus est quam has illis præfigere, aut subijcere sic factum ex 10 in $\sqrt{3}$ est $10\sqrt{3}$, & quotus ex divisione $\sqrt{3}$ per 5 est $\sqrt{\frac{3}{25}}$, seu $\frac{1}{5}\sqrt{3}$; sic enim scribere præstat ne divisorem radicali signo affectum esse quis putet.



CA-

CAPUT II.

De Rationibus, & Proportionibus.

§. I.

De ratione simplici.

1. Etsi de his in Geometriæ Elementis aliqua diximus, quantum eo loci res postulabat, non tamen erit inutile aliqua hic repetere, ubi ea doctrina plenius tradenda est; tum ne sæpius lectorem ad superiora remittamus, tum quia tanti refert animo hæc altius imprimere, ut operæ prætium sit ea sæpius Tyronibus inculcare. Utemur interdum arithmeticæ speciosæ notis ad proportionum affectiones vel generalius exprimendas, vel brevius demonstrandas. Itaque antequam hoc caput legere aggrediantur recolant quæ de his ibidem adnotavimus, aut §.I. & II. Algebræ, quos a reliquis noluimus divellere, attente perlegant.

2. *Ratio* dicitur ea duarum quantitatum habitudo, qua ad invicem referuntur in ordine ad ipsam quantitatem. *Geometrica* est si in ea relatione spectemus, quomodo una quantitas alteram contineat: *Arithmetica*, si excessum tantummodo unius supra aliam consideremus. Si referas 10 ad 5 quatenus prior quantitas secundam bis continet, ratio erit geometrica: at si referas 10 ad 5 quatenus prior quinque unitatibus secundam excedit, ratio erit arithmetica. Rationis autem nomine, nisi quid additur, semper Geometrica designatur.

3. In omni ratione quantitas, quæ ad aliam re-

fertur, antecedens dicitur, ea vero ad quam refertur, consequens.

4. Ratio Geometrica dicitur dupla, tripla, deculpla &c. Si antecedens bis, ter, decies &c. Consequentem continet: contra vero subdupla, subtripla, subdeculpla &c. Si bis, ter, decies &c. antecedens in consequenti continetur.

5. Exponens rationis Geometricæ dicitur quotus ex antecedenti per consequentem diviso: Exponens vero arithmeticæ est differentia consequentis ab antecedenti. Sic exponens rationis Geometricæ 10 ad 5 est 2, exponens arithmeticæ 10 ad 7 est 3: Exponens Geometricæ 6 ad 9 est $\frac{2}{3}$, exponens arithmeticæ 5 ad 8 est 8 — 3: & in genere si dentur duæ quantitates a & b, earum rationem geometricam exponet $\frac{a}{b}$ sive $a : b$ (nam ita quoque ea divisio designatur) arithmeticam $a - b$. Hinc ratio geometrica ad instar fractionis scribitur, arithmetica ad instar subtractionis.

6. Tota rationum doctrina ab hoc generali theoremate pendet: si antecedens & consequens rationis geometricæ per eamdem quantitatem multiplicentur aut dividantur eadem manet ratio: & eadem pariter manet ratio arithmetica si illius antecedentem, & consequentem eadem augeas quantitate, vel imminuas. Res demonstratione non indiget, patet enim ex ipsis terminis esse $6 : 2 = 6 \times 4 : 2 \times 4 = 24 : 8$, & $a : b = ac : bc$: itemque $6 : 3 = \frac{6}{2} : \frac{3}{2}$, & $a : b = \frac{a}{d} : \frac{b}{d}$ Similiter $8 - 5 = (8 + 4) - (5 + 4) = 12 - 9$, & $8 - 5 = (8 - 2) - (5 - 2) = 6 - 3$.

6. Quan-

7. Quantitates æquales æqualem habent ad eamdem quantitatem rationem, & contra: duarum vero inæqualium quantitatum quæ major eſt majorem habet ad tertiam quantitatem rationem, quam minor. Hæc & his ſimilia ſatis per ſe manifeſta ſunt, & inter axiomata reponenda.

8. Duarum rationum æqualitas proportio dicitur Geometrica vel Arithmetica pro rationum ipſarum qualitate: quare ad habendam proportionem quatuor quantitates requiruntur, & prima ad ſecundam eſſe dicitur, ut tertia ad quartam. Quod ſi eadem quantitas bis aſſumatur, ut proportio in tribus tantum quantitatibus conſiſtat, quod videlicet fit cum primæ rationis conſequens idem eſt cum antecedente ſecundæ, proportio dicitur continua, quæ alias diſcreta diceretur. Deſignatur Geometrica Proportio ſic: $a.b::c.d$, vel $a:b=c:d$, vel $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$: Arithmetica vero $a-b=c-d$.

9. In proportione Geometrica factum ſub extremis terminis, æquatur facto ſub mediis: & ſi quatuor quantitates ſint ejuſmodi, ut factum ſub extremis æquetur facto ſub mediis, eæ ſunt geometricè proportionales. Id ipſum contingit in extremarum, & mediarum ſumma, ſi de Arithmetica proportione ſermo ſit. Si rem in numeris experiaris, ita ſe habere liquido deprehendes, at ſi demonſtrationem directam inquiris, primam, & ſecundam partem demonſtravimus in Elem. Geom. prop. 10. Tertia verò & quarta ex dictis num. 6., & 7. facile demonſtratur. Nam ſi fuerit $a-b=c-d$, erit (per n. 6.) $(a+c)-(b+c)=(a+c)-(a+d)$;

 ergo

ergo (*per num.* 7.) $b+c=a+d$. Rursus si fuerit $b+c=a+d$, erit (*per num.* 5.) $(a+c)-(b+c)=(a+c)-(a+d)$. Ergo (*per num.* 6.) $a-b=c-d$.

10. In omni proportione geometrica datis tribus terminis quartus facile invenitur. Nam si unus est ex extremis, æqualis erit facto sub mediis per alterum extremum diviso; & si est unus ex mediis æquabitur facto sub extremis per alterum medium diviso. In Arithmetica vero proportione idem invenitur eadem ratione si multiplicationi additionem substituas, & divisioni subtractionem. Descendit ex præcedentibus, nam si est $a . b :: x . c$, erit $a \times c = b \times x$, atque adeo $x = \frac{ac}{b}$ similiter si fuerit $c . d :: e . x$ erit $cx = de$, adeoque $x = \frac{de}{c}$. At in Arithmetica si fuerit $a - x = b - c$, erit $a + c = x + b$, unde $x = a + c - b$. Hinc regula aurea, sive trium, descendit, in qua datis prioribus tribus terminis geometricæ proportionis, tertius duci jubetur in secundum, & factum dividi per primum, ut quartus habeatur.

11. Ex nono numero deducitur quod utcumque ordinentur quatuor termini proportionales, manet proportio dummodo qui semel fuerant extremi, vel ambo maneant extremi, vel medii, aut vice versa. Cum enim sint proportionales, factum sub extremis æquabitur facto sub mediis, & ordine, uti dictum est, immutato eadem manebit æqualitas. Et idem valet de summa in proportione Arithmetica. Quoniam

niam vero quilibet ex quatuor terminis primum locum occupare potest ejus coefficiente in postremum locum rejecto, & ex aliis duobus uterque mediorum primus esse potest altero secundo existente; terminorum ordo octies mutari potest, ut patet in A, & B (Tab. pag. 110.) ubi ejus rei exemplum tam in Geometrica proportione positum est, quam in Arithmetica.

12. Ex prima terminorum ordinatione reliquæ omnes inferuntur, quarum illationum duæ tantum propriis nominibus designantur a Geometris, secunda scilicet, & quinta earum quæ sunt in A; nam argumentari dicimur *alternando* cum primus infertur esse ad tertium, ut secundus ad quartum: *invertendo*, si infertur esse secundus ad primum, ut quartus ad tertium. Cæterum omnes ejusmodi mutationes non incongrue uno vocabulo *permutando* fieri dici possent.

13. In proportione geometrica est summa vel differentia terminorum primæ rationis ad primum vel secundum, ut summa vel differentia terminorum secundæ rationis ad primum vel secundum; & contra primus vel secundus terminus primæ rationis est ad summam vel differentiam terminorum ejusdem, ut primus vel secundus terminus rationis secundæ ad ejusdem terminorum summam vel differentiam. Rursus summa terminorum primæ rationis est ad eorumdem differentiam, ut summa terminorum secundæ ad ipsorum differentiam: & contra differentia terminorum primæ rationis ad eorumdem summam est ut differentia terminorum secundæ ad ipsorum summam. Hinc decem inferuntur proportiones, quæ

dispositæ sunt in C, quarum posteriores quinque ex quinque prioribus fiunt *invertendo*. Harum omnium legitimam illationem in numeris explorabunt Tyrones, quos litteris in prima proportione semel substitutos iisdem in omnibus reliquis substituent, per magni enim interest per hanc numerorum substitutionem algebraico, ut ita dicam, sermoni assuescere eumque sibi familiarem efficere; in nostro autem casu quantitates semper proportionales obtinebunt. Cæterum generalis horum demonstratio patet in D ubi harum omnium illationum extremi & medii termini invicem ducti dant æquales quantitates, cum sit ex hypotesi $ad = bc$, & his æqualibus quantitatibus ubique addantur vel adimantur æquales.

14. Ex his decem proportionibus cum secundam inferimus, in qua summa terminorum ad secundum refertur, argumentari dicimur *componendo*; si vero eorumdem differentia ad secundum refertur, argumentari dicimur *dividendo*: Quod si demum utriusque rationis prior terminus ad primi & secundi differentiam referatur, ut in octava fit, hoc argumentandi genus dicitur *conversio rationis*. Reliquæ illationes propriis nominibus carent. Cæterum in Arithmetica proportione harum illationum nulla locum habet.

15. In qualibet proportione eadem manebit rationum æqualitas, si per eamdem quantitatem multiplicetur aut dividatur, vel primus & secundus terminus; vel primus & tertius; vel tertius & quartus; vel secundus & quartus; vel aliquod ex his binariis; vel omnia simul, sive per eamdem omnia, sive per singulas singula binaria quantitates. Etenim

in his

in his omnibus casibus invenietur factum sub extremis terminis æquale facto sub mediis, ut patet in exemplo apposito in E ubi hos casus expressimus, in iisdem quantitatibus $a.b::c.d$ per eamdem m successive multiplicatis, aut divisis. Et in quatuor quidem prioribus casibus factum sub extremis est ubique mad; factum sub mediis mbc; in quatuor vero posterioribus, illud est $\frac{ad}{m}$, hoc $\frac{bc}{m}$; quæ omnia æqualia sunt inter se ob $ad = bc$. Porro cum maneat proportio sive dividatur per eamdem quantitatem sive multiplicetur unumquodlibet ex prædictis binariis; manifestum est eamdem manere sive in pluribus successive, sive in omnibus simul idem fiat. Rem in numeris experiri Tyronibus erit in primis utile, ut monuimus, tum ad exercitationem, tum ad res altius animo defigendas.

§. II.

De ratione composita.

16. Ratio composita ex pluribus geometricis rationibus illa dicitur, quam habet factum ex earum antecedentibus ad factum ex consequentibus; ratio autem ex Arithmeticis composita est illa, quam habet summa antecedentium ad summam consequentium. In F & H duæ sunt ex una parte rationes geometricæ, tres ex alia, & rationes ex his compositæ in G & K inveniuntur. Similiter duæ sunt rationes Arithmeticæ in L, & ex his compositæ in M.

17. Ratio composita est factum ex componentibus in geometricis, summa in arithmeticis. Nam quod ad primum attinet ratio $a : b$ est fractio $\frac{a}{b}$, & ratio $c : d$ est $\frac{c}{d}$ cum. sit per num. 5. valor rationis quotus ex antecedenti per consequentem diviso. Sed $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ exprimit rationem $ac : bd$ ex simplicibus compositam: ergo ratio composita est factum ex componentibus. Sic ratio $4 : 2$ erat dupla, ratio $9 : 3$ tripla, ratio composita $36 : 6$ est sextupla. Similiter ex ratione $4 : 2$ dupla, $9 : 3$ tripla, $20 : 5$ quadrupla, oritur ratio $720 : 30$, cujus exponens est 24, factum scilicet ex $2 \times 3 \times 4$. Secunda pars evidens est, nam summa antecedentium est $a + c$, summa consequentium $b + d$, unde ratio ex his composita $(a + c) - (b + d)$. Patet etiam in rationibus $6 - 2 = 4$, $7 - 5 = 2$, ex quibus componitur ratio $13 - 7 = 6 = 4 + 2$.

18. Si plures sint geometricæ proportiones & primi seorsim termini invicem multiplicentur; tum secundi, tum tertii, tum quarti; facta erunt proportionalia: & idipsum continget in proportionibus arithmeticis si multiplicationi summa terminorum substituatur. Patet, quia quatuor termini, qui inde efficiuntur, duas constituent rationes ortas ibi ex multiplicatione, hic ex summa rationum æqualium adeoque & ipsæ æquales erunt inter se. Exempla habes in Q, R, S, T.

19. Si

19. Si in pluribus rationibus geometricis vel arithmeticis eumdem terminum alicubi esse contingat tum in antecedentibus, tum in consequentibus; eadem erit ratio composita etiamsi terminus ille supprimatur. Exempla habes in V & X, ubi *am* : *nc*, & *a* : *n* sunt rationes compositæ ex tribus superioribus suppresso termino *b* in prima, & *bc* in secunda, quod hi antecedentibus, & consequentibus communes sunt. Eadem exempla exhibent numeri in Y, Z. Quod si quis in arithmeticis quoque rationibus exempla desideret, facillime per se ponet. Demonstratio pendet ex eo quod in his casibus terminus supprimitur, qui multiplicaret in geometrica, & augeret in arithmetica utrumque terminum rationis, quare eadem manet ratio (*per num.6.*) sive abjiciatur ille terminus, sive inducatur in rationem compositam. Inde etiam facile eruitur quod toties in consequentibus idem terminus prætermitti potest quoties in antecedentibus suppressus est, ut in AA: ubi cum *b* semel in antecedentibus occurrat, bis in consequentibus, in his non nisi semel supprimi potest.

20. Ratio sive geometrica, sive arithmetica uniuscujusvis termini ad alium quemvis componitur ex rationibus intermediis, quæ oriuntur ex quovis numero terminorum interjacentium. Sic ratio *a* : *b* æquatur rationi compositæ ex *a* : *m*, *m* : *p*, *p* : *r*, *r* : *c*, *c* : *b*, initio facto in *a*, & desinendo in *b*, sumptis terminis intermediis quot libuerit. Sic in numeris ratio 36 : 2 est ratio composita ex 36 : 18, 18 : 6, 6 : 12, 12 : 4, 4 : 2. Demonstratio in promptu est, quia quantitates illæ intermediæ in antecedentibus & consequentibus occurrunt, unde

de ratio composita ex $a : m$, $m : p$, $p : r$, $r : c$, $c : b$ eadem est ac ratio $amprc : mprcb$, in qua suppressis communibus terminis remanet ratio $a : b$.

21. Hinc duplex oritur argumentandi ratio quarum altera dicitur *ex æqualitate ordinata*, altera *ex æqualitate perturbata*. Sint, ut in AB & AC, tres quantitates ex una parte, & tres ex alia, ita ut eadem sit utrobique ratio primæ ad secundam, & secundæ ad tertiam; erit etiam utrobique eadem ratio primæ ad tertiam, & hoc est argumentari ex æqualitate ordinata. Si vero fuerit ex una parte prima quantitas ad secundam ut secunda ad tertiam ex alia, & contra; argumentabimur ex æqualitate perturbata si inferamus eamdem esse utrobique rationem primæ ad tertiam. Exempla pro ratione arithmetica sunt in AD & AE, demonstratio autem pendet ex eo quod ultimæ rationes ex præcedentibus æqualibus componantur.

22. Hinc etiam intelligitur cur Euclides rationem compositam definiens ex duabus $a : b$, $c : d$, fieri jubeat ut antecedens secundæ c ad suum consequentem d, ita consequentem primæ b ad novam quantitatem e, ut sit $a : e$ ratio ex duabus prædictis composita. Id inquam, intelligitur ex nostra etiam definitione, nam ratio $a : e$ componitur ex rationibus $a : b$; $b : e$; quare cum sit $b : e = c : d$, erit ratio $a : e$ composita ex rationibus $a : b$, $c : d$.

23. Ratio inversa, seu reciproca dicitur, quam habet consequens ad suum antecedentem. Sic ratio inversa 3 ad 6 est ratio dupla, eadem scilicet, quam habent 6 ad 3.

24. Fractiones sunt in ratione composita ex directa

recta numeratorum, & reciproca denominatorum. Exemplum numericum habes in AF, & ibidem ostenditur universim in litteris, revocando fractiones ad eumdem denominatorem.

25. Ratio ex duabus æqualibus composita dicitur duplicata, ex tribus triplicata, ex quatuor quadruplicata, & sic deinceps.

26. Hinc ratio Geometrica, quam habet quadratum unius quantitatis ad quadratum alterius est ejus duplicata, quam habent ipsæ quantitates ad invicem, ratio cuborum triplicata, & sic aliarum potentiarum rationes æque multiplices sunt, & dicuntur rationis, quam habent inter se radices, quot habent potentiarum exponentes unitates. Et contra ratio quam habent inter se radices quadratæ, cubicæ, quartæ &c. dicitur subduplicata, subtriplicata, subquadruplicata &c. rationis potentiarum correspondentium: at ratio quæ intercedit inter radices quadratas cuborum, hoc est ratio $a^{\frac{3}{2}}$ & $b^{\frac{3}{2}}$, dicitur *sesquiplicata*, cum sint $\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2}$.

27. Facile intelligitur in omni progressione sive geometrica, sive arithmetica primum terminum ad tertium habere rationem duplicatam primi ad secundum, primum ad quartum habere rationem triplicatam, & sic deinceps: nam eæ rationes componuntur ex omnibus intermediis, quæ æquales sunt inter se. Euclides definit rationem ejus duplicatam, quam duæ quantitates habent inter se, illam quæ intercedit inter primum terminum & tertium proportionalem post primum & secundum: triplicatam quæ intercedit inter primum & quartum, & sic de reli-

reliquis, quod cum nostra definitione coincidere nemo non videt.

28. Si duæ sint variabiles quantitates ita connexæ inter se, ut si una dupla, tripla, vel utcumque multiplex evadat, altera etiam æque multiplex fiat; dicitur esse prima in ratione directa simplici alterius. Sic in motu uniformi spatium est in ratione simplici directa temporis. At si prima in eadem ratione decrescit, in qua altera augetur, tunc illa esse dicitur in ratione inversa, sive reciproca istius. Sic ubi res aliqua in partes æquales dividitur divisionibus diversis, magnitudo partium est in ratione inversa numeri ipsarum partium. Quod si istæ duæ variabiles quantitates ita sint invicem connexæ, ut altera crescat in eadem ratione qua primæ quadratum, aut cubus, aut potentia quarta &c. tunc illa esse dicetur in hujus ratione duplicata, triplicata, quadruplicata &c. Sic in sphæris superficies sunt in ratione duplicata radiorum, moles vero in ratione triplicata eorumdem. At si in eadem ratione decrescit, qua crescunt primæ quadrata vel cubi, dicetur esse in ratione hujus reciproca duplicata aut triplicata. Sic gravitas Nevvtoniana est in ratione reciproca duplicata distantiarum, quia decrescit in eadem ratione, qua distantiarum quadrata augentur. Dicitur demum una quantitas esse in ratione composita plurium quantitatum, quando crescit in eadem ratione, qua productum ex his quantitatibus. Sic in diversis motibus uniformibus spatium est in ratione composita celeritatis, & temporis. Porro componuntur hæ rationes ex directis, & reciprocis, sive simplicibus, sive duplicatis, triplicatis, subduplicatis &c.

29. In quantitatibus variabilibus ratio inversa, qua una ad alteram refertur bene etiam exprimitur per hoc quod una esse dicatur directe ut unitas, sive constans quælibet quantitas, per alteram variabilem divisa; nam fractio quæ inde emergit tanto minor est, quo major est ille divisor. Sic ubi spatium diversis celeritatibus percurritur, tempora sunt in ratione reciproca celeritatum, hoc est, ut unitas sive alia constans quantitas per easdem celeritates divisa, aut ad easdem applicata: quod loquendi genus satis est Geometris familiare ad hanc divisionem designandam.

30. Hoc proportionis genus, quod inter quantitates variabiles intercedit, signo etiam æqualitatis exprimitur. Sic, si spatium dicatur S, tempus T, velocitas C, erit $S = CT$, hoc est, spatium æquabitur velocitati in tempus ductæ. Nempe si fuerit aliud spatium s, aliud tempus t, alia velocitas c, erit $S . s :: CT . ct$.

31. Hinc argumentamur utrinque multiplicando aut dividendo, tamquam si vera & propria æqualitas intercederet. Cum sit enim $S = CT$, erit utrinque dividendo per C $\frac{S}{C} = T$, hoc est, tempus in ratione composita ex directa spatii S, & reciproca velocitatis C. Quod autem ita se res habere debeat patet ex eo, quia cum sit $S . s :: CT . ct$, si primus & tertius terminus dividatur per C, secundus & quartus per c, manebit rationum æqualitas (per num. 15) eritque $\frac{S}{C} . \frac{s}{c} :: T . t$.

32. Si

32. Si quantitas quædam, quæ prius variabilis erat, constans evadat; poterit ejus loco unitas substitui, atque adeo auferri, si vel in fractionis denominatore erat, vel in numeratore cum aliis quantitatibus composita. Sic cum sit $S = CT$, si duo motus æquabiles inter se comparentur, & eadem sit utrobique velocitas, erit $S = T$, hoc est, spatia in ratione temporum directa: & rursus cum sit $T = \frac{S}{C}$, si idem fuerit in duobus motibus spatium, erit $T = \frac{1}{C}$, hoc est tempora in ratione reciproca velocitatum. Eodem pacto res agitur in aliis similibus casibus, in quibus hac methodo ex uno Theoremate alia quamplurima facillimè eruuntur. Facilis est demonstratio, cum sit enim $S . s :: CT . ct$, ubi C constans est, erit $C = c$, quare dividendo terminos secundæ rationis per eamdem quantitatem manebit $S . s :: T . t$. Similiter cum sit $T . t :: \frac{S}{C} . \frac{s}{c}$, si fuerit $S = s$, dividendo per hanc quantitatem tertium, ac quartum terminum, manebi $T . t :: \frac{1}{C} . \frac{1}{c}$, quoniam $\frac{S}{S} = 1$, & $\frac{s}{s} = 1$.



CA-

CAPUT III.

De Progressionibus, & Logarithmis.

1. PRogressio vocatur, uti dictum est, terminorum series, qui in eadem continua proportione crescunt, vel decrescunt. Est autem progressio arithmetica, vel geometrica pro qualitate rationis, qua termini ad invicem referuntur. Geometricam habes in A, Arithmeticam in B. Et hæ quidem Progressiones crescentes sunt; decrescentes vero in C, & D exhibentur.

A 1 . 2 . 4 . 8 , 16 . 32 , 64 . 128 . 256 . 512 &c.
B 0 . 1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6 . 7 . 8 . 9 &c.

C 4 . 2 . 1 . $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{32}$. $\frac{1}{64}$ &c.
D 2 . 1 . 0 . -1 . -2 . -3 . -4 . -5 . -6 &c.

2. Progressionis ratio ea est, quam habet primus terminus ad secundum, eadem est enim qua quilibet alius terminus ad proxime sequentem refertur.

3. Si terminus quilibet referatur ad eum, qui secundus ab illo est, invenietur habere ad eumdem rationem progressionis duplicatam, si ad tertium triplicatam, & sic deinceps.

Patet ex eo quod rationes ejusmodi ex omnibus intermediis componuntur. Sic in A est 8 ad 32 in ratio-

ratione duplicata 1 ad 2; & 8 ad 64 in eadem ratione triplicata, & sic de reliquis.

4. Igitur si in qualibet progressione, sumantur quatuor termini, quorum priores duo eodem intervallo distent inter se, ac duo posteriores, erunt hi proportionales. Sic si sumatur in A secundus terminus 2, & quintus 16, itemque sextus 32, & nonus 256; erit 2 . 16 : : 32 . 256. Nam harum rationum utraque æque multiplex est rationis in qua termini progrediuntur.

5. In progressione Geometrica terminorum differentiæ erunt pariter in eadem continua ratione: & si in quadam terminorum serie fuerint differentiæ terminis proportionales, erunt hi in progressione geometrica. Sic in 18, 6, 2, differentiæ 12, 4 sunt ut 18 ad 6, in tripla nempe ratione, adeoque termini illi 18, 6, 2 sunt in progressione geometrica.

Dem. Sit $a . b :: b . c$. Erit (*per num.* 13 & 14 *cap.* 2.) convertendo $a . a - b :: b . b - c$ ergo alternando (*per n.* 12. *ib.*) erit $a . b :: a - b . b - c$. Sit jam $a . b :: a - b . b - c$; erit alternando $a . a - b :: b . b - c$; & convertendo $a . b :: b . c$.

6. In omni progressione geometrica termini crescunt, vel decrescunt in infinitum, nec ulla est finita quantitas ultra quam vel crescens non ascendat, vel non descendat decrescens: quin tamen hæc ad nihilum usquam perveniat.

Dem. Cum enim terminorum differentiæ sint ipsis terminis proportionales, his crescentibus illas quoque augeri necesse est. Sit jam quælibet data quantitas p, & differentia termini primi a secundo q. Erit profecto numerus aliquis m, in quem si ducatur

catur q datam quantitatem excedet. Quod si igitur tot progressionis termini sumantur post primum, quot habet m unitates, erit postremus major quam p. Etenim quod quilibet terminus sequens antecedenti addet, erit plus quam q, & universa incrementa totidem terminorum quot sunt in m unitates, erunt plusquam mq, adeoque datam quantitatem p excedent, & progressio eamdem prætergredietur. Sit rursus quantitas r quantumvis exigua, dico progressionem Geometricam decrescentem infra illam demum descendere. Dicatur enim primus terminus a, & sumatur aliquis terminus p, qui sit ad a ut a ad r. Si progressio fiat crescens a termino a in eadem ratione, in qua decrescit, post aliquem terminorum numerum perveniet ad quemdam numerum u, qui major sit quam p. Sumatur jam in decrescente idem numerus terminorum, & sit t terminus, ad quem pervenitur: erit (*per num.*4.) $t.a::a.u$, est autem ex hypothesi $a.r::p.a$, erit ergo perturbate (*per num.* 21.*cap.* 2.) $t.r::p.u$; Et quia p minor est quam u, erit & t minor quam r, ex quo constat nullam esse finitam quantitatem infra quam series decrescens non descendat. Nec tamen ad nihilum perveniet, quia in serie crescente post quemlibet terminorum numerum ad finitam aliquam quantitatem u pervenietur, & post eumdem terminorum numerum in decrescente invenietur t qui sit ad a ut a ad u, nec esse poterit $t = 0$ cum sit $= aa:u$.

7. Progressio Arithmetica crescens ultra quamlibet positivam quantitatem ascendet, decrescens

vero infra quamlibet negativam descendet, & in ejus terminis etiam o esse poterit.

Cum enim eadem quantitas continuò adjiciatur vel adimatur; limitem quemcumque vel positivum vel negativum prætergredi necesse est. Quod si terminos esse contingat differentiæ exactè multiplices; crescens aut decrescens series per o necessariò transibit, cum additio vel subtractio continua terminos destruat. Sic in D series per o transit, & ab o incipit in B. (pag. 111.)

8. Dato termino primo, ratione terminorum, & eorum numero, tam in geometrica progressione, quam in arithmetica postremus invenitur:

Sit a terminus primus, & terminorum ratio in geometria ut 1 ad r. & numerus terminorum $m+1$. Erit terminus secundus ar, tertius ar^2, quartus ar^3, ultimus ar^m. At in Arithmetica si primus terminus sit a, ratio vero ut o ad r, hoc est differentia terminorum r, & numerus terminorum $m+1$, erit secundus $a+r$, tertius $a+2r$, quartus $a+3r$, & ultimus $a+mr$. Hinc duo hæc theoremata inferuntur. In progressione geometrica ultimus terminus æquatur facto ex primo in exponentem rationis ad eam potestatem elevatum, quam exprimit numerus terminorum unitate mulctatus. At in progressione arithmetica ultimus terminus æquatur summæ ex primo, & differentia terminorum in eorumdem numerum ductâ unitate mulctatum. Sic in A (pag. 111.) terminus quintus ita invenitur: $a=1$, $r=2$, $m+1=5$, $m=4$, ergo quintus $ar^m = 1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 16$. At in

B a

B $a=0$, $r=1$, $m=4$, unde terminus quintus $a+rm=4$.

9. In progressione Geometrica est differentia primi a secundo ad differentiam primi ab ultimo, ut primus ad totam seriem dempto ultimo.

a . b	
b . c	
c . d	
d . e	
e . f	
f . g	
M . N	

Sint enim a, b, c &c. seriei termini, quorum postremus g. Distribuantur in duas columnas, quarum alterius summa sit M, alterius N; ita ut prima contineat omnes terminos præter ultimum, & secunda omnes præter primum. Cum quilibet terminus columnæ M ad quemlibet columnæ N sit in eadem ratione, erit pariter in eadem ratione summa omnium primæ ad summam omnium secundæ: siquidem proportionales quantitates proportionalibus additæ rationem non mutant, quod facile ostenditur. Erit igitur $a . b :: M . N$, & convertendo $a . a-b :: M . M-N$, aut invertendo $a-b . a :: M-N . M$. Sed $M-N$ est differentia primæ columnæ a secunda, hoc est, differentia a à g, cum reliqui termini communes sint, ergo $M-N=a-g$: & $a-b . a :: a-g . M$: sive alternando $a-b . a-g ::$ $a . M$. Quod erat dem.

Itaque ut in A (p. 111.) habeatur summa priorum quinque terminorum, fiat ut 1 (differentia primi a secundo) ad 31 (differentiam primi a sexto), ita 1 (terminus primus) ad summam quæsitam, quæ erit 31.

10. Si progressio decrescit in infinitum ultimo contempto termino, qui pariter in infinitum decrescens prorsus evanescit, habebitur tota series, si

fiat ut differentia primi a secundo ad primum, ita primus ad omnium summam. Sic progressio, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{8}$, &c. in unam summam collecta invenietur $= 1$, & hæc alia $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16}$ &c. $= 1 + \frac{1}{3}$. Unde si quis unum deberet, & primo anno solveret $\frac{1}{2}$, secundo $\frac{1}{4}$, & sic deinceps; post infinitas solutiones totum debitum solveret. At qui deberet 2, & primo anno solveret 1, secundo $\frac{1}{4}$, tertio $\frac{1}{16}$, & sic deinceps; post infinitas solutiones adhuc aliquid deberet.

11. In progressione Arithmetica dimidium summæ termini primi & ultimi in numerum terminorum ductum dat totam seriem.

Cum enim sit primus ad secundum ut penultimus ad ultimum, summa primi & ultimi eadem erit, quæ secundi & penultimi, & sic de cæteris, cum omnia ejusmodi binaria eamdem habeant summam. Cum igitur tot sit binaria quot habet terminos dimidia series, manifestum est summam termini primi & ultimi in dimidium numerum terminorum totam seriem colligere. Sic in B(pag. 111.) summa priorum sex terminorum, quorum primus est 0, postremus 5, erit $(0 + 5) \times 6 : 2 = 30 : 2 = 15$.

12. Hæc si conferas cum his quæ dicta sunt in n. 8. facile intelliges summam omnium numerorum in serie naturali ab unitate progredientium usque ad numerum quemdam x inclusive fore $(xx + x) : 2$; & summam omnium imparium pariter ab unitate, existente terminorum numero x, fore x^2. Sic omnium numerorum summa usque ad 6 inclusive est $(36 + 6) : 2 = 21$, & summa sex priorum imparium $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$. Similiter si

sumas

sumas quemdam numerum x numerorum parium in serie naturali a 2 progredientium, invenies hanc fore $xx + x$. Sic summa priorum quinque numerorum parium $2 + 4 + 6 + 8 + 10 = 25 + 5 = 30$.

13. Si sint duæ progressiones, quarum altera geometrica sit, altera arithmetica, & sub singulis primæ terminis singuli secundæ notentur, undecumque initium fiat, hi dicuntur illorum Logarithmi. Sic termini progressionis F sunt logarithmi progressionis E, singuli singulorum sibi imminentium: 6 est logarithmus 2, & 16 est Log. 64.

E $\frac{1}{16}$. $\frac{1}{8}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{2}$. 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. &c.

F —4. —2. 0. 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. &c.

14. Logarithmi multipliciter variari possunt. Integrum est enim cuivis duas quaslibet progressiones assumere, & alteram alteri affigere. Sed ad rem totam determinandam satis est duos geometricæ progressionis terminos cum suis Logarithmis constituere. Sic ubi semel decreveris 4 & 6 esse Log. 1 & 2, reliqui Logarithmi constituti sunt.

15. Utcumque fuerit constituta progressio geometrica cum suis Logarithmis, utramque seriem licebit interjectis quotcumque terminis augere. Si quidem inter duos quoslibet Geometricæ terminos medium geometricè proportionale, & inter duos eorum Logarithmos medium arithmeticè proportionale constituas. Sic inter 2 & 4 medium proportionale est $\sqrt{2 \times 4} = \sqrt{8} = 2.829$ &c. cujus Log. est

 (6+8);

$(6+8):2=7$. Et eadem methodo semper inveniri poterunt infiniti alii Logarithmi numerorum, qui vel integri sint, vel ex integris & fractis compositi, medios terminos inter duos proximos semper inquirendo. Porro geometricæ progressionis termini dicuntur sine ullo addito *numeri*, termini verò arithmeticæ *Logarithmi*.

16. Utcumque fuerint Logarithmi constituti, semper verum erit hoc generale Theorema, quod si e progressione Geometrica quatuor sumantur termini, qui sint inter se geometricè proportionales, erunt eorum Logarithmi in proportione arithmetica. Erunt enim illi ita in serie dispositi, ut priores duo æque distent inter se, ut duo posteriores: quod idem cum Logarithmis contingat, erunt etiam hi arithmeticè proportionales.

17. Igitur quæcumque fuerit Logarithmorum constitutio, in regula trium satis erit secundi & tertii termini Logarithmos addere, & ab ea summa Logarithmum primi subtrahere ut habeatur Logarithmus quarti; cum enim sint geometricè proportionales numeri, quorum tres dantur & unus inquiritur, erunt eorum Logarithmi arithmeticè proportionales; quare summa primi & ultimi æqualis erit summæ secundi & tertii, adeoque habebitur quartus, si ab horum summa primum subducas.

18. Logarithmi designantur præfigendo quantitati litteram L, vel Log. quod frequentius usurpatur. Itaque Log. a denotat Logarithmum numeri a. Quod si his notis utaris, clarius etiam intelliges quod dicebamus; fore nempe Log. $x =$ Log. $b +$ Log. $c -$ Log. a, si fuerit $a . b :: c . x$. Cum sint enim numero-

merorum geometricè proportionalium Logarithmi arithmeticè proportionales, erit Log. a — Log. b = Log. c — Log. x; ergo Log. a + Log. x = Log. c + Log. b; adeoque Log. b + Log. c — Log. a = Log. x.

19. Forma Logarithmorum omnium commodissima est, in qua Logarithmus unitatis constituitur o, & utraque progressio crescit. Sint duæ hujusmodi progressiones G, & H.

G $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 &c.

H —4, —3, —2, —1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 &c.

20. In hac forma Logarithmorum in primis quilibet numerus erit aliqua potestas ejus, qui proximè sequitur unitatem: sic in nostro exemplo 4 est potestas secunda ipsius 2, 8 potestas ejusdem tertia, 16 potestas quarta &c. Erit enim 1 . 2 : : 2 . 4 = (2 × 2) : 1, & 1 . 2 : : 4 . 8 = (2 × 2 × 2) : 1, & sic deinceps.

21. Præterea si progressio arithmetica habeat post o unitatem, erunt Logarithmi hujusmodi potestatum exponentes. Sic 4 est Logarithmus 16, qui est quarta potestas ipsius 2, Id manifestè sequitur ex num. præcedenti.

22. In qualibet forma Logarithmorum, in quibus o sit Log. 1, locum habebunt hæc quatuor Theoremata.

1° $\text{Log.}(pq) = \text{Log.}\,p + \text{Log.}\,q$.

2° $\text{Log.}\,\frac{p}{q} = \text{Log.}\,p - \text{Log.}\,q$.

3° $\text{Log.}\,p^m = m\,\text{Log.}\,p$.

4° $\text{Log.}\sqrt[m]{p} = \frac{1}{m}\,\text{Log.}\,p$.

Horum theorematum sensus, ac vis est quæ sequitur.

23. Denotat primum æquari Logarithmum facti Logarithmis coefficientium simul sumptis. Sic quia $2 \times 8 = 16$, hujus numeri Logarithmus in progressione H æqualis est $1 + 3$, qui sunt Logarithmi numerorum 2 & 8. Facilis est demonstratio. Est enim $1 . p :: q . pq$. Ergo $\text{Log.}\,1 + \text{Log.}(pq) = \text{Log.}\,p + \text{Log.}\,q$ (per num. 18.), sed $\text{Log.}\,1 = 0$, ex hypothesi, ergo $\text{Log.}(pq) = \text{Log.}\,p + \text{Log.}\,q$.

24. Secundi theorematis sensus est: Logarithmum quoti æquari Logarithmo divisi, dempto Logarithmo divisoris. Sic quoniam $64 : 16 = 4$ erit $\text{Log.}\,4 = \text{Log.}\,64 - \text{Log.}\,16 = 6 - 4 = 2$. Etenim cum sit per regulam trium $q . 1 :: p . p : q$, erit $\text{Log.}\,q + \text{Log.}(p : q) = \text{Log.}\,1 + \text{Log.}\,p$, & delendo $\text{Log.}\,1$, qui in nostro casu est $= 0$, & auferendo utrinque $\text{Log.}\,q$, erit $\text{Log.}(p{:}q) = \text{Log.}\,p - \text{Log.}\,q$.

25. Tertium theorema est: Logarithmum potestatis cujuslibet numeri obtineri multiplicando per exponentem potestatis ipsius numeri Logarithmum. Sic si elevare velis numerum 4 ad tertiam potestatem, & hujus potestatis Logarithmum quæras, obtinebis

tinebis ducendo Log.4 in 3. Nempe Log. $4 = 2$, & $2 \times 3 = 6$, qui est Log.64; est autem 64 potestas tertia ipsius 4. Etenim potestates oriuntur ducendo numerum in se ipsum, quare hujus Logarithmus continuò sibi ipse adjicitur, ut novæ potestatis Logarithmus habeatur. Sic $a^2 = a \times a$, ac propterea Log. $a^2 =$ Log. $a +$ Log. $a = 2$ Log. a, eodemque modo $a^3 = a \times a \times a$, & Log. $a^3 =$ Log. a + Log. a + Log. $a = 3$ Log. a:

26. Quartum theorema est: Logarithmum radicis alicujus numeri haberi, si ejus Logarithmus per exponentem radicis dividatur. Sic Log. $\sqrt[3]{64} = 6:3$, hoc est Logarithmo 64 per 3 diviso, est autem quotus ex hac divisione emergens 2 Logarithmus ipsius 4, qui radix tertia est numeri 64. Demonstratio facile intelligitur ex superiorum theorematum demonstratione.

27. Hinc factum est, ut numerorum radices ab Arithmeticis tamquam quædam ipsorum potestates per exponentes fractos designentur, ut eodem pacto illas pertractare liceat, quo reliquæ numerorum potestates, quæ communiter hoc nomine designantur. Sic $\sqrt[3]{4}$ scribitur $4^{1:3}$; & $a^{2:3}$ denotat radicem cubicam quadrati ipsius a, & $a^{m:n}$ denotat radicem n ipsius a^m. Patet igitur quantitates radicales, sive numeros surdos ordinis diversi ad eumdem ordinem redigi, non aliter quam fractiones ad eumdem

dem denominatorem, id ipsum nempe efficiendo in eorum radicalium exponentibus fractis: quod ex num. 71. cap. 1. in hunc locum rejecimus. Sic si oporteat invicem multiplicare $\sqrt{a}$ & $\sqrt[3]{aa}$, cum id fieri nequeat, nisi prius ad eumdem ordinem redigantur, scribe pro $\sqrt{a}$, $a^{1:2}$, & pro $\sqrt[3]{aa}$, $a^{2:3}$ & revocando exponentes ad eumdem denominatorem habebis $a^{3:6}$, & $a^{4:6}$, sive $\sqrt[6]{a^3}$, & $\sqrt[6]{a^4}$, quorum factum est $\sqrt[6]{a^7}$, sive $a\sqrt[6]{a}$. Eadem ratione $\sqrt{2} = 2^{1:2}$ & $\sqrt[3]{6} = 6^{1:3}$, quibus ad eumdem ordinem redactis habebis $2^{3:6}$, & $6^{2:6}$, sive $\sqrt[6]{8}$, & $\sqrt[6]{36}$, quarum factum est $\sqrt[6]{288}$.

28. Si numerorum omnium Logarithmi haberi possent, supputandi rationem commodissimam haberemus. Multiplicatio enim additione perficeretur, divisio subtractione, & quælibet dati numeri potestas, vel radix multiplicatione aut divisione ejus Logarithmi inveniretur. Nunc autem cum omnes accurate haberi non possint, obtinentur quantum libuerit veris proximi continua mediorum proportionalium inquisitione. Sic multorum annorum labore supputati sunt Logarithmi pro omnibus numeris usque ad 100000. Sed hi sunt alterius cujusdam formæ, de qua mox dicemus.

29. In hac Logarithmorum forma, in qua unitati respondet o, integri numeri Logarithmos habebunt positivos, fracti negativos, ut facilè apparet in H,

in H, ex quo constat hoc theorema. Dato Logarithmo negativo, ut ejus numerus habeatur satis erit unitatem accipere per numerum divisam, cui idem Logarithmus, si positivus esset, responderet.

Nempe si fuerit $a = \text{Log.}b$, erit $-a = \text{Log.}\frac{1}{b}$; etenim $\text{Log.}\frac{1}{b} = \text{Log.}1 - \text{Log.}b = -\text{Log.}b$. Sic -3 est $\text{Log.}\frac{1}{8}$, quia 3 est Log.8.

30. Præterea si plures fuerint Logarithmorum series utcumque constitutæ, dummodo in omnibus Log.1 sit 0, erunt cujuslibet numeri logarithmi inter se, ut logarithmi cujuslibet alterius. Nam si ex. gr. Log.2. fuisset constitutus pro 1 quilibet alius numerus, cum numerorum sequentium Logarithmi æquabiliter crescant, tanto majores omnes reliqui obvenissent, quanto major primus assumptus esset.

31. Forma Logarithmorum commodissima, quæ nunc usurpatur est ea, in qua geometrica progressio in ratione decupla est 1, 10, 100, 1000 &c. Arithmetica verò 0, 1, 2, 3 &c. quamvis, ad habendos Logarithmos pro numeris intermediis, integris numeris decimales fractiones adjectæ sint, ut Logarithmi evaderent 0.0000 &c. 1.0000 &c. 2.0000 &c. Incredibili labore inventi sunt veris quam proximi Logarithmi numerorum, qui medii sunt inter 1 & 10, inter 10 & 100 &c. inquirendo medios proportionales veris quam proximos, & eorum Logarithmos. Sic ut haberetur Log.9 quæsitus est medius proportionalis inter 1 & 10, sive inter 1.0000000 & 10.

& 10.0000000, extrahendo ex 10.0 &c. radicem quadratam veræ proximam 3.1622777, cujus Logarithmus est dimidius Log.10. Et iste quidem numerus major est aliquanto quam 3, sed adhuc longè distat a 9. Itaque inter eum & 10.0 &c. iterum quæsitus est medius proportionalis extrahendo radicem numeri, qui oritur ducendo 10.00 &c. in 3.16 &c. & inventa est radix veræ quam proxima 5.6234132. Hic numerus paulo major est quam 5, & ejus Logarithmus habetur si summa Logarithmorum 10.00 &c. & 3.16 &c. bifariam dividatur. Sic continua inquisitione mediorum proportionalium inter duos numeros qui sint proximè majores vel minores quam 9, devenitur tandem ad numerum qui ne una quidem millionesima differat a 9, ejusque Logarithmus numero 9 attribuitur. Hoc artificio supputatæ sunt tabulæ Logarithmorum pro numeris naturalibus ab 1 usque ad 100000, sed hæ majoris formæ volumen implent. In libellis, qui vulgò solent circumferri, producuntur tabulæ usque ad 10000. Nos ad calcem Trigonometriæ post tabulas sinuum Logarithmos adjecimus ab 1 ad 1000, ne voluminis moles augeretur, & quod hi ad instituti nostri rationem satis essent.

32. Cœterum in tabulis supputandis non necesse est eam, quam innuimus, methodum adhibere, nisi in numeris primis. Nam in his, qui ex aliorum multiplicatione oriuntur, satis erit Logarithmos coefficientium addere, ut habeatur Logarithmus facti. Sic Log.15 = Log.3 + Log.5, & Log.27 = Log.3 + Log.9.

33. In

33. In hac Logarithmorum forma Log. numerorum ab o ad 10 habebunt o cum aliquot decimalibus adjunctis. Sic invenietur in tabulis Log. 3 = 0.4771213. At qui sequuntur a 10 usque ad 100 habebunt unitatem decimalibus auctam, & ita porrò. Sic Log. 15 = 1.1760913. Log. 171 = 2.2329961. Numerus ille integer decimalibus præfixus dicitur Logarithmi characteristica, & hoc habetur Theorema. Omnis quantitas, quæ designatur unitate, & quolibet cyphrarum numero, habet in Logarithmi characteristica tot unitates meris cyphris præfixas, quot ipsa cyphras. Sic Log. 1000000 = 6.0000000. Quilibet alius numerus tot habet pro characteristica unitates decimalibus præfixas; quot ipse notis constat unâ demptâ. Sic Log. 897 = 2.9527924.

34. Igitur ubi semel Logarithmi characteristica innotuerit, jam sciri potest quot notis ejus numerus constabit: id quod multoties percommodum accidit. Sic si scire velles ad quam perveniet quantitatem qui unitatem continuò duplicet per 64 vices, dicens nempe 1, 2, 4, 8 &c. satis erit notare eum esse perventurum ad sexagesimam tertiam potestatem binarii, quare ejus numeri Logarithmus æqualis erit 63 × Log. 2, seu 18.9648900. Jam vero si Logarithmus haberet post integras notas meras cyphras, constaret ejus numerus unitate & 18 cyphris, adeoque trillio esset: si vero haberet characteristicam 19, quam meræ cyphræ subsequerentur, esset una Trillionum decas: cum igitur inventus Logarithmus inter hos duos medius sit, & quidem propius accedens ad secundum, quam ad primum, etsi nondum de ejus numero constet, habes tamen Trillione

lione longe majorem esse, & ad denos Trilliones proximè accedere.

35. Cognita jam Logarithmorum natura, videndum superest quomodo dato numero ejus Logarithmus inveniatur, vel contra; & quomodo tabulæ ultra suos limites extendi possint. Quod ubi fecerimus alicujus problematis solutionem adjiciemus, quod sine Logarithmis esset ad solvendum difficillimum.

36. Si datus numerus integer est, eoque minor ad quem tabulæ pertingunt, inveniatur in ipsis tabulis Logarithmus numero appositus. Sic Log.257 = 2.4099331. Si fractionem adjunctam habeat, cape Logarithmum integri, & ejus differentiam a Logarithmo proximè sequente. Tum dic: si numerus integer augeretur unitate, ejus Logarithmus augeretur inventa differentia; cum ergo augeatur datis partibus unitatis, quanto major evadit ejus Logarithmus? id nempe invenies per regulam trium, & additum Logarithmo integri dabit Logarithmum compositi ex integro & fractis. Sic si quæratur Log.257.325, prome ex tabulis Log.258, & ex eo subtrahe Log.257, invenies differentiam 16866. Tantum nempe crevit Logarithmus, ubi numerus augetur unitate; at in nostro casu augetur non quidem 325 unitatibus (quod probè notandum est) sed 325 millesimis partibus unitatis, unde ita ille numerus tractari debet, ut fractio habens denominatorem 1000. Fac igitur $1 . 16866 :: \frac{325}{1000}$. ad quartum, quem minutiis contemptis invenies 5481.

Tan-

Tantum nempe crevit Log.257, ob additas numero fractiones datas, igitur Logarithmo 257 adde 5481, & habebis Log.257.325 = 2.4104812 quamproximè. Etsi enim Logarithmorum differentiæ numerorum differentiis non sint proportionales, tamen ab ea proportione tam parum aberrant in differentiis exiguis, cujusmodi hæ sunt, ut pro talibus haberi possint sine ullo sensibilis erroris periculo. Quod si commodius sit integrum numerum per fractionis denominatorem multiplicare, ut tota quantitas simul collecta fractio spuria evadat, commodius etiam invenietur ejus Logarithmus subducendo Logarithmum denominatoris a Logarithmo numeratoris per n.24. Sic si quæratur Log.$9 + \frac{1}{3}$ cum ea quantitas commodè redigatur ad spuriam fractionem $\frac{28}{3}$, a Log.28 aufer Log.3, & habebis Log.$9 + \frac{1}{3} = 0.9700367$.

37. Quod si numerus datus sit vera fractio, erit Logarithmus denominatoris major quam numeratoris; quare hic ab illo subtrahendus, & præfigendum differentiæ signum negativum, ut habeatur Log. numeri unitate minoris negativus, juxta num.29. Sic Log.$\frac{3}{25}$ = Log.3 — Log25 = 0.4771213 — 1.3979400 = — 0.9208187. Quod si fractio sit decimalis notandum est in ea subaudiri denominatorem constantem unitate, ac totidem cyphris quot sunt

sunt in ipsa notæ, itaque hujus denominatoris Logarithmum subtrahe a Log. numeratoris, & signum negativum differentiæ præfigens rem, ut supra, confeceris. Sic si quæratur Log. 0.194 aufer Log. 194 a Log. 1000 (hic enim est denominator ejus fractionis) & habebis Log. 0.194 = − 0.7121983.

38. At si numerus detur major iis, qui in tabulis continentur, ejus Logarithmum vero proximum sic invenies. Ex numero dato tot notas puncto interjecto reseca, quot opus est, ut non plus valeat, quam qui in tabulis continentur. Tum ejus Log. inquires non aliter quam si ex integris & decimalibus constaret, uti factum est in num. 36. Logarithmi sic inventi characteristicam tot unitatibus auge, quot in dato numero notæ pro decimalibus sunt habitæ, & habebis Log. quæsitum. Quæratur exempli gr. Log. 257325. Punctum insere post 257, ut fiat 257.325. Ejus Log. invenies ut supra 2.4104812; & quia tres notæ ab integro resectæ sunt, & pro decimalibus habitæ, adde 3 hujus characteristicæ, & habebis Log. 257325 = 5.4104812. Operationis ratio facile intelligitur, etenim dum integri numeri notas aliquas ad ordinem decimalium deprimis, perinde facis, ut si illum divideres per numerum constantem unitate & totidem cyphris, quot sunt depressæ notæ. Sic in nostro casu est 257.325 = 257325:1000. Redibit autem numerus ad priorem quantitatem, si per eumdem numerum illum multiplices, per quem divisus est, eritque 257.325 × 1000 = 257325; quare Log. 257325 = Log. 257.325 + Log. 1000 (per n. 23); sed Log. 1000 = 3.0000000, & in genere loquendo Log. numeri constantis unitate

tate & meris cyphris totidem unitates habet pro characteristica, quot numerus cyphras, ergo &c. Sic si daretur num. 25732.5, cum duas tantum ex integro notas ad decimales deprimere necesse sit; perinde erit ut si illum divideres per 100, quare invento Log. 257.325 ut antea, ejus characteristica duabus tantum unitatibus augenda esset, & haberetur Log. 25732.5 = 4.41048 12.

39. Notandum tamen, quod si datus numerus ita numeros tabularum excedat, ut plusquam duplo plures notas habeat, Logarithmi hac methodo inventi, non satis erunt accurati, cum proxima sit, non accurata, ea proportio, in qua regulæ trium usus innititur. Quare in his casibus satius est tabulas consulere, quæ ad numeros majores pertingunt: aut, si numerus ex his componitur, qui habeantur in tabulis, coefficientium Logarithmos in unam summam colligere.

40. Et hactenus quidem dato numero ejus Logarithmus quæsitus est. Superest, ut dato Logarithmo numerus investigetur. Si Logarithmus datus in tabulis accuratus occurrat, numerum capies eidem adpositum. Sic si detur 2.7371926, illum facile invenies, si ductum sequaris characteristicæ & notarum proximè sequentium, numerus autem 546 eidem adscriptus, est ille qui quærebatur. Quod si datus Logarithmus accuratus in tabulis non occurrat, & tamen habeat characteristicam, quæ in illis contineatur; duos invenire licebit, quorum alter sit proximè major dato, alter proximè minor. Utrumque ex tabulis deprome cum numeris sibi respondentibus, & ex proximè majori aufer proximè

minorem; deinde hunc ipsum aufer a dato, & numero, qui proximè minori respondet adjice fractionem, cujus denominator sit prima illa differentia, numerator verò secunda, & sic habebis quæsitum numerum. Sic si proponatur Logarithmus 2.7375292, invenies in tabulis 2.7379873 proximè majorem, cui respondet numerus 547, & 2.7371926 proximè minorem, cui respondet 546. Aufer hunc & a proximè majori, & a dato Logarithmo, habebisque geminas differentias, 7947 & 3366, ex his fractionem compone adjiciendam numero 546, & habebis numerum quæsitum $546 + \frac{3366}{7947}$. Operationis ratio est, quia numerorum differentiæ sunt differentiis Logarithmorum quamproxime proportionales. Igitur ut 7947 (quæ est differentia Log. in tabulis existentium) ad 1 (quæ est differentia numerorum illis respondentium) ita 3366 (differentia Log. proxime minoris a dato) ad differentiam, qua numerus dato Log. respondens excedit minorem numerum 546.

41. Fractio inventa facile revocatur ad decimales numeros dividendo numeratorem quot opus fuerit cyphris auctum per denominatorem, & contemptis tenuioribus minutiis, si quotus accuratus haberi nequit. Sic in nostro casu fractio evadet 0.4235, & numerus Log. dato respondens 546.4235.

42. Si dati Logarithmi characteristica tabularum canonem excedit, jam primum constabit quot notas quæsitus numerus habere debeat, totidem nempe, quot characteristica unitates, ac præterea unam. Ut autem inveniri possit ejus characteristica tot uni-

tatibus

tatibus mulctanda est, quot opus fuerit, ut in tabulis possit inveniri. Logarithmus ita depressus inquiratur in canone, & si accuratus occurrat, numerus ei respondens tot cyphris auctus, quot unitates e characteristica ademptæ sunt, erit quæsita quantitas. Quod si accutatus non invenitur sumantur proxime major, & minor, & exinde, ut supra factum est, quærantur notæ decimales adjiciendæ numero, qui Logarithmo proxime minori respondet. Curandum est autem, ut totidem saltem per divisionem eliciantur, quot unitates a characteristica dati Logarithmi ademptæ sunt. Nam si tot ejusmodi notæ integro illi numero adjectæ jam pro integris habeantur, habebitur simul quæsita quantitas. At si characteristica fuerit plus quam duplo major ea, quæ in tabulis maxima occurrit, inventus numerus in ultimis notis accuratus non prodiret hac methodo ob rationem in re simili supra adductam.

43. Ex. gr. detur Logarithmus 5.7375292, & tabulis utaris his elementis adjectis. Mulctanda erit characteristica 3 unitatibus, ut fiat 2.7375292. Inventus est supra hujus Logarithmi numerus 546.4235. Tres ex his decimalibus notis ad integros redigantur, eritque quæsitus numerus 546423.5. Si datus Logarithmus fuisset 4.7375292, numerus ei responderet 54642.35: Si 3.7375292; 5464.235. Ac demum si datus Logarithmus idem fuisset accuratè ac Log. 546, fuisset quæsita quantitas 546000, & sic de reliquis. Operationis ratio facilè intelligitur, nam dum dati Logarithmi characteristicam aliquot unitatibus imminuimus, perinde facimus ut si numerum ei respondentem per numerum divide-

remus unitate & totidem cyphris expressum quot sunt e characteristica sublatæ unitates. Quantitas igitur huic depresso Logarithmo respondens in eumdem numerum ducenda est, ut illa habeatur, quæ dato Logarithmo respondet.

44. Si Logarithmus datus fuerit negativus, quæratur positivi numerus, & hic unitati subscriptus fractionem dabit, quæ illi respondeat. Sic si detur -2.7371926, cum ei respondeat 546, erit quæsita quantitas $\frac{1}{546}$.

45. Artificii hactenus expositi utilitatem numquam satis Tyrones intelligent, nisi ubi se cœperint in Trigonometria exercere. Sed tamen vel ex hoc uno problemate poterunt ex parte conjicere. Fœnori det aliquis dena aureorum millia, ita ut 100 aureorum annuus fructus tres aurei sint. Quæritur quot anni requirantur ut sors cum suis fructibus, & fructuum quotannis crescentium fructibus ad 40 aureorum millia perveniat. Dicatur $100 = a$, $103 = b$, $10000 = c$, $40000 = d$, numerus annorum quæsitus $= x$. Erit in fine anni primi $a \,.\, b :: c \,.\, \frac{bc}{a}$.

Ineunte anno secundo sors est $\frac{bc}{a}$, & si fiat iterum $a.b::$ $\frac{bc}{a} \,.\, \frac{b^2 c}{a^2}$, hæc erit sors ineunte anno tertio, unde in ejus fine $a \,.\, b :: \frac{b^2 c}{a^2} \,.\, \frac{b^3 c}{a^3}$. Constat igitur, quod in fine annorum x, erit sors $\frac{b^x c}{a^x}$, & ex hypothe-

pothesi esse debet $\frac{b^x c}{a^x} = d$. Igitur (per n.24. 25.) x Log. b + Log. c — x Log. a = Log. d; & auferendo utrinque Log. c, erit x Log. b — x Log. a = Log. d — Log. c, ac demum $x = \frac{\text{Log. } d - \text{Log. } c}{\text{Log. } b - \text{Log. } a}$. Substitue datos valores litteris, & habebis $x = \frac{\text{Log.}40000 - \text{Log.}10000}{\text{Log.}103 - \text{Log.}100}$. Log.40000 habetur, si colligas in unam summam Logarithmos 40, & 1000, qui sunt ejus coefficientes; & Log. 10000, si Log. 1000 unitate augeas in characteristica. Sic erutis ex tabulis Logarithmis, habebis $x = \frac{4.6020600 - 4.0000000}{2.0128372 - 2.0000000} = \frac{0.6020600}{0.0128372} = 46.8$ &c. Itaque anni requiruntur 46, 9 menses, ac præterea aliquot dies, & unius diei partes in hujusmodi re contemnendæ, ut sors ad datam quantitatem eo fœnore augeatur.

46. Et hæc de progressionibus & Logarithmis satis dicta sint. Superest, ut aliquid etiam dicatur de proportione Harmonica.

CAPUT IV.

De proportione Harmonica.

1. SI tres fuerint ejusmodi numeri, ut sit primus ad tertium in eadem proportione geometrica, in qua est differentia primi & secundi ad differentiam secundi & tertii, hi numeri dicuntur harmonicè

proportionales. Sic 2 . 3 . 6 . sunt harmonicè proportionales, quia 2 . 6 : : 3 — 2 = 1 . 6 — 3 = 3.

2. Si fuerint tres numeri harmonicè proportionales, factum ex medio in summam extremorum, æquale est duplo producto ex ipsis extremis. Sic in adducto exemplo $(2 + 6) \times 3 = 2 \times (2 \times 6) = 24$. Facilè demonstratur, quia si fuerint a, b, c harmonicè proportionales, erit $a . c : : a - b . b - c$. Ergo multiplicando extremas & medias quantitates, erit $ab - ac = ac - cb$, & addendo utrinque $ac + cb$ erit $ab + cb = 2ac$; hoc est $(a + c) \times b = 2ac$.

3. Hinc datis extremis terminis medius invenitur, si fiat ut summa extremorum ad eorum alterum, ita duplum alterius ad quæsitum. Sic $2 + 6 . 2 : : 2 \times 6 . 3$, hoc est $8 . 2 : : 12 . 3$. Ratio est manifesta, erit enim $a + c . a : : 2c . b$.

4. Dato quoque extremorum altero una cum medio alter extremus invenietur, si fiat ut differentia dupli extremi dati a medio ad ipsum extremum datum, ita medius ad quæsitum. Sic $2 \times 2 - 3 . 2 : : 3 . 6$. Cum sit enim $ab + cb = 2ac$, si utrinque auferatur cb, habebitur $ab = 2ac - cb$, hoc est $2a - b . a : : b . c$.

5. Idem facilius obtinebitur ope alterius Theorematis vi cujus harmonica proportio ad continuam arithmeticam redigitur. Proportio nempe harmonica est inversa ratio continuæ arithmeticæ, & contra. Hoc est, si fuerint a, b, c harmonicè proportionales, erunt $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ in continua a-

rithme-

rithmetica ratione, & contra. Sic in exemplo adducto $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$, hoc est, reducendo fractiones ad eumdem denominatorem $\frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6}$ & rursus cum sint, 2, 4, 6 in continua ratione arithmetica, erunt $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ harmonicè proportionales, cum sit $\frac{1}{2} . \frac{1}{6} :: \frac{1}{2} - \frac{1}{4} . \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$; sive $\frac{6}{12} . \frac{2}{12} :: \frac{6}{12} - \frac{3}{12} : \frac{3}{12} - \frac{2}{12}$, hoc est $\frac{6}{12} . \frac{2}{12} :: \frac{3}{12} . \frac{1}{12}$. Facilis est demonstratio, cum sit enim primus terminus a, tertius c, erit medius $b = \frac{2ac}{a+c}$, ergo si per tres ejusmodi terminos unitas dividatur, habebitur $\frac{1}{a}$, $\frac{a+c}{2ac}$, $\frac{1}{c}$, ubi si addantur extremi termini $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{c}{ac} + \frac{a}{ac} = \frac{a+c}{ac}$, quantitas habetur dupla ipsius $\frac{a+c}{2ac}$. Ergo tres illi termini sunt arithmeticè proportionales.

6. Quod si tres fuerint ejusmodi quantitates, in quibus differentia primæ & secundæ ad differentiam secundæ & tertiæ sit ut tertia ad primam; dicentur esse hæ quantitates in proportione

ne Contraharmonica. Sic erunt contraharm
proportionales a, b, c, si fuerit $a - b \,.\, b - c$ ::
Facile ad hanc proportionem transferuntur
cumque de Harmonica dicta sunt.



ab.I. pag.96.

23.2406 . D

x.2)	(E	(Ex.6)
347 928 17 1292	M	39782 39690 P 92

(Ex.9)

47
08
76
0

42
16410
76 S 16842

.13)

2 \| 52 182
835

\| 52. 217 &c.

7	8	9	0
1 4	1 6	1 8	0
2 1	2 4	2 7	0
2 8	3 2	3 6	0
3 5	4 0	4 5	0
4 2	4 8	5 4	0
4 9	5 6	6 3	0
5 6	6 4	7 2	0
6 3	7 2	8 1	0

B
D

4
0
0
00
35
650
845
805



$\frac{2}{5}$ $\frac{3}{5}$ $\frac{4}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{1}{5}$	
(Ex.24)	(Ex.
638 16 478	12 4 24 494 51.
(Ex.33)	6

(Ex.17) .19)

	hc.	oct	
23. $\frac{2}{5}$	9.	6	
8. $\frac{4}{5}$	1.	5	
	0.	7	
14. $\frac{3}{5}$	8.	2	

.$\frac{2}{5}$
.$\frac{3}{5}$
.$\frac{4}{5}$
.$\frac{2}{5}$
.$\frac{2}{5}$

.24)

638
16
478

(Ex.25)

12. 35
4. 2
2470
4940
51.870

6. 23000
.65789
.57211

(Ex.33) 6|21|45.(292
4
221
176
4545
4401
14400
9964
443600
398784
44816



)

$\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}$

$\frac{4}{5}$

$\frac{2}{5}$

$\frac{1}{5}$

(Ex.24)	(Ex
	1
	-
638	2
16	49
478	51
(Ex.33)	(

ag.96.

)	(Ex.17)	.19)
. 2/5		inc. oct
. 3/5	23. 2/5	9. 6
. 4/5	8. 4/5	1. 5
. 2/5		0. 7
. 2/5	14. 3/5	8. 2

.24)	(Ex.25)	
		6. 23000
		65789
	12. 35	57211
	4. 2	
638	2470	
16	4940	
478	51.870	

(Ex.33) 6|21|45.(292

4
221
176
4545
4401
14400
9964
443600
398784
44816



6 . d
6 . d
6 . md
6 . md
4 . d
4
4
4 . d
. $\frac{d}{m}$
$\frac{d}{m}$

L

6 — 2
7 — 5

M 13 — 7

: m . n
: : p . q
: r . s

npr . nqs

. 2 : :
. 3 : :
. 5 : :
: : 14r) — (n+q+s)

4	A a :	18,6,3	
7	m :	6 . 3	
6	b :	18 . 6	
7	am :	18 . 3	

A



6 . d : L
6 . d 6 — 2
6 . md 7 — 5
6 . md

4 . d M 13 — 7
4
4
4 . d : m . n
: : p . q
. $\frac{d}{m}$: r . s
$\frac{d}{m}$ npr . nqs

. 2 : :
. 3 : :
. 5 : :

: : 14r) — (n+q+s)

4	A a :	18,6,3	
7	m :	6 . 3	
6	b :	18 . 6	
7	am :	18 . 3	

A

ELEMENTA SOLIDORUM.

1. 
UÆDAM, quæ admodum facile sine demonstrationibus intelliguntur, præmittemus, ut per se nota.

2. *Axioma* 1. Recta linea vel cum plano tota congruit, vel ipsi parallela est, quo casu æquidistat tota, vel ex altera parte ab ipso recedit, ex altera accedit, quo casu, si satis producatur, ipsum in unico puncto secabit.

Coroll. 1.

3. Si bina rectæ puncta cum plano quodam congruunt, congruit tota.

Coroll. 2.

4. Ejusdem rectæ pars in quodam plano, pars extra ipsum esse non potest.

Coroll. 3.

5. Binorum planorum intersectio est linea recta, cum recta ducta per bina quævis intersectionis puncta debeat jacere in utroque, per num. 3.

6. *Ax.* 2. Per quotvis puncta in directum jacentia, sive per quamvis rectam lineam infinita numero plana duci possunt.

7. *Ax.* 3. Per binas rectas sive concurrentes in aliquo puncto, sive parallelas inter se, ac per tria puncta non in directum jacentia, vel per tria cujusvis trian-

trianguli rectilinei latera planum semper duci potest, idque unicum.

8. *Ax*. 4. Bina plana vel parallela sunt, & semper æquidistant; vel ex una parte a se invicem recedunt, ex altera accedunt, & ex eadem satis producta debent se intersecare in recta quadam.

Coroll. 1.

9. Planorum inter se parallelorum intersectiones cum eodem plano sunt inter se parallelæ.

10. Cum enim plana illa parallela nusquam concurrant, illæ intersectiones nusquam concurrent.

Coroll. 2.

11. Binæ rectæ quæcumque GI, KM (Fig. 1.) a planis parallelis AB, CD, EF secantur in eadem ratione in H, & L.

12. Ducatur enim e puncto K recta parallela GI, occurrens planis CD, EF in N, O, & GK, HN, IO intersectiones planorum illorum parallelorum cum plano GKOI erunt parallelæ inter se (per num. 9.), ut & NL, OM intersectiones plani OKM cum iisdem. Quare in parallelogrammis KGHN, HNOI erunt latera KN, NO æqualia lateribus GH, HI. Est autem ob LN, MO parallelas KL ad LM, ut KN ad NO (pr. 12. Geom.); erit igitur etiam ut GH ad HI.

13. *Definitio* 1. Recta plano perpendicularis dicitur, cum est perpendicularis rectis omnibus in eodem plano ductis per concursum ejus rectæ cum ipso plano.

Coroll. 1.

14. Binæ rectæ, ut AC, BC (Fig. 2.) eidem plano in eodem puncto C ad eandem partem ductæ perpendiculares esse non possunt. 15. Si

15. Si enim ducatur planum per ipsas, id occurret priori plano in quadam recta DCE per num. 8. eritque tam angulus ACE, quam BCE rectus, nimirum totum æquale parti.

Coroll. 2.

16. Si bina plana fuerint eidem rectæ perpendicularia, erunt parallela inter se, & si binorum planorum parallelorum alteri perpendicularis sit quædam recta, erit & alteri.

17. Occurrat enim ea recta (F. 3.) binis iis planis in A, & B, & ducta quavis recta CBD in posteriore, ducatur per hanc planum CDEF, cujus intersectio cum priore sit EAF. Tum si AB est perpendicularis utrique plano, anguli ad A & B erunt recti, adeoque ipsæ AE, BD parallelæ (per cor. 1. def. 7. Geom.). Quare nulla recta posterioris plani occurret plano priori, & proinde plana ipsa nusquam concurrent. Si autem plana fuerint parallela, & recta AB perpendicularis priori, erit BD parallela AE per num. 9, adeoque AB, quæ continet angulos rectos cum AE, continebit etiam cum BD, eritque idcirco perpendicularis ad omnes rectas posterioris plani transeuntes per B, & proinde perpendicularis ipsi plano.

THEOREMA.

18. Si recta quædam AC (F. 4.) sit perpendicularis binis rectis BD, EF in quodam plano ductis per ejus concursum cum ipso plano, erit perpendicularis & reliquis omnibus, ac ipsi plano.

19. Ducatur enim quævis alia GCH, cui occurret alicubi in G recta occurrens binis datis hinc inde in B, E, captisque CD, CF æqualibus ipsis, CB, CE,

CE, ducatur FD, occurrens ipsi GH alicubi in H, tum considerentur septem paria triangulorum æqualium.

20. BCE, DCF ob angulos ad verticem C æquales, & latera CF, CD æqualia lateribus CB, CE per constructionem.

21. BCA, DCA ob angulos ad C rectos ex hypothesi, latera CB, CD æqualia per constructionem, & latus CA commune.

22. ECA, FCA pariter ob angulos ad C rectos, latera CE, CF æqualia, CA commune.

23. BAE, DAF ob latera singula singulis demonstrata æqualia, nimirum BE, FD num. 20., AB, AD num. 21, AE, AF num. 22.

24. BCG, DCH ob angulos ad verticem C æquales, CBG, CDH demonstratos æquales num. 20., latera CB, CD æqualia per constructionem.

25. ABG, ADH ob latera AB, AD demonstrata æqualia num. 21, BG, DH num. 24, angulos ABG, ADH num. 23.

26. ACG, ACH ob latera CG, CH demonstrata æqualia num. 24, AG, AH num. 25, & CA commune.

27. Quare & anguli ACG, ACH æquales erunt, & recta AC cuivis GH, adeoque toti plano perpendicularis. Q. E. D.

Coroll. I.

28. Si e quodam puncto C (F. 5.) cujusdam rectæ AC exeant tres rectæ CB, CD, CE ipsi perpendiculares, in eodem erunt plano.

29. Si enim ducto plano EH per binas CE, CD, tertia CB in eo plano non jaceat, ducto plano GC per ACB, quod priori occurret in aliqua recta CF; recta

recta AC perpendicularis binis CD, CE erit perpendicularis & ipsi CF. Quare angulus ACF rectus erit, & æqualis recto ACB, pars toti.

Coroll. 2.

30. Si recta CA (F. 6.) semper perpendicularis rectæ cuidam MN gyret circa ipsam immotam, producet planum ipsi perpendiculare.

31. *Si enim* ductis in ea superficie genita binis rectis ex C, ducatur quævis tertia, ea erit in eodem plano cum ipsis, cum nimirum omnes tres eidem MCN perpendiculares esse debeant.

Coroll. 3.

32. Per datum quodvis punctum potest duci planum perpendiculare datæ cuivis rectæ MN.

33. Sit primò punctum datum C (F. 7.) in ipsa recta, & ductis per eam binis planis, MQ, MO ducantur in iis ipsi MN perpendiculares CA, CB, & planum per ACB ductum erit per num. 18. perpendiculare rectæ MN perpendiculari binis AC, BC.

34. Quod si punctum datum sit A extra ipsam; ducatur AC ipsi perpendicularis, tum in quovis alio plano MQ per MN ducto, & non transeunte per A recta CB perpendicularis eidem MN, & pariter erit factum.

Coroll. 4.

35. E binis rectis parallelis AB, CD (F. 8.) si altera sit perpendicularis plano cuipiam, erit & altera, & si ambæ fuerint perpendiculares, erunt parallelæ.

36. In plano enim DA ducto per ipsas AB, CD, quod plano dato occurret in recta AC, ducatur CB ad quodvis punctum B in priore assumptum, tum in plano

plano dato recta CE perpendicularis CA, & æqualis AB, ac ducantur rectæ AE, BE.

37. Triangula CAB, ECA habentia angulos ad C, & A rectos, latus AC commune, latera AB, CE æqualia, habebunt & bases CB, AE æquales. Quare in triangulis BAE, ECB singula latera singulis æqualia, adeoque angulus BCE æqualis recto BAE (per prop. 4. Geom.). Cumque etiam ACE sit rectus, recta EC perpendicularis binis CA, CB erit perpendicularis etiam tertiæ CD per num. 18. Quare ipsa CD perpendicularis binis CA, CE erit pariter per num. 18. perpendicularis etiam toti plano dato ACEF.

38. Si autem ambæ fuerint perpendiculares, ducto plano BACD, erunt bini anguli BAC, ACD interni simul æquales duobus rectis, adeoque ipsæ parallelæ erunt. (per cor. 1. def. 7. Geom.)

Coroll. 5.

39. Rectæ FO, GQ (Fig. 7.) parallelæ eidem MN, licet non in eodem plano positæ, sunt parallelæ inter se.

40. Si enim per quodvis punctum C rectæ MN ducatur per num. 33. planum ACB ipsi perpendiculare, erit perpendicularis eidem tam FO, quam QG, per num. 35. Adeoque erunt inter se parallelæ per eund. num.

Coroll. 6.

41. Si binæ rectæ CD, CB (Fig. 9.) fuerint parallelæ, binis AE, AI etiam jacentibus non in eodem plano, continebunt angulos DCB, EAI ad easdem partes æquales.

42. Nam assumptis CB, CD ad arbitrium, tum

AE,

AE, AI ipsis æqualibus, ducantur CA, DE, BI, & quoniam CB, AI sunt parallelæ, jacent in eodem plano per num. 7. Quare cum & æquales sint; etiam rectæ CA, BI, quæ illas claudunt, erunt & æquales & parallelæ, & eodem argumento DE, CA parallelæ erunt, & æquales. Hinc & DB, EI, quæ illas claudunt, erunt æquales, & parallelæ. Igitur in triangulis DCB, EAI habentibus singula latera singulis æqualia, erunt anguli ad C & A æquales.

Coroll. 7.

43. Si bina plana IACB, EACD se invicem secantia in recta quadam AC secentur utcumque binis planis DCB, EAI parallelis inter se, anguli DCB, EAI ab intersectionibus contenti ad easdem partes erunt æquales.

44. Nam intersectiones CD, AE, & CB, AI singulorum planorum cum planis parallelis erunt inter se parallelæ per num. 9.

Coroll. 8.

45 Dato puncto vel extra datum planum, vel in ipso, poterit duci recta ipsi plano perpendicularis, eritque unica.

46. Si punctum sit A extra datum planum (Fig. 10.), ducta quavis recta MN in plano dato, ducatur ex A perpendiculum AB in ipsam; tum BC eidem MN perpendicularis in plano dato, in quam ex A ducatur perpendicularis AC, quæ erit perpendicularis plano dato.

47. Nam in primis erit per num. 18. MN perpendicularis plano AIBC cum sit perpendicularis rectis BA, BC. Quare si ducatur recta DCE parallela MBN, erit & ipsa perpendicularis eidem plano per num. 35.,

num. 35., adeoque etiam perpendicularis erit rectæ AC. Cumque ipsa AC sit etiam perpendicularis rectæ CB per constructionem, erit perpendicularis toti plano dato MNED per num. 18.

48. Quod si detur punctum B in ipso plano, assumatur punctum quodcunque A extra ipsum, & ducatur perpendicularis AC. Tum in plano BCAI ex B recta BI parallela rectæ CA, quæ pariter erit eidem plano perpendicularis per num. 35.

49. Si autem essent binæ rectæ ut AB, AC eidem plano perpendiculares ex eodem puncto A extra planum posito; anguli ABC, ACB in eodem triangulo ABC essent recti, quod est absurdum. Unica igitur ex eodem puncto extra planum assumpto duci potest. Unicam vero duci posse e puncto posito intra planum patet ex num. 14.

Coroll. 9.

50. Per datum punctum, vel per datam rectam dato plano parallelam duci poterit planum plano ipsi parallelum.

51. Si enim detur punctum C (Fig. 9.), demissa CA perpendiculari in planum datum, ducantur in eo binæ AE, AI ad arbitrium, tum CB, CD iis parallelæ, & planum DCB erit parallelum plano dato.

52. Erit enim CA perpendicularis rectis AE, AI per num. 13., adeoque & rectis CB, CD, nimirum per num. 18. plano DCB, quod idcirco erit parallelum plano EAI per num. 16.

53. Si autem detur linea parallela plano dato, assumpto in ea quovis puncto C, & ducto per C plano parallelo plano dato, debebit recta illa data jacere in hoc plano; si enim ex eo exiret, vel accederet ad planum datum, vel ab eo recederet.

Co-

Coroll. 10.

54. Si binæ rectæ CA, CB (Fig.7.) coeuntes in quodam puncto C binis aliis DE, DH coeuntibus in D parallelæ sint, nec in eodem plano jaceant, planum per illas ductum erit parallelum plano ducto per has.

55. Nam e puncto C demisso perpendiculo CN in planum *EI*, in quo jacent DE, DH, ducantur NO, NQ parallelæ ipsis DE, DH, quæ proinde erunt per num.59. parallelæ etiam ipsis CA, CB. Erunt autem per num.13. anguli CNQ, CNO recti. Quare & NCB, NCA recti erunt, & proinde planum ACB perpendiculare rectæ CN per num.18, cui cum perpendiculare sit ONQ, erunt ea plana inter se parallela per num.10.

56. *Def.*2. Angulum binorum planorum se in quadam recta intersecantium dico, inclinationem plani ad planum, quam metitur angulus rectilineus contentus ab intersectionibus plani perpendicularis communi intersectioni eorumdem planorum, qui si fuerit rectus, dico planum plano perpendiculare.

Coroll. 1.

57. Si in binis planis CI, AD (Fig.9.) e quovis puncto C mutuæ intersectionis CA ducantur binæ rectæ CB, CD perpendiculares ipsi intersectioni, angulus rectilineus DCB erit mensura inclinationis planorum.

58. Erit enim per num.18 planum BCD perpendiculare intersectioni CN perpendiculari ad binas CB, CD existentes in eo plano.

Coroll. 2.

59. Ad quamvis rectam cujusvis plani duci po-

test planum cum eo continens angulum æqualem dato.

60. Si enim sit recta CA plani DCAE, & ducatur in eodem plano CD ipsi perpendicularis, tum in plano perpendiculari ipsi rectæ CA recta CB continens angulum DCB æqualem dato, erit BCAI quæsitum planum.

Coroll.3.

61. Si planum plano insistit duos angulos efficit hinc inde simul æquales duobus rectis, & si bina plana se intersecant, angulos ad verticem oppositos æquales continent.

62. Id enim accidit in rectis omnibus, adeoque etiam in illis, quæ sunt communes intersectiones eorum planorum cum plano perpendiculari ad communem illorum intersectionem.

63. *Scholion*. Eodem pacto ubi planum incidit in bina plana parallela, habebuntur in eorum angulis illa omnia, quæ habentur in rectis lineis, ubi recta incidit in binas rectas parallelas.

Coroll.4.

64. Planum transiens per rectam alteri plano perpendicularem est ipsi perpendiculare.

65. Sit enim recta AC (Fig. 10.) perpendicularis plano EDMN, quod a plano ACBI per ipsam ductum secetur in recta BC. Ducatur DE in plano DN perpendicularis ad BC, & quoniam ipsa BC est etiam perpendicularis rectæ CA, erit per num. 18. totum planum ACD ipsi perpendiculare; ac proinde angulus ACD erit mensura inclinationis planorum BD, CI per num. 56., qui cum sit rectus, erunt ea plana sibi invicem perpendicularia.

Co-

Coroll.5.

66. Si bina plana sibi invicem perpendicularia fuerint, recta uni ex iis perpendicularis per intersectionem ducta jacebit in altero, recta intersectioni perpendicularis ducta in altero erit alteri perpendicularis, recta alteri perpendicularis ducta ex quovis alterius puncto jacebit in hoc posteriore, & in communem intersectionem cadet.

67. Sit enim primo communis intersectio BC; (Fig. 10.) & secentur illa plana plano perpendiculari ipsi intersectioni, cujus plani intersectiones cum illis planis sint CA, CD. Erit CA perpendicularis ad CB per num. 13, & angulus ACD inclinatio planorum pariter rectus per num. 56. Quare CA erit perpendicularis plano DN per num. 18, ac proinde e quovis puncto intersectionis C educta recta ipsi plano DN perpendicularis debet per num. 14. congruere cum ipsa CA, jacente nimirum in plano BA.

68. Pariter cum CA sit perpendicularis plano DN, & intersectioni BC, ac jaceat in plano BA; quævis recta intersectioni perpendicularis ducta in plano BA ex quovis puncto A congruet cum CA, & proinde erit perpendicularis plano ND.

69. Demum recta ex quovis puncto A plani BA perpendicularis plano DN debet per num. 45. congruere cum AC, adeoque jacere in plano BA.

Coroll.6.

70. Planorum eidem plano perpendicularium intersectio est ipsi perpendicularis.

71. Nam recta ipsi plano perpendicularis educta ex eo ipsius puncto, in quo se intersecant illa bina

plana, debet jacere in utroque ex ipsis per num.66; ac proinde debet congruere cum communi eorum interfectione.

Coroll.7.

72. Per quodvis punctum, vel quamvis rectam plano perpendicularem infinita plana duci possunt eidem plano perpendicularia.

73. Nam per quodvis datum punctum duci potest recta AC (Fig. 10.) perpendicularis dato plano per n.45, in quo duci poterunt ex ejus puncto C infinitæ rectæ CB, & omnia plana ACBI transibunt per punctum datum, ac per rectam AC, & erunt perpendicularia plano dato per num.64.

Coroll.8.

74. Per bina puncta non jacentia in recta plano perpendiculari, vel per rectam ipsi non perpendicularem semper potest duci planum plano perpendiculare, idque unicum.

75. Sint ea puncta A, I (Fig. 10.) vel recta AI; ex altero eorum puncto A, vel e quovis puncto A rectæ ejusdem duci poterit AC perpendicularis illi plano per num.45, & planum ACBI transiens per ea puncta, vel per eam rectam erit perpendiculare plano dato per num.64.

76. Quoniam autem recta AC perpendicularis plano dato, debet jacere in quovis plano ipsi perpendiculari transeunte per A per num.66, ac unicum planum duci potest per puncta CAI non in directum jacentia per num.7; unicum planum duci poterit dato plano perpendiculare transiens per puncta A,I, vel per rectam AI.

Co-

Coroll.9.

77. Si recta non fuerit perpendicularis plano dato, & per eam ducatur planum ipsi plano perpendiculare, efficiet ipsa recta cum communi interse-ctione angulum hinc acutum, inde obtusum, & ille erit minimus, hic maximus omnium angulorum, quos ea efficit cum rectis in plano dato ductis per ejus occursum cum ipso plano, ac quo magis recta ex occursu ducta recedet hinc inde a recta minimum continente, ac accedet ad rectam continentem maximum, eo majorem angulum continebit cum recta illa data, & semper bini, sed bini tantum hinc inde æquales erunt, iique recti fient, ubi recta in plano dato jacens fuerit illi intersectioni perpendicularis.

78. Sit enim ejusmodi recta AB (Fig.11.): intersectio plani perpendicularis plano dato cum ipso plano dato sit DBE in quam cadet perpendiculum AC per num.66, eritque angulus ACB rectus, ac proinde ABC acutus, & ABE obtusus.

79. Centro B sit in plano dato circulus DGEF: & quoniam quævis CG erit major, quam CD, & minor quam CE (quod facile dem. per Coroll.2. prop.8. Geom.), recta autem AC communis est triangulis rectangulis ACD, ACG, ACE; ac proinde quadrata AG, AD, AE singula æqualia quadratis singulis CG, CD, CE conjunctis cum quadrato AC, erit AG major quam AD, & minor quam AE. Quare in triangulis ABG, ABD, ABE habentibus latus AB commune, latera BG, BD, BE æqualia, angulus ABG erit major quam ABD, & minor quam ABE (per Coroll. 3. prop. 8.); ac proinde ille minimus, hic maximus omnium, quos recta BA con-

continere potest cum rectis in plano dato ex B ductis.

80. Cum vero quo magis punctum G recedit a D, & accedit ad E, eo magis crescat CG, adeoque AG, & binæ semper, sed binæ solæ hinc inde CG, CF, adeoque & AG, AF inter se æquales haberi possint, etiam quo magis BG recedet a BD, vel accedet ad BE, eo magis crescet angulus ABG, & bini semper, sed bini soli hinc inde ABG, ABF æquales erunt inter se.

81. Demum si HBI fuerit perpendicularis ad DE, erunt anguli CBH, CBI recti, & BH, BI æquales, adeoque æquales etiam CH, CI, & proinde etiam AH, AI, ac anguli ABH, ABI, qui proinde recti erunt.

Scholion.

De Angulis Solidis.

82. Hic de angulis solidis agendum esset, qui nimirum continentur pluribus angulis planis in apicem unicum coeuntibus. Sed quoniam minus necessaria sunt, & potissimus eorum usus est ad figuras regulares solidas determinandas, ac describendas, quæ itidem exigui sunt usus, ea hic innuemus tantummodo.

83. Angulus solidus facile concipitur, si ex omnibus angulis B, C, D, E (Fig. 12.) poligoni cujuscunque rectilinei ad quodvis punctum A positum extra ejus planum ducantur rectæ. Consurget in A angulus solidus constans tot angulis planis, quot sunt poligoni latera.

84. Cavendum tamen illud, ut in poligono omnes anguli ex parte interna computati sint minores duobus rectis, nimirum ut nusquam latera CB, FB (Fig. 14.) introrsum inflectantur versus poligonum respe-

respectu rectæ jungentis angulos contiguos; eo enim casu etiam facies anguli solidi introrsum inflecterentur, ac ejusmodi anguli solidi considerari non solent, ubi eorum proprietates generaliter demonstrantur, ut & ejusmodi poligona pariter considerari non solent.

85. Generaliter de angulis solidis hæc demonstrantur. Omnes anguli plani angulum solidum constituentes simul sumpti minores sunt quatuor rectis. Id facile intelligitur hoc pacto. Si angulus ille solidus apprimendo verticem A versus poligonum DCBE (*Fig.* 12. 15.) debeat complanari, oporteret aperiri aliquod latus, ut AD, & figura 12 abiret in 15, in qua omnes anguli plani circa A pertinentes ad priorem angulum solidum simul cum apertura nova DAD constituent quatuor rectos, adeoque omnes simul sunt quatuor rectis minores. Id vero Tyronibus ope anguli solidi e charta efformati admodum facile ostenditur.

86. Ad datum punctum datæ rectæ potest efformari angulus solidus æqualis dato. Si enim sit *ad* (Fig. 12. 13.) recta data fiat angulus *dac* æqualis DAC, tum planum *cab* faciens cum *cad* angulum æqualem illi, quem CAB continet cum CAD per num. 59, & in eo angulus *cab* æqualis CAB, & ita porro, donec deveniatur ad rectam *ae* respondentem AE proximæ primæ illi AD, & reliquus angulus planus *ead* reliquo EAD, ac totus angulus solidus *a* angulo solido A æqualis erit.

87. Patet enim ex ipsa constructione debere & plana planis, & rectas rectis congruere, si superponantur.

88. Ex quotcumque autem angulis planis poterit semper angulus solidus constitui, dummodo & omnes simul minores sint quatuor rectis & quivis ex iis minor sit reliquis simul sumptis.

89. Si enim (Fig. 15.) ducantur utcumque binæ rectæ AD, AD æquales, tum incipiendo ab altera semper versus eandem plagam ducantur rectæ AE, AB, AC, quotcunque, & in quibuscunque angulis, qui nimirum omnes simul quatuor rectos non adæquabunt, facile concipitur elevari posse punctum A, inclinando eorum plana ita, ut demum rectæ AD, AD congruant, & exsurgat angulus solidus, præter casum, quo aliquis ex angulis illis planis major esset reliquis omnibus simul sumptis, vel iis æqualis; nam reliqui omnes applicarentur illi uni ita, ut in primo casu, rectæ AD, AD ad se invicem non pertingerent, in secundo pertingerent tantum in ipsa applicatione reliquorum ad illum unum.

90. Et quidem si anguli plani essent tantum tres, unicus ex iis angulus solidus componi posset, ut ex tribus rectis unicum triangulum componitur. Si enim essent tres ejusmodi anguli; CAB, BAE, EAD, & immoto BAE converterentur reliqui CAB, EAD circa rectas BA, EA; rectæ AC, AD in unico situ sibi invicem occurrerent, & angulum solidum constituerent. At ubi plures sunt anguli, immoto uno, ut CAB possunt reliqui moveri nihil mutatis magnitudine angulis planis ad A, sed mutata eorum positione, sive inclinationibus planorum in rectis AC, AB, AE, AD prorsus ut in quavis Figura rectilinea pluribus, quam tribus lateribus constante im-

moto uno latere, possunt moveri reliqua, nihil mutata eorum magnitudine, sed mutatis solum inclinationibus, sive angulis.

91. Porro hæc omnia Geometrico rigore demonstrari non possunt sine fusiore apparatu: admodum autem facile ostenduntur Tyronibus ope angulorum solidorum e charta efformatorum. Sunt & alia quædam circa ipsas inclinationes planorum in angulo solido multo difficiliora demonstratu, ut illud, omnes angulos, quos plana angulorum planorum continent cum planis contiguis esse simul minores totidem rectis, quot exprimit duplus angulorum planorum numerus, sed ab ea mensura semper minus deficere, quam quatuor rectis. Id autem in Trigonometria spherica maximum usum habere potest. Nam ubi consideratur triangulum sphæricum, revera consideratur angulus solidus ad centrum sphæræ constitutus, cujus anguli plani sunt ipsa latera trianguli sphærici, & inclinationes planorum sunt anguli ejusdem trianguli sphærici. Ac proinde hinc consequitur, in quovis triangulo sphærico tres angulos simul & minores esse sex rectis, & majores duobus, ut e superioribus illud deducitur semper in eodem bina latera simul superare tertium.

92. Dixi usum angulorum solidorum maximum esse pro figuris solidis regularibus clausis faciebus planis, quæ dicuntur *poliedra* regularia, seu corpora regularia. Regularia autem dicuntur, quotiescumque & facies omnes æquales habent rectilineas, ac regulares. Ea non posse esse plura quam quinque, sic e superioribus deducitur. Quivis angulus solidus debet constare angulis planis, qui simul

sint

sint minores duobus rectis: non potest autem constare paucioribus quam tribus. Jam vero trianguli æquilateri angulus quivis continet gradus 60, quadrati 90, pentagoni 108, exagoni 120, reliquorum poligonorum majores sunt. Porro tres anguli exagoni jam continent gradus 360, adeoque non possunt constituere angulum solidum, & multo minus ipsum constituent anguli poligonorum plura latera habentium. Tres anguli pentagoni continent gradus 324, & quatuor 432, quadrati autem tres 270, quatuor 360. Quare utrobique e tribus ejusmodi angulis planis angulus solidus constare potest, e quatuor non potest. Trianguli vero æquilateri 6 anguli continent 360, adeoque e sex ejus angulis componi non potest angulus solidus, potest autem e quinque, quatuor, vel tribus. Quare angulorum solidorum pro poliedris regularibus quinque tantum species esse possunt, eorum nimirum, qui constituuntur tribus angulis pentagonorum, quatuor quadratorum, tribus, vel quatuor, vel quinque triangulorum æquilaterorum.

93. Porrò demonstrarunt Veteres, & Euclides id libro 13 persequitur, poliedrum regulare componi e pentagonis 12, e quadratis sex, quo casu est cubus, e triangulis quatuor, ubi terni in apicem coeunt, quo casu est pyramis, vel octo, ubi coeunt quatuor, vel 20, ubi coeunt quinque, & cuivis ex iis corporibus sphæra inscribi potest, quæ omnes ejus facies contingat, vel circumscribi, quæ per omnes ejus angulos transeat. Sed ea minoris sunt usus, & hic innuisse suffecerit.

Def. 3.

94. *Def.3.* Figura solida habens pro basi figuram rectilineam, e cujus singulis angulis extra ejus planum consurgant lineæ æquales, & parallelæ terminantes ejus faciem rectilineam dicitur *Prisma*, quæ basis si fuerit parallelogrammum, prisma dicitur Parallelepipedum, ac si omnes facies fuerint quadratæ dicitur Cubus. Si autem rectæ illæ in apicem coeunt, solidum dicitur Pyramis.

95. Prisma super basi pentagona ABCDE exhibet Fig. 16. pyramidem Fig. 18.

Coroll. 1.

96. Quævis sectio prismatis, vel pyramidis facta plano basi parallelo est figura prorsus similis basi, & in prismate æqualis, in pyramide habens latera homologa minora in ratione distantiæ ipsius a vertice ad distantiam basis ab eodem.

97. Sit enim ejusmodi sectio LPONM (Fig. 16.) & per num. 9. singula ejus latera erunt parallela singulis lateribus basis, cum sint intersectiones planorum parallelorum cum iisdem planis. Quare & singuli anguli LPO, PON &c. erunt æquales singulis ABC, BCD &c. per num. 41.

98. Præterea in prismate facies LABP, PBCO &c. erunt parallelogramma, & proinde latera LP, PO &c. æqualia lateribus AB, BC &c. adeoque sectio LPONM prorsus æqualis basi ABCDE.

99. In pyramide vero (Fig. 18.) similia erunt triangula LFP, AFB, & LP ad AB, ut FL ad FA, vel ut FP ad FB, & ita reliqua omnia latera PO, ON &c. ad BC, CD &c. erunt in ratione FP ad FB,

FO

FO ad FC &c. (per Pr. 12. Geom.) quæ erit semper eadem ratio, ut FP ad FB est eadem ac FL ad FA. Quare sectio LPONM erit similis basi ABCDE, & ratio laterum eadem, ac ratio distantiarum a vertice F.

Coroll. 2.

100. Prisma terminatur altera basi parallela, opposita, ac æquali priori, & faciebus lateralibus parallelogrammis.

101. Si enim planum sectionis parallelæ basi concipiatur transire per extremum punctum F rectæ AF (Fig. 16.), in quod abeat L, reliqua sectionis puncta BCDE abibunt in KIHG, cum omnes BP, CO &c. æquales sint AL, & omnes BK, CI &c. æquales AF. Erit igitur figura FKIHG æqualis ABCDE, & ipsi parallela, ac facies ABKF, BCIK &c. erunt parallelogramma.

Coroll. 3.

102. Prismatis, cujus latera rectilinea sunt basi perpendicularia, superficies demptis basibus est productum ex perimetro basis in unum e lateribs rectilineis: pyramidis autem habentis omnia latera rectilinea æqualia, & latera basis pariter æqualia est dimidium productum ex perimetro basis ducta in perpendiculum demissum e vertice in quodvis latus perimetri ipsius basis.

103. Nam in prismate (Fig. 16.) singulæ facies, ut GEDH, sunt in eo casu rectangula contenta sub singulis lateribus basis ut ED, & singulis lateribus rectilineis ut EG. Adeoque summa omnium ejusmodi rectangulorum est tota perimeter basis ducta in ejusmodi latus rectilineum.

104. At

104. At in pyramide (Fig. 18.) si omnia latera basis sunt æqualia inter se, & latera rectilinea ipsius pyramidis pariter inter se æqualia, erunt omnes facies triangula isoscelia æqualia, & singulorum mensura erit dimidium productum ex latere AE basis ducto in suum perpendiculum FZ, quæ perpendicula erunt omnia æqualia. Quare pariter summa omnium æquabitur dimidio producto ex tota perimetro basis, & uno quovis ex ejusmodi perpendiculis.

Coroll. 4.

105. Pyramidis ejusmodi truncatæ plano parallelo basi, superficies reliqua versus basim æquatur producto ex semisumma perimetrorum basis, & sectionis ducta in distantiam perpendicularem laterum parallelorum basis, & sectionis earumdem.

106. Si enim eadem FZ occurrat lateri LM in Y, trapezii ALME, mensura erit semisumma LM, AE ducta in YZ, cum nimirum resolvatur in bina triangula ALM, AME, quorum bases ML, AE, & altitudo communis YZ distantia perpendicularis ipsarum basium parallelarum, adeoque singulorum triangulorum mensura sit dimidium productum ex singulis basibus, & ipsa YZ.

Coroll. 5.

107. Omnia prismata collata inter se, ut & omnes pyramides inter se collatæ, si super basibus æquales areas habentibus, & inter eadem plana parallela constituantur, æqualia spatia solida comprehendunt.

108. Secentur enim planis quotcunque parallelis basibus (Fig. 16., 17., 18., & 19.), & sectiones,

LPONM,

LPONM, QRSTV unius prismatis, vel pyramidis, æquales erunt semper sectionibus respondentibus *lpo*, *qrs* alterius. Nam in prismate omnes erunt æquales eidem basi, in pyramide erunt ipsi similes, & singula latera respondentia LP, *lp* erunt ad latera homologa AB, *ab* in ratione eadem, nimirum in ratione FL ad FA, & *fl* ad *fa*, quæ rationes erunt eædem per num. 11., cum puncta F, *f* terminentur ad planum parallelum plano basium, & sectionis. Ea autem solida concipi possunt composita ex iis omnibus superficiebus, quarum singulæ cum singulis æquales sint, erunt & ipsa solida æqualia.

Scholion.

De methodo indivisibilium, & infinitesimali.

109. Hæc ratio demonstrandi dicitur methodus indivisibilium Cavalleriana, quam nimirum Cavallerius invenit primus, eaque cum successu est usus, concipiendo lineas compositas e punctis, superficies e lineis, solida e superficiebus. Revera linea producitur motu continuo puncti, superficies motu continuo lineæ, solidum motu continuo superficiei, & linea e lineolis, non e punctis, superficies ex areolis, non e lineis, solidum ex spatiolis solidis, non e superficiebus componitur. Hinc fieri potest, ut hæc methodus aliquando in errorem inducat. Sic si bina rectangula FAEG, *f*AE*g* (Fig. 20.) non in eodem plano posita terminarentur ad binas rectas F*f*, G*g* perpendiculares plano prioris; rectangulum posterius esset longius priore in ratione rectæ E*g* subtendentis angulum rectum EG*g* ad EG latus trianguli rectanguli, cum nimirum communis altitudo esset

eſſet EA, & tamen ſectiones LM, *lm* eſſent æquales eidem AE, adeoque & inter ſe.

110. Eam Guldinus difficultatem Cavallerio objecit, qui reſpondit: in hoc caſu lineas, a quibus eæ ſuperficies veluti contexuntur, eſſe utrobique æquales, ſed textum ipſum rariorem in ſecundo rectangulo. Si enim fiat ſecunda ſectio QV*uq* admodum proxima priori, bina fila QV, *qu* erunt æqualia inter ſe, ſed *qu* ab *lm* remotius, quam QV ab LM. Suam autem methodum tunc ſolum procedere, cum præter æqualitatem ſectionum, e quibus figura conſtare concipitur, etiam binarum quarumque inter ſe proximarum diſtantiæ æquales ſint.

111. Et quidem ſi methodus cum hac animadverſione adhibeatur, nunquam in errorem inducet, & in quamplurimis caſibus ejus ope invenientur æqualitates, quæ ægre per longiſſimas ambages methodo a veteribus adhibita invenirentur. Ut methodi fundamentum pateat, concipiantur parallelogrammata AG, *ag* (Fig. 21.) conſtituta in eodem plano ſuper baſibus æqualibus AE, *ae*, & inter eaſdem parallelas. Eorum æqualitas hac methodo oſtenditur ex eo, quod ſectiones LM, *lm*, QV, *qu* parallelæ baſibus AE, *ae* æquales ſint iis, & inter ſe, ac lineæ illæ in ipſis ſuperficiebus parallelogrammorum æque inter ſe diſtent, licet earum diſtantiæ VM, *um* computatæ in directione laterum non ſint æquales, ſi eæ directiones diverſæ fuerint, adeoque ipſorum laterum æqualitas non habeatur. Sed jam ſuperficies AFGE, *afge* non componentur e lineis LM, *lm*, ſed ex areolis LMVQ, *lmuq*, quæ inter lineas continentur, ut & ſolida AF, *af* in Fig. 18, 19

ex

ex ſpatiolis ſolidis LS, *ls* inter ſuperficies contentis non e ſuperficiebus LMNOP, *lop*, in quibus nimirum areolis, & ſpatiolis ſolidis baſes, & craſſitudines æquales erunt, ac numerus idem.

112. Ex baſi & craſſitudine æquali ita infertur eorum elementorum æqualitas, ut demonſtratio, qua totorum æqualitas evincitur rite procedat, dummodo craſſitudo ipſa elementorum concipiatur infinitè parva. Si enim ſectio utriuſque diviſa concipiatur in infinitum numerum particularum æqualium, & ſimilium, æqualis ſemper aſſumi poterit utrobique earumdem numerus ita, ut ubi ſectiones ſunt rectæ lineæ, ut in Fig.21, utraque ſectio in ejuſmodi particulas accuratè dividatur, ubi vero eæ ſunt areæ, ut in 16, 17, 18, 19, continuata in infinitum diviſione, infinitè parva ſpatiola hinc inde in angulis remaneant, cetum erectis lineis perpendicularibus ad ſectionem a.. tram, uſque ad oppoſitam infinitè proximam, habebitur utrobique infinitus numerus particularum æqualium, & ſimilium inter illas ſectiones infinitè proximas contentarum, & ſolum circa margines, ut in Fig.21. circa LQ, VM, *lq*, *um* deeſſe poterunt aliquæ ob laterum obliquitatem. Sed numerus earum, quæ deſunt, reſpectu reliquarum minuetur in infinitum, ubi in infinitum minuatur craſſitudo, & ſectiones oppoſitæ ad ſe invicem accedant in infinitum. Quare ubi illorum elementorum, nimirum ſpatiorum, quæ binis ſectionibus infinitè proximis continentur, æqualitas aſſumitur, contemnitur aliquid infinitè parvum reſpectu ipſius ſummæ.

113. Quoties autem in comparandis binis quantita-

titatibus finitis contemnendo aliqua, quæ respectu earum sunt infinitè parva, invenitur æqualitas, toties vera æqualitas haberi debet, nec ullus ne infinitesimus quidem error inde oriri potest. Finitæ enim quantitates sunt eæ, quæ in se determinatæ sunt: infinitæ parvæ quantitates sunt eæ, quæ concipiuntur minui ad arbitrium ultra quoscumque limites in se determinatos. Porro contemptus quantitatum infinitesimarum in comparatione quantitatum finitarum nullum errorem parere potest ne infinitesimum quidem. Nam si illæ finitæ quantitates essent inæquales, haberent differentiam aliquam in se determinatam. Quoniam autem illæ quantitates infinitesimæ possunt minui ultra quoscunque limites in se determinatos, poterunt simul omnes esse minores, quam illa differentia supposita, quam idcirco compensare non possent, nec posset ex illarum contemptu derivari æqualitas quantitatis illius in se determinatæ, nimirum differentiæ suppositæ.

114. Id exemplo sequenti fiet magis manifestum. Sint in bilance hinc inde bini lapides inclusi cum liquoribus quibusdam, qui liquores perpetuo debeant effluere, vel evaporari, donec penitus evanescant. Concipiamus nos nescire utrum lapidum pondera æqualia sint, utrum liquores illis pondus addant, an auferant, utrum æque effluant; scire tamen hæc duo: donec aliquid liquorum supererit, haberi debere æquilibrium, & liquores debere imminui ultra quoscunque limites in se determinatos, cum nimirum debeant penitus evanescere. Ex his binis veritatibus inferre licebit, lapides æqualis ponderis esse, liquores vel æque augere, vel æque minuere

ipsorum pondera, & æqualiter effluere. Si enim ii lapides non æque ponderarent, esset aliqua in ipsorum ponderibus differentia in se determinata. Quoniam igitur liquores debent minui ultra quoscumque limites in se determinatos, aliquando simul omnes addent, vel auferent minus ponderi, quam sit illa differentia supposita. Igitur tunc illam differentiam compensare non possent nec æquilibrium haberetur, quod est contra hypothesim. Si igitur, donec adsunt liquores æquilibrium habetur & ii in infinitum imminuuntur, oportet lapides ipsi æquales sint. Quare cum ipsi lapides, & liquores simul æque ponderent; ipsi liquores æqualia pondera vel addunt, vel demunt, adeoque & æque effluunt.

115. Jam vero lapides illi referunt quantitates finitas, sive in se determinatas, liquores illi referunt quantitates infinitesimas, quibus contemptis, si finitæ quantitates æquales inveniuntur, reipsa debent esse accuratè æquales, & infinitesimæ illæ quantitates, quæ contemnuntur debent se mutuo compensare. Nam nisi illa finitarum quantitatum æqualitas haberetur, contemptus ipsarum decrescentium ultra quoscunque limites, non posset compensare ipsarum differentiam tum, cum infra ipsam eam differentiam imminuerentur.

116. In casu nostro binæ quantitates finitæ sunt bina prismata, vel pyramides, quantitates infinitesimæ sunt summæ particularum illarum omnium, quæ ob laterum obliquitatem desunt in angulis singulorum stratorum binis sectionibus inter se infinite proximis contentorum, ubi eadem in similes, & æquales particulas resolvuntur. ad eorum æqualitatem

tatem evincendam. Cum his neglectis illa solida inveniantur æqualia; oportet, ipsa omnino æqualia sint, nec ullus error habebitur. Quod autem de binis quantitatibus æqualibus dictum est, facile traducitur ad quantitates quamcunque rationem habentes ad se invicem. Nam si eam rationem accurate non haberent, addendum esset aliquid in se determinatum alteri, vel demendum alteri, ut eam assequerentur. Quæ autem contemnuntur, cum decrescere possint infra id, quod addendum, vel demendum esset, non possunt ejus vicem supplere, & eam rationem ostendere, quæ ex ipsorum contemptu derivatur.

117. Atque hoc scholio continetur fundamentum tam methodi Cavallerianæ, quam methodi infinitesimalis passim adhiberi solitæ, quarum utraque investigationi est aptissima, utraque demonstrationes mirum in modum contrahit, & secunda multo latius patet, quam prima, utraque autem passim adhiberi solet, & utranque jam adhibebimus ubi opus fuerit. In priore autem illud generaliter moneri potest, eam semper habere locum, ubi areæ in eodem plano positæ per easdem secantur rectas datæ rectæ parallelas, vel ubi solida quævis secantur planis eidem dato plano parallelis; ejusmodi enim areæ vel solida erunt semper, ut sectiones, si sectiones ipsæ datam aliquam rationem habuerint ad se invicem. Habebit autem locum etiam ubicumque sectiones parallelæ inter se fuerint, & æque utrobique distantes, ac numero æquali tam in solidis, quam in areis, sed non in lineis. In methodo autem infinitesimali cavendum, ne contemnatur aliquid, quod non

non decrescat ultra quoscumque limites in se determinatos respectu ejus, respectu cujus contemnitur, quod si caveatur, nullus error usquam committi poterit.

118. Veteres multo longiore ambitu utebantur adhibentes methodum, quam exhaustionum vocant. Concludebant singulas e binis quantitatibus comparandis inter alias binas ad se invicem accedentes magis, quam pro quavis data differentia, ac demonstrabant æqualitatem quantitatum concludentium inter se, tum inferebant propositarum quantitatum æqualitatem pariter inter se, reducendo semper demonstrationem ad absurdum. Ejusmodi methodus eodem fundamento innititur, quo methodus infinitesimalis, sed multo est implicatior, & longior. Eam apud Euclidis commentatores Tyro videre poterit, si velit, & ubi aliquanto plus profecerit, apud veteres ipsos, Archimedem in primis. Sed de his jam satis.

Coroll. 6.

119. Pyramides basium æqualium in eundem apicem desinentes, vel utcunque eandem altitudinem habentes, sunt æquales.

120. Potest enim per communem verticem duci planum plano basium parallelum, eruntque super æqualibus basibus, & in iisdem planis parallelis; & pariter si bases collocentur in eodem plano vertices ad eandem partem siti in eadem altitudine terminabuntur ad idem planum basibus parallelum.

Coroll. 7.

121. Pyramis est tertia pars prismatis habentis æqualem basim & altitudinem.

122. Col-

122. Collocentur enim (Fig. 22.) bases in eodem plano, & vertices terminabuntur ad planum ipsi parallelum, ob altitudines æquales. Concipiatur autem in eodem illo basium plano triangulum ACB æquale areæ basium; ac in eadem altitudine prisma terminatum ad DFE ipsi æquale, & parallelum. Tum concipiatur secari ipsum prisma plano CDB, & orientur binæ pyramides habentes verticem in D, & altera habebit pro basi triangulum CAB, altera parallelogrammum CFEB. Si hæc secunda secetur iterum plano CDE in binas pyramides habentes eundem verticem D, & bases FCE, BEC æquales; hæ binæ pyramides erunt inter se æquales (per n. 119.) Earum autem prior considerari potest tanquam habens basim DFE & verticem C, quæ pariter (per n. 119.) æqualis esse debet primæ illi habenti pro basi triangulum ABC, & pro vertice D, cum bases ipsæ sint inter se æquales, & altitudines pariter æquales eidem illorum triangulorum distantiæ perpendiculari a se invicem, adeoque & inter se. Erit igitur prima illa pyramis pars prismatis tertia. Cumque datum prisma huic triangulari prismati æquale sit, ac data pyramis huic pyramidi (per num. 107); etiam data pyramis erit pars tertia dati prismatis.

Coroll. 8.

123. Mensura cujusvis prismatis est productum ex basi in altitudinem, pyramidis autem ejus producti triens.

124. Si enim capiatur basis ABCD (Fig. 24.) rectangula æqualis basi dati prismatis, vel datæ pyramidis, & ductis per ejus latera planis perpendicu-

 laribus

laribus ejus plano, in eadem altitudine construatur prisma AG habens facies basi perpendiculares; hoc erit æquale dato prismati, ac triplum datæ pyramidis. Si autem hujus latera AD, DC, & altitudo DF dividantur in particulas æquales quotcunque, quarum numerus, si forte eæ rectæ incommensurabiles fuerint, augeatur, & magnitudo minuatur in infinitum, ut ea, quæ supersunt, & contemnuntur infinitè parva evadant, concipianturque per singula divisionum puncta plana parallela faciebus parallelepipedi ipsius, habebuntur tot strata, quot particulæ fuerint in altitudine DF, & in singulis stratis tot ordines particularum solidarum, quot particulæ lineares fuerint in AD, & tot particulæ solidæ omnes æquales, & cubicæ, quot particulæ lineares in latere DC. Quare multiplicando AD per DC habetur numerus particularum solidarum cujusvis strati, qui est idem ac numerus particularum superficialium basis BD. Hunc autem numerum multiplicando per numerum particularum linearium altitudinis DF, habebitur numerus particularum omnium solidarum contentarum eo parallelepipedo. Igitur id parallelepipedum, adeoque datum prisma, vel triplum datæ pyramidis est productum ex basi in altitudinem.

125. Ex. gr. Si basis habeat latus AB duorum palmorum, AD quatuor, constabit superficies ABCD palmis quadratis bis quatuor, sive octo. Si autem altitudo DF fuerit palmorum trium, habebuntur tria strata cuborum palmarium alia supra alia, quorum singula continebunt octo. Quare totum prisma continebit cubos ejusmodi ter octo, sive vigintiquatuor.

Co-

Coroll. 9.

126. Prismata omnia, si inter se comparentur, ac pyramides omnes inter se, erunt ut producta ex basibus, & altitudinibus: & si bases fuerint æquales, erunt ut solæ altitudines: si altitudines fuerint æquales, erunt ut solæ bases: si ea solida fuerint æqualia, altitudines erunt reciprocè proportionales basibus: si bases fuerint reciprocè proportionales altitudinibus, erunt æqualia: si bases fuerint similes, & altitudines proportionales lateribus homologis basium, erunt in triplicata ratione laterum homologorum, vel altitudinum.

127. Patent omnia ex regulis proportionum, & postremum hoc deducitur ex iisdem, ac ex eo, quod basium similium areæ sunt in ratione duplicata laterum homologorum (per Cor. 2. pr. 12. Geom.), quibus cum accedat ratio altitudinum, evadit triplicata.

Coroll. 10.

128. Similium solidorum superficies sunt in duplicata ratione laterum homologorum; ipsa autem solida in triplicata.

129. Similia enim dicuntur ea, que resolvi possunt in similes pyramides, quarum bases sunt in duplicata ratione laterum, quibus accedit ratio simplex ipsorum laterum, dum in altitudines ducuntur.

130. *Def.* 4. Cylindrus est figura solida inclusa superficie genita motu parallelo rectæ radentis circulum positę extra ipsius planum: Conus verò, motu rectæ radentis circulum, & transeuntis per punctum quoddam positum pariter extra ipsius planum: utriusque basis dicitur ille circulus, axis ejusmodi recta per

centrum ipsius ducta, latus recta, quæ radit circulum, vertex in cono punctum illud immobile; & si axis sit perpendicularis basi, dicitur cylindrus, vel conus rectus; si ille fuerit obliquus, hic etiam dicitur obliquus. Si autem basis fuerit quævis alia curva linea, solidum dicitur Cylindricum, vel Conoidicum.

131. Fig. 23. exprimit cylindrum, 25 conum: basis est circulus AaE, axis FC, latus in cylindro BA, vel ED, in cono FA, vel FE, coni vertex F.

Coroll. 1.

132. Si basis prismatis, vel pyramidis multiplicato in infinitum numero laterum; & imminuta magnitudine, abeat in curvam continuam, satis patet prisma abire in solidum cylindricum, pyramidem in conoidicum, & prisma, cujus latera sunt perpendicularia basi, in cylindrum rectum, pyramidem vero, cujus basis latera æqualia, & distantiæ a vertice æquales in conum rectum, cujus latus rectilineum quodvis erit perpendiculare perimetro basis.

133. Cetera facile patent: ubi vero in pyramide (Fig. 18.) poligonum ABCDE circulo cuidam inscriptum sit, & multiplicatis in infinitum lateribus, poligonum abit in circulum, rectæ FA, FE, abeunt in ipsum perpendiculum FZ.

Coroll. 2.

134. Quamobrem quæcumque dicta sunt de prismate & pyramide in Corollariis defin. 3, locum habebunt in quovis solido cylindrico, vel conoidico, ac ea, quæ ad superficiei mensuram pertinent, habebunt locum in cylindro, & cono rectis tantummodo ita, ut superficies coni recti truncati sit semi.

summa

summa peripheriarum binarum basium ductarum in earundem distantiam.

Coroll. 3.

135. In cono obliquo (Fig. 25.) si demisso perpendiculo FD in basim, ducatur per D diameter ACE, jacente A ad partes oppositas C, angulus FCA, & recta FA erunt maximi omnium angulorum FC*a*, & rectarum F*a*, angulus FCE, & recta FE minimi: ipse autem angulus FC*a*, & recta F*a* erunt eo minores, quo magis recedent ab A, & accedent ad E, ac bini tantum hinc inde æquales erunt.

136. Quod pertinet ad angulos patet ex Cor.9. def. 2. Quod vero pertinet ad rectam patet ex ipso angulo, & ex eo, quod FC sit constans, & C*a* semper æqualis CA, vel CE.

137. *Def.* 5. Sphæra est solidum unica superficie comprehensum, ad quam omnes rectæ e centro ductæ æquales sunt; cujus diameter dicitur recta quævis per centrum ducta, & utrinque terminata ad superficiem: recta autem a centro ad superficiem ducta dicitur radius.

Coroll. 1.

138. Omnes sphæræ diametri æquales sunt inter se.

139. Sunt enim æquales omnes radii, quorum binos continet quævis diameter.

Coroll. 2.

140. Si semicirculus circa suam diametrum gyret, generat sphæram habentem idem centrum, & eandem diametrum.

141. Omnes enim rectæ CF, CI, CH (Fig.26.) ductæ a centro immoto semicirculi C ad quævis superfi-

perficiei puncta erunt æquales eidem CA, vel CB immotæ.

Coroll. 3.

142. Si sphæra secetur quovis plano, sectio erit circulus, qui erit omnium maximus, si sectionis planum transeat per centrum sphæræ, quo casu habebit diametrum, & centrum commune cum diametro, & centro sphæræ, ac deinde erit major, vel minor, prout planum sectionis magis, vel minus accedet ad centrum sphæræ, vel recedet.

143. Sit enim sectio FIH, & ad ejus planum ducatur (per num. 46.) perpendicularis diameter ACB, quæ ipsi occurrat in E; ac si punctum E congruat cum ipso centro C, patet omnes EI fore radios sphæræ. Si autem cadat extra, in triangulis CEI, CEF anguli ad E erunt recti, latus CE idem, basis CI æqualis CF. Quare & quodvis latus EI æquale erit cuivis EF (prop. 7. Geom.), adeoque in utroque casu sectio erit circulus, cujus centrum in E, quod in primo casu cadet in ipsum speræ centrum C, circulo maximo habente centrum, adeoque & diametrum, commune cum centro, ac diametro sphæræ.

144. Patet autem ob angulum ad E rectum, radium circuli EF fore semper minorem radio sphæræ CF, nisi congruant abeunte E in C, quo casu æquantur, & quo minor fuerit distantia CE, eo major erit chorda HF, nimirum circuli diameter.

Coroll. 4.

145. Si concipiatur (Fig. 27.) cylindrus rectus KQLM circumscriptus sphæræ habens pro axe diametrum AB, pro basi circulum æqualem circulo sphæræ maximo, quem sectio ipsi sphæræ AB perpendicularis

cularis ducta per E secet in RN, superficies segmenti sphæræ HAF erit æqualis superficiei cylindri QNRK, & area totius sphæræ areæ totius cylindri demptis basibus.

146. Concipiatur enim quævis particula Ff peripheriæ circuli genitoris ita parva, ut infinite accedat ad rectam lineam, & producta Ff usque ad BA in G, generabit recta FfG superficiem coni recti, ut patet, ac Ff superficiem coni recti truncati cujus mensura (per num. 134.) erit ipsa Ff ducta in semisummam peripheriarum habentium pro radiis EF, ef, nimirum (ducto radio CO, qui ipsam Ff secet bifariam in O & ad angulos rectos per Cor. 4. prop. 5. Geom., & demisso perpendiculo OP) in circumferentiam habentem pro radio OP, quæ erit æqualis illi semisummæ; nam $EF . fe :: FG . fG$, & componendo $EF + fe . fe :: FG + fG . fG$, & cum sit $2OG = FG + fG$, erit etiam $\frac{EF + fe}{2} . fe :: OG . fG$; est autem $OG . fG :: OP . fe$, ergo $OP = \frac{EF + fe}{2}$; & cum peripheriæ sint ut radii, erit peripheria ipsius OP æqualis semisummæ peripheriarum habentium radios EF & fe. Jam verò ob similia triangula rectangula Gef, GEF, GPO, OPC, erit $Ee = Nn . fF :: GE . GF :: GP . GO :: PO . CO = EN$. (ut facilè intelligitur ex Pr. 12 Geom., ejusque Coroll. 4) ergo $Nn \times EN = fF \times PO$, atque adeo (cum peripheriæ sint ut radii) erit factum ex Nn in peripheriam descriptam radio EN æquale facto ex fF in peripheriam descriptam radio PO. Primum illud est area geni-

genita ab N*n*, hoc secundum est area genita ab F*f*. Quare tota area genita a toto arcu A*f*F æquatur toti areæ genitæ a recta QN, & abeunte REN in MBL tota sphæræ superficies superficiei totius cylindri demptis basibus.

Coroll. 5.

147. Superficies segmenti sphærici HAF æquatur areæ circuli habentis pro radio chordam AF, superficies totius sphæræ areæ circuli habenti pro radio diametrum ipsius sphæræ, quæ proinde erit quadrupla circuli sphæræ maximi.

148. Est enim ut AE, sive QN ad AF, ita AF ad AB, adeoque ita semiperipheria radio AF, ad semipheripheriam radio AB, sive peripheriam radio CB, vel EN. Quare productum ex QN & peripheria descripta radio EN, sive area cylindrica QNRK, vel area segmenti sphærici HAF æquatur producto ex AF in dimidiam circumferentiam radio pariter AF, sive areæ circuli habentis ipsam AF pro radio, quæ AF, abeunte F in B, evadit diameter AB, ac proinde area totius sphæræ æquatur areæ circuli habentis pro radio diametrum ipsius sphæræ; quæ idcirco quadrupla est areæ circuli habentis pro radio radium ipsius sphæræ, nimirum areæ circuli sphæræ maximi.

Coroll. 6.

149. Sector sphæræ CHAFC æquatur cono habenti pro basi circulum radio AF, & pro altitudine radium ipsius sphæræ, & soliditas totius sphæræ cono habenti pro basi circulum quadruplum circuli sphæræ maximi, ac eandem altitudinem, cujus mensura erit area ejusdem circuli ducta in binos trientes diametri.

150. Si

150. Si enim superficies sphæræ concipiatur resoluta in particulas ita parvas, ut infinitè accedant ad superficiem planam, & a singulis earum perimetri punctis ad centrum sphæræ tendant rectæ, habebuntur totidem pyramides, quarum bases erunt illæ particulæ superficiei sphæricæ, & altitudo communis radius sphæræ. Quare omnium summa æquabitur pyramidi vel cono habenti basim æqualem toti illi superficiei sphæricæ, & altitudinem eandem. Porro cum (per num. 147.) totius sphæræ superficies sit quadrupla circuli sphæræ maximi, & conus (per n. 134, & 123) triens producti ex basi & altitudine; erit soliditas sphæræ æqualis trienti producti ex quadruplo circuli maximi, & radio, vel trienti producti ex duplo ipso circulo, & diametro, sive binis trientibus producti ex circulo ipso, & diametro.

Coroll. 7.

151. Si concipiatur conus MAL habens pro basi pariter circulum sphæræ maximum, ut cylindrus QLMK; erunt conus, sphæra, cylindrus ad se invicem ut numeri 1, 2, 3, & superficies sphæræ, ad superficiem cylindri, inclusis basibus, pariter ut 2 ad 3.

152. Nam cylindrus æquatur producto ex basi sua, sive area circuli sphæræ maximi, & diametro AB (per num. 134, & 123) sphæra binis ejus producti trientibus (per n. 149), conus uni trienti (per num. 134, & 123).

Coroll. 8.

153. Sphærarum superficies sunt in duplicata ratione radiorum, sphæræ autem ipsæ in triplicata.

154. Nam areæ circulorum maximorum sunt in dupli-

duplicata ratione radiorum, quibus accedit ratio ipsorum radiorum, cum pro habenda ſphæra eæ ducuntur in diametros, vel radios, ac fit triplicata.

Scholion 1.

155. Si Archimedeis numeris uti libeat pro ratione circumferentiæ circuli ad radium, erit ſphæra ad cubum diametri, ut 21 ad 11. Erit enim quadratum radii ad aream circuli, ut 7 ad 22. Quare quadratum diametri ad aream circuli, ut 28 ad 22, vel ut 14 ad 11. Si primus ducatur in diametrum, & ſecundus in $\frac{2}{3}$ diametri, fiunt cubus, & ſphæra, quæ ſolida proinde erunt ut 14 ad $\frac{2}{3} \times 11$, ſive ut 3×7 ad 11, vel ut 21 ad 11.

156. Data quavis ratione diametri ad circumferentiam adhuc propiore rationi veræ, ſemper habebitur facile menſura ſphæræ; ut & corporum omnium menſuræ ad pyramides redactæ haberi poterunt ex iis, quæ dicta ſunt.

157. Mechanica eorum menſura haberi poteſt, ſi corpora ejuſdem formæ minora immittantur in vas aqua plenum, & capiatur menſura aquæ effluentis.

Scholion 2.

158. Subjiciemus indicem propoſitionum libri 11, & 12 Euclidis, quas fere omnes accuratè demonſtravimus, nonnullæ ex demonſtratis ſponte fluunt. Omiſimus aliquas, quas Euclides in gratiam ſequentium demonſtrat.

Eucli-

Euclidi Lib.XI	Nobis	Euclidi Lib.XI	Nobis
Pr. 1	num. 4	28)	
2	7	29)	
3	5	30)	
4	18	31)	
5	28	32)	126
6	35	33)	
7	7	34)	
8	35	35)	
9	39	36)	
10	41	37)	
11)		38	66
12)	45		
13)		Lib.XII	
14	16	5)	126
15	54	6)	
16	9	7	122
17	11	8)	
18	64	9)	126
19	70		
20	85	10)	
21)		11)	
22)	88	12)	(134
23)		13)	(122
24	98	14)	
25	126	15)	
26	86	18	153

TRIGONOMETRIA.

1. RIGONOMETRIA dicitur ars resolvendi triangula. Nimirum in quovis triangulo habentur tria latera, & tres anguli, ex quibus si dentur tria, fere semper reliqua tria inveniri possunt: Ea cum inveniuntur, triangulum resolvi dicitur, ac ejusmodi investigationem Trigonometria docet, quæ triangulorum dimensionem græco vocabulo exprimit.

2. Porro triangula considerari solent vel in plano a rectis constituta lineis, vel in sphæræ superficie ab arcubus circulorum ejusdem sphæræ maximorum. Quæ illorum resolutionem docet Trigonometria, *plana* dicitur, quæ horum, *sphærica*. Id autem præstat ope quarumdam, quæ dicuntur *functiones* arcuum circuli, vel angulorum eosdem arcus habentium pro mensura.

3. Quamobrem hunc tractatum dividemus in partes tres. Prima aget de arcuum functionibus, & earum tabulis, secunda de Triangulis planis, tertia de sphæricis:

PARS PRIMA.

De arcuum functionibus, & earum tabulis.

§. I.

De natura, & proprietatibus functionum.

Definitiones.

4. Nomine *functionis* arcus cujuspiam hic intelligimus sinum rectum, sinum versum, tangentem, secantem, cosinum, cotangentem, cosecantem, quæ singula sunt exponenda.

5. Si ex altero extremo arcus circularis ducatur perpendiculum in diametrum ductam per alterum extremum; hoc perpendiculum dicitur *sinus rectus* ejus arcus, & pars diametri intercepta inter illud extremum arcus, & ipsum sinum rectum, dicitur *sinus versus*. In Fig. 1. DE est sinus rectus arcus AD, AE est sinus versus ejusdem.

6. Si ex altero extremo arcus ducatur tangens, donec occurrat rectæ ductæ per alterum extremum, & per centrum, ipsa dicitur *tangens* ejusdem arcus. AF est tangens arcus AD, A*f* arcus A*d*.

7. Illud segmentum rectæ ductæ per centrum, & alterum extremum arcus, quod interjacet inter centrum, & tangentem ductam per alterum extremum, dicitur *secans* ejusdem arcus. CF est secans arcus AD, C*f* arcus A*d*.

8. Id quod arcui cuipiam deest ad complendum semicirculum, dicitur ejus *complementum ad semicircu-*

circulum, vel *ad* 180 *gradus*: ejus differentia a quadrante, sive ipsum excedat, sive ab ipso deficiat, dicitur absolutè *complementum*, ac sinus, tangens, secans complementi arcus, dicitur ejus *cosinus*, *cotangens*, *cosecans*. DB est respectu AD complementum ad semicirculum, *d*B respectu A*d*: GD, G*d* sunt complementa AD, A*d*: DH, *d*H sunt ipsorum cosinus: GI, G*i* ipsorum cotangentes: CI, C*i* ipsorum cosecantes, cum sint sinus tangentes secantes complementorum GD, G*d*.

Coroll. I.

9. Bini arcus, qui simul sumpti semicirculum complent, habent omnes functiones æquales.

10. Sint AD, A*d* simul æquales semicirculo A*d*B: erit *d*B æqualis AD, ac proinde etiam complementum GD æquale G*d*, eritque angulus DC*d* bifariam sectus per rectam CG (per Schol. def.7. Geom.), adeoque (per pr.5. Geom., & ejus Cor.4.) chorda D*d* secta bifariam, & ad angulos rectos in H. Quare etiam cosinus DH, *d*H erunt æquales, & sinus DE, *de* æquales eidem CH (per Cor.4. pr.3. Geom.) erunt æquales inter se. Cumque angulus AC*f* sit æqualis *d*C*e* ad verticem opposito (per Cor.4. def.8. Geom.), adeoque angulo DCA, ob arcus *d*B, DA æquales; etiam in triangulis ACF, AC*f* erunt (per pr.3. Geom.) æquales tangentes AF, A*f*, & secantes CF, C*f*, ut pariter ob æqualitatem angulorum GCI, GC*i* erunt æquales cotangentes GI, G*i*, & cosecantes CI, C*i*.

Coroll. 2.

11. Chorda dupli arcus est dupla sinus ejusdem.

12. Nam Dd chorda DGd est (per num. 10.) dupla DH sinus DG, ac arcus DGd est duplus arcus DG.

Coroll. 3.

13. Quadratum radii æquatur summæ quadratorum sinus, & cosinus arcus cujusvis, ac differentiæ quadratorum secantis, & tangentis. Quadratum vero secantis summæ quadratorum tangentis, & radii.

15. Nam ob angulum CHD rectum, est (per pr. 7. Geom.) $CD^2 = CH^2 + HD^2 = DE^2 + DH^2$, & ob angulum CAF rectum, $CA^2 = CF^2 - FA^2$, & $CF^2 = FA^2 + CA^2$.

Coroll. 4.

15. Idem quadratum radii æquatur rectangulo sub cosinu, & secante, ac rectangulo sub tangente, & cotangente.

16. Est enim (per prop. 12. Geom.) ob triangula CED, CAF similia, CE . CD :: CA . CF; adeoque (per pr. 13. Geom.) $CE \times CF = CA \times CD = CA^2$. Præterea cum sit angulus ICG æqualis (per Corol. 1. def. 17. Geom.) alterno CFA, ac proinde similia triangula rectangula CAF, ICG; est AF . AC :: CG . GI, adeoque $AF \times GI = AC \times CG = CA^2$.

Coroll. 5.

17. Binorum arcuum quorumcumque tangentes sunt in ratione reciproca cotangentium.

18. Nam (per num. 15) rectangulum sub tangente, & cotangente primi æquatur rectangulo sub tangente, & cotangente secundi; cum utrumque æquetur quadrato radii; ac proinde (per pr. 10 Geom.) illius tangens ad tangentem hujus est, ut cotangens hujus ad cotangentem illius. Co-

Coroll.6.

19. In quovis arcu est cosinus ad sinum, ut radius ad tangentem, ac est sinus ad radium, ut tangens ad secantem.

20. Est enim CE, sive DH. ED :: CA. AF, & ED. DC :: AF. FC.

Coroll.7.

21. Sinus versus arcus quadrante minoris est differentia radii a cosinu, & arcus majoris summa.

22. Nam $AE = AC - CE$, & $Ae = AC + Ce$.

Coroll.8.

23. Mutato utcumque radio functiones omnes arcuum similium, vel angulorum æqualium mutantur in eadem ratione, & inter se rationem constantem servant.

24. Nam figura 1, aucto utcunque, vel imminuto radio CA, erit semper sibi similis, & omnia triangula habebunt eosdem angulos, quos prius; ac proinde ratio radii CA ad omnes alias lineas, & ratio earundem inter se, erit eadem ac prius.

Coroll. 9.

25. In quovis triangulo rectangulo si basis (cujus nimirum nomine in triangulis rectangulis solet intelligi latus recto angulo oppositum, quod etiam hypothenusa dicitur) habeatur pro radio, latera erunt sinus angulorum oppositorum, & cosinus adiacentium; ac si latus alterum habeatur pro radio, alterum latus erit tangens, basis vero secans anguli adiacentis illi primo lateri, & oppositi huic secundo, ac illud cotangens, hæc cosecans alterius anguli oppositi primo lateri, & adiacentis secundo.

 26. Sit

26. Sit enim quodvis triangulum CED rectangulum in E, & concipiatur circulus radio CD. In eo erit DE sinus arcus DA, vel anguli DCA, adeoque cosinus arcus DG, & anguli DCG æqualis alterno CDE.

27. Sit vero quodvis triangulum CAF rectangulum in A, & concipiatur circulus radio CA. In eo erit latus AF tangens, basis CF secans arcus AD, vel anguli ACF adiacentis AC, & oppositi AF; adeoque illud cotangens, hæc cosecans anguli DCG, nimirum anguli CFA alterni, adeoque æqualis ipsi.

LEMMA GENERALE.

28. Binarum quantitatum semidifferentia addita semisummæ efficit majorem, subtracta relinquit minorem: ac si semidifferentia sit major quam semisumma, altera quantitas negativa erit, quæ hic semper pro minori habebitur, cum habeatur ut minor etiam nihilo.

29. Sint in fig. 2. binæ quantitates AD, DB. Secetur AB bifariam in C, sumaturque CF = CD, ut relinquatur AF = DB; eritque AC, vel CB semisumma, FD differentia, cujus dimidium CD additum semisummæ AC exhibet majorem AD, at idem ablatum a semisumma CB relinquit minorem DB.

30. Si vero earum quantitatum altera sit A*d*, & altera habita pro negativa B*d*, summa negativæ & positivæ majorem minuit, adeoque erit AB summa, CB, vel CA semisumma, & facta A*e* ex parte opposita B*d* ipsi æquali, erit *ed* differentia, ejusque dimidium C*d* majus ipsa semisumma CB. Adhuc tamen $AC + Cd = Ad$, & $CB - Cd = - Bd$, sive parti alteri negativæ.

Theo-

THEOREMA.

31. In binis arcubus quibuscumque summa sinuum ad differentiam est, ut tangens semisummæ eorundem arcuum ad tangentem semidifferentiæ, & summa cosinuum ad differentiam, ut cotangens semisummæ ad tangentem semidifferentiæ.

32. Sint enim in fig. 3. bini arcus AD, DB, & secetur AB bifariam in E: erit AB summa eorum arcuum, AE semisumma, & (per num. 28.) DE semidifferentia. Ductis autem CD, CE, quibus AB occurrat in G, I, ac (per pr. 5. Geom., & ejus cor. 4.) secetur bifariam, & ad angulos rectos in I, erit AI semisumma, GI semidifferentia binarum AG, GB, ac tandem ducantur AP, BQ perpendiculares CD, quæ erunt sinus arcuum AD, DB.

33. Jam vero ob triangula similia AGP, BGQ, quæ præter angulos rectos in P, & Q, habent angulos in G ad verticem oppositos æquales, erunt ii sinus, ut AG, GB, adeoque eorum semisumma ad eorum semidifferentiam ut AI harum semisumma ad semidifferentiam IG. At habendo CI pro radio, in triangulis CIG, CIA rectangulis sunt IG, IA tangentes angulorum ICG, ICA (per num. 25.). Sunt igitur etiam tangentes arcuum, qui eos metiuntur, ut eædem rectæ IG, IA. Quare semisumma sinuum arcuum AD, DB, ad eorum semidifferentiam, adeoque & eorum summa ad differentiam erit, ut tangens AE semisummæ ipsorum arcuum ad tangentem ED eorum semidifferentiæ.

34. Completa jam diametro ACK, secetur bifariam etiam KB in M, & capiatur MN = ED versus eandem plagam. Erit EM dimidium totius semi-

circuli, adeoque quadrans. Quare etiam DN erit quadrans, adeoque DB complementum BN: cumque relinquantur AD, NK æquales alteri quadranti; erit AD complementum NK, & ipsorum BN, NK erit BM semisumma, BE, seu AE complementum semisummæ, MN = ED semidifferentia.

35. Cum igitur summa sinuum arcuum AD, DB ad eorum differentiam sit, ut tangens eorum semisummæ AE ad tangentem eorum semidifferentiæ ED, erit summa cosinuum binorum arcuum KN, NB ad eorum differentiam, ut cotangens eorum semisummæ ad tangentem eorum semidifferentiæ.

Scholion.

36. Multa alia theoremata possunt facile demonstrari circa hasce arcuum functiones: sed hæc ad usus, qui communiter occurrunt, abunde sunt. Ut autem ea ad usum deduci possint, ostendendum est, quo pacto diviso radio in quemlibet partium numerum invenire liceat, quot earum partium contineat quævis functio cujusvis arcus, saltem eorum omnium, qui constant gradibus, & minutis, ut in tabulas ordinentur, & ubi opus fuerit præsto sint.

37. Radius dividi potest in quotcunque partes libuerit, plerumque autem assumitur unitas cum quopiam numero cyphrarum o, ut 100000, 1000000, 10000000, vel alius aliquis ejusmodi numerus; ac si inventis functionibus pro aliquo majore radio, quærantur eædem pro minore, habebuntur facile ope numeri 23. Sic si constructis tabulis pro radio 10000000, quærantur pro radio 100000, satis est ex inventis functionibus rejicere postremas duas notas, & eas habere pro decimali-

bus;

bus; ita enim erit ille primus radius ad hunc novum, ut illa prima functio ad hanc novam.

38. Ut habeantur ejusmodi tabulæ, satis erit eas construere usque ad 90 gradus; quoniam (per n.9) post gradus 90 eædem functiones redeunt. Porrò inferius illud etiam ostendemus, quo pacto ordinandæ sint, ut complementa sibi e regione respondeant.

39. Interea notetur illud: evanescente in fig. 1. arcu *AD*, ubi punctum D congruat cum A, sinus rectus ED, & tangens AF evanescunt: sed secans CF evadit æqualis radio CA. Crescente arcu, crescunt omnes tres, donec facto AD = 90°, ubi punctum D abit in G, sinus DE fit æqualis radio CG. Quamobrem radius appellatur etiam *sinus totus*, nimirum sinus totius quadrantis: tangens vero AF, & secans CF evadunt infinitæ, cum fiant parallelæ, adeoque punctum F in infinitum recedat. Crescente vero arcu ita, ut quadrantem excedat, quemadmodum eum excedit A*d*, quo magis ipse augebitur, eo magis decrescet ejus sinus *de*, tangens A*f*, secans C*f*; donec illo abeunte in semicirculum, evanescat sinus, & tangens, ac secans fiat æqualis radio.

40. Sinus autem versus AE, arcu evanescente, evanescit, crescente vero arcu, crescit, donec in arcu æquali quadranti æquetur radio, & in semicirculo fiat æqualis diametro AB.

De

§. II.

De constructione tabularum.

41. SI describeretur circulus ita magnus, ut radium haberet palmorum 10000000; dividi posset in gradus, & minuta, ac ductis sinibus, tangentibus, & secantibus, liceret earum mensuras capere, & invento in singulis palmorum numero, tabulas ita construere. Sed id & mechanicum esset, & ferme factu impossibile, potissimum ob immanem postremarum tangentium, ac secantium longitudinem. Computandæ sunt igitur ope Geometriæ, & Arithmeticæ ejusmodi functiones, quæ tamen ob quantitates radicales, in quas inciditur, accuratæ haberi non possunt, sed tantummodo veris proximæ quantum libuerit. Multæ methodi ad contrahendum calculi laborem inventæ sunt; verum cum ita multæ jam computatæ sint tabulæ, non id agitur, ut immani sanè, ac inutili jam prorsum labore iterum computentur, sed ut Tyroni innotescat, qua ratione computari possint. Trademus igitur methodum, quæ & captu facillima sit, & scopum attingat, ac licet in praxi non omnium expeditissima, nec justo tamen sit operosior.

PROBL. I.

42. Data tangente invenire secantem, & sinum.

43. Ex summa quadratorum radii, & tangentis extrahatur radix, & habebitur secans (per n. 13). Fiat ut secans ad tangentem, ita radius ad sinum quæsitum (per num. 19). Et erit factum.

Probl. 2.

PROBL. II.

44. Datis tangentibus binorum arcuum non majorum quadrante invenire tangentem arcus medii arithmeticè proportionalis.

45. Ex datis tangentibus inveniantur secantes (per num. 41): tum fiat ut summa secantium ad secantem minorem, ita differentia tangentium, ad quantitatem, quæ addita tangenti minori, exhibebit tangentem quæsitam.

46. Sint enim in fig. 4. arcus dati AB, AE, medius Arithmeticè proportionalis AD, tangentes datæ AF, AH, quarum differentia erit HF, ac secantes inventæ CF, CH, tangens vero quæsita sit AG. Ob arcum BD = DE recta CG bifariam secat angulum FCH. Igitur (per Cor. 4. pr. 12. Geom.) erit CH . CF : : GH . GF. Quare componendo CH + CF . CF : : HF . FG. Habetur autem AF + FG = AG.

Corol. 1.

47. Si alter e binis arcubus esset = 0, abeunte B in A, tangens AF, evanesceret, secans CF fieret æqualis radio, & AG ipsi FG. Quare problema mutaretur in hoc aliud. *Data tangente arcus, invenire tangentem ejus dimidii*, & solutio huc rediret: *Inventa dati arcus secante, fiat, ut summa radii, & secantis ad radium, ita tangens data ad quæsitam.*

48. Si alter e binis arcubus fieret quadranti æqualis, abeunte E in I, CH, FH abirent in infinitum, & ratio summæ FC, CH ad FH abiret in rationem æqualitatis. Quare etiam esset FC = FG. In eo igitur casu solutio huc redit: *Secans arcus minoris addatur tangenti ejusdem, & invenietur quæ-*

quæsita tangens. Porro ejusmodi solutio pro eo casu sic etiam immediatè demonstratur. Angulus FGC æquatur alterno GCI, cum quo in eo casu congruit GCH, cui æqualis est FCG. Quare in eo casu FGC = FCG, & FC = FG.

Corol. 3.

49. Si utrunque simul contingeret, altero arcu existente = 0, altero = 90°; tangens AF arcus minoris evanesceret, ac secans FC evaderet æqualis radio, adeoque ipsi radio æqualis etiam quæsita tangens, arcus vero ille medius arithmeticus evaderet = 45°. Quare solutio problematis in eo casu huc redit: *Tangens arcus* 45° *æquatur radio*. Id autem etiam immediate constat. Si enim angulus ACG est semirectus, erit (per prop. 1. Geom.) semirectus etiam AGC ob angulum GAC rectum, adeoque triangulum CAG isoscele.

PROBL. III.

50. Datis functionibus binorum arcuum, qui inter se parum admodum differant, invenire functionem cujuscumque intermedii arcus dati veræ proximam.

51. Fiat ut differentia arcus minoris a majori, ad differentiam minoris ab intermedio, ita differentia datarum functionum ad quartum addendum functioni, quæ respondet arcui minori, vel ab ea auferendum, prout crescentibus arcubus functio crescit vel decrescit, ut habeatur functio quæsita.

52. Exprimantur enim in Fig. 5 & 6 segmentis AB cujuspiam rectæ arcus, & rectis BF ipsi perpendicularibus tangentes eorumdem. Omnia puncta F erunt in quadam linea continua MN, quæ si curva sit,

fit, exigui arcus ejusdem haberi poterunt pro rectis lineis. Exprimantur jam bini arcus inter se proximi rectis AB, AC, intermedius rectâ AD, functiones autem datæ rectis BF, CE, quæsita functio rectâ DG, ac ipsas DG, CE secet in H, & I recta FI parallela BC. Habita FE pro recta linea, erunt similia triangula EFI, GFH, eritque FI ad FH, sive BC ad BD, ut EI ad GH, nimirum differentiæ arcuum circuli ut differentiæ functionum. Porro GH erit addenda ipsi HD, vel FB in Fig.5, demenda ab eadem in Fig.6, ut habeatur DG; quia ibi crescentibus arcubus functiones crescunt, hic decrescunt.

Scholium.

53. Hac methodo utimur in quovis tabularum genere, in quibus bina quantitatum genera a se invicem pendent, quarum nimirum exiguæ differentiæ habentur pro proportionalibus inter se, ac eadem usi sumus in arithmetica (cap.3. num.36) ad eruendos logarithmos numerorum intermediorum inter integros a tabula exhibitos; ac eadem utemur infra ad eruendos arcus, ope functionum intermediarum inter eas, quas tabulæ exhibent; ubi satis erit considerare functiones ut expositas segmentis AB, arcus vero rectis BF.

54. Pertinet hæc methodus ad methodum generaliorem, quam interpolationis dicunt. Semper autem rite procedit, ubi quantitates assumuntur ita inter se proximæ, ut differentiæ sint inter se proportionales, quod ex ipsis tabulis cognoscitur, & quidem admodum facile in iis tabulis, in quibus alterius generis quantitates æquè se excedunt, ut in tabula logarithmorum numeri naturales. Tunc enim satis

ſatis eſt aſſumere differentias quantitatum iis reſpondentium, & ſi binæ hujuſmodi differentiæ ſint inter ſe proximè æquales; invenietur pariter quæſita quantitas proximè æqualis veræ. Differentia logarithmorum numeri 832, & 833 eſt 5217, numeri 833, & 834 eſt 5210 proximè æqualis priori, ac proinde multo propiores proportionalitati erunt differentiæ intermediæ inter ipſos numeros 832, 833.

55. Quod ſi plus æquo inæquales differentiæ deprehenderentur, tunc ad interpolationem non binæ tantum quantitates adhibendæ eſſent altera major, altera minor quæſitâ, ſed plures, lege quadam, quam alibi exponemus; nam ad uſus trigonometricos, methodus tradita ſufficit fere ſemper.

PROBL. IV.

56. Dato arcu quovis, qui quadrante ſit minor, invenire ejus tangentem, ſecantem, ſinum.

57. Arcus datus vel erit inter 0, & 45°, vel inter 45°, & 90°. Inveniatur per Probl. 2, & ejus Corollaria tangens arcus medii arithmeticè proportionalis inter eos, inter quos arcus datus jacet. Idem arcus datus jacebit inter hunc novum, & alterum e prioribus binis extremis. Habeantur igitur hi duo pro extremis, & inveniatur tangens arcus medii arithmeticè proportionalis inter ipſos, ac ita fiat ſemper, donec deveniatur ad arcum datum, vel ad arcum dato proximum, quantum libet. Devenietur autem, quia differentia inter eos, qui aſſumuntur pro extremis & datum concludunt, ſemper duplo minor evadet, ac proinde continuata operatione minuetur ultra quoſcunque limites.

58. In-

58. Inventa tangente invenietur secans, & sinus (per num. 42).

Scholion 1.

59. Methodus hic exposita inveniendi tangentem arcus dati est admodum similis methodo indicata Arithmeticæ cap. 3 num. 31, inveniendi Logarithmum dati numeri. Potest autem hac methodo ope solius problematis secundi, nec serius, quam par est inveniri tangens, utcumque veræ proxima: nam in prima operatione distabunt arcus extremi per 45°, in 2ª per 22°. 30′, in 3 per 11°. 15′, in 4 per 5°. 37′. $\frac{1}{2}$, in 5 per 2°. 48′. $\frac{3}{4}$, in 6 per 1°. 24′. $\frac{3}{8}$ in 7 per 42′. $\frac{3}{16}$, & ita porro.

60. At ubi jam deventum fuerit ad binos arcus satis inter se proximos, potest plurimum contrahi labor ope Problematis tertii, inveniendo tangentem pro intermedio illo dato per differentias habitas pro proportionalibus, quod ipsum in Logarithmorum investigatione liceret. Licebit autem tuto, ubi differentiæ extremarum a recens inventa in postrema operatione obvenerint inter se æquales.

61. Tacquetus in sua Trigonometria habet pro proportionalibus sinus arcus 45′. Hac nostra methodo post sextam operationem institutam per propositionem 2, posset septima institui per prop. 3, cum extremorum differentia jam sit 42′. $\frac{3}{16}$ tantummodo. Sed non solum pro radio = 10000000, sed etiam pro 100000, adhuc plus æquo inæquales sunt differentiæ in tanto intervallo.

62. Ple-

62. Plerumque pro radio 100000, instituendæ erunt 9 operationes, pro radio vero 10000000, saltem 12. Notandum tamen, cum in singulis operationibus contemnantur minores fractiones, assumendas esse saltem binas præterea decimalium notas, ne error in postremis integrorum notis committatur.

63. Porro ut methodus exemplo illustretur, quæratur tangens 27°. 43'. In tabella sequenti operatio distincta est in 12 spatia, in quorum singulis habentur bini arcus cum tangentibus jam inventis, ac inter eos medius Arithmeticè proportionalis cum sua, præter postremum, in quo non medius Arithmeticè proportionalis adest, sed ipse arcus datus. Binæ decimales fractiones adhibitæ ad inveniendos integros minus accuratæ sunt; integrorum notæ accuratissimæ.

Arcus	Tangentes	Arcus	Tangentes
	I.		II.
45.° 0'.	10000000.00	45.° 0'.	10000000.00
22.30.	4142135.62	35.45.	6681786.37
0. 0.	0.	22.30.	4142135.62
	III.		IV.
33.45.	6681786.37	28. 7. $\frac{1}{2}$	5345111.35
28. 7. $\frac{1}{2}$	5345111.35	25.18. $\frac{3}{4}$	4729647.75
22.30.	4142135.62	22.30.	4142135.62

Arcus	Tangentes	Arcus	Tangentes
V.		VI.	
28.° 7′. $\frac{1}{2}$	5345111.35	28.° 7′. $\frac{1}{2}$	5345111.35
26.43. $\frac{1}{8}$	5033577.98	27.25. $\frac{5}{16}$	5188352.84
25.18. $\frac{3}{4}$	4729647.75	26.43. $\frac{1}{8}$	5033577.98
VII.		VIII.	
28. 7. $\frac{1}{2}$	5345111.35	27.46. $\frac{13}{32}$	5266478.81
27.46. $\frac{13}{32}$	5266478.81	27.35. $\frac{55}{64}$	5227353.18
27.25. $\frac{5}{16}$	5188352.84	27.25. $\frac{5}{16}$	5188352.84
IX.		X.	
27.46. $\frac{13}{32}$	5266478.81	27.46. $\frac{13}{32}$	5266478.81
27.41. $\frac{17}{128}$	5246900.25	27.43. $\frac{197}{256}$	5256685.58
27.35. $\frac{55}{64}$	5227353.18	27.41. $\frac{17}{128}$	5246900.25
XI.		XII.	
27.43. $\frac{197}{256}$	5256685.58	27.43. $\frac{197}{256}$	5256685.58
27.42. $\frac{231}{512}$	5251791.92	27.43.	5253829.13
27.41. $\frac{17}{128}$	5246900.25	27.42. $\frac{231}{512}$	5251791.92

64. In computandis tabulis integris labor plurimum minueretur, cum operationes pro uno arcu institutæ, pro pluribus aliis usui esse debeant, ut patet. Quin immo inventis tangentibus, & secantibus arcuum minorum gradibus 45, admodum facile reliquorum omnium tangentes invenientur. Nam (per num. 15) diviso quadrato radii per tangentem, habetur cotangens, & (per num. 48) tangens arcus $45^\circ + a$, qui nimirum est medius arithmeticè proportionalis inter $2a$, & 90°, est $=$ tang. $2a +$ sec. $2a$; ac multa ejusmodi compendia haberi possunt.

Scholion 2.

65. Computatis sinibus, tangentibus, ac secantibus, possunt etiam earum functionum logarithmi computari methodo exposita in Arithmetica (cap. 3 num. 31, & 38). Adsunt autem plures methodi computandi logarithmos functionum ipsarum immediatè. Sed hic satis est indicare rationem aliquam, qua inveniri possint. Porro ipsos quoque earum functionum logarithmos appellabimus in posterum pariter functiones.

PROBL. V.

66. Functionum computatarum tabulas ordinare.

67. Tabula sex columnas contineat. In prima scribantur arcus, nimirum gradus, vel graduum minuta, in secunda sinus, in tertia tangentes, in quarta secantes iis respondentes, in quinta logarithmi sinuum, in sexta logarithmi tangentium. Porro arcus ipsi in pagina sinistra incipiant a 0, & descendendo perpetuo crescant, & in pagina dextera incipiant a 90°, & perpetuo crescant: & erit factum.

Co-

Coroll.

68. Cuivis arcui existenti in altera pagina respondebit e regione in altera ejus complementum, adeoque & cosinus, cotangens &c.

69. Nam initio 90, & o quadrantem complent; ac deinde semper quantum in altera pagina additur, tantundem in altera detrahitur.

Scholion.

70. Logarithmi in tabulis aptari solent radio 10000000000; ut nimirum logarithmus radii, qui in calculis trigonometricis sæpissime occurrit, fit 10.00 &c., ac proinde facile & addi possit, & detrahi.

71. Secantium Logarithmi adscribi non solent, cum iidem admodum facile eruantur ex Logarithmis cosinuum. Cum enim (per num. 15) quadratum radii divisum per cosinum exhibeat secantem; satis erit e duplo Logarithmo radii, sive ex 20.000 &c. subtrahere Logarithmum cosinus.

72. Ut exempla deinceps aliqua dari possint, adjecimus ad calcem hujus tractatus binas tabulas alteram Logarithmorum numerorum naturalium usque ad 1000, alteram harum functionum pro solis gradibus, ex quibus (per num. 50, & 51) inveniri poterunt etiam functiones pro minutis. Aptati autem sunt sinus, tangentes, secantes radio 100000.00, Logarithmi autem Logarithmo radii 10.000 &c., sive radio continenti cyphras nullitatis decem.

§. III.

De usu tabularum.

73. USus tabularum, quem hic exponimus, reducitur ad bina Problemata, quorum altero ex datis arcubus quærantur functiones, altero contra arcus e functionibus.

PROBL. I.

74. Dato quovis arcu, eruere e tabulis functionem ipsi respondentem.

75. Si arcus datus non sit quadrante major, & solos gradus contineat; invenietur in prima columna paginæ sinistræ, vel dexteræ, prout fuerit minor vel major 45°, ac e regione ipsius in eadem pagina respondebit in secunda columna sinus, in tertia tangens &c., ac in altera pagina complementum cosinus, cotangens &c.

76. Si præterea contineat minuta; inveniatur functio arcus proximè majoris, & proximè minoris ac capiatur earum differentia: arcuum autem differentia erit 1°, vel 60′. Fiat igitur ut 60′ ad numerum minutorum, qui in arcu dato continentur supra numerum graduum, ita differentia functionum erutarum e tabulis ad quartum, qui addatur functioni respondenti arcui minori, si quæritur sinus, tangens &c., quæ crescente arcu crescunt, vel dematur, si quæritur cosinus, cotangens &c., quæ illo crescente contra decrescunt; & habebitur quæsita functio (per num. 50 & 51):

77. Quod si arcus quadrantem excedat, subtrahatur a 180°, ac residui inveniatur functio, quæ erit functio arcus dati (per n. 9). Scho-

Scholion.

78. Hac methodo habebuntur functiones etiam pro minutis ita accuratæ, ut nullus in minutis ipsis committatur error, prorsus ut in vulgaribus tabulis continentibus gradus, & minuta eâdem prorsus methodo eruuntur pro minutis secundis, sine ullo in ipsis secundis errore, atque id ubique præter arcus quadranti nimis proximos, in quibus differentiæ multo magis inæquales sunt, & error committitur aliquanto major.

79. Et quidem in sinibus, tangentibus, ac secantibus, plerumque vix ullus, vel admodum exiguus aderit error in nota integrarum postrema: at decimales illæ fractiones haud accuratæ provenient; quas iccirco in sequentibus exemplis omittemus, vel pro unitate computabimus: ut etiam in Logarithmis rejiciemus postremas binas notas, quæ a veris abluderent. In vulgaribus tabulis, si arcus non sint nimis proximi quadranti, assumpto radio cum septem cyphris 0, omnes pro minutis etiam secundis accuratæ obveniunt.

80. At sublimiore illa interpolationis methodo, de qua mentionem fecimus num. 55, ternis adhibitis functionibus, vel quaternis, possunt haberi accuratæ etiam pro minutis, & secundis, omnes harum quoque tabularum functiones. Sed ea sublimior est, quam ut hic proponenda videatur. Præbebimus igitur exemplum methodi expositæ num. 75.

81. Detur arcus $27^{\circ}.43'$, & quæratur tangens. In tabulis tangens $28^{\circ} = 53171$., tang. $27^{\circ} = 50953$, quarum differentia 2218. Fiat igitur ut 60 ad 43, ita 2218, ad quartum: prodit 1590, quo

 addito

addito tangenti 50953, habebitur tangens quæsita 52543. Porro eam num. 63 invenimus 5253829. pro radio 10000000, adeoque 52538. pro radio 100000., quæ ab hic inventa differt per 5. Cum vero differentia debita minutis 60 inventa sit 2218, adeoque uni minuto 37; ex hoc 5 particularum errore, ne septimæ quidem partis unius minuti error committitur.

PROBL. II.

82. Data functione invenire arcum, cui respondet.

83. Si functio data inveniatur in tabulis; invenietur etiam arcus ipsi e regione respondens. Si vero ea in tabulis non habeatur; inveniatur in iisdem functio proxime minor, & proxime major, ac fiat ut harum differentia ad differentiam proxime minoris a proposita, ita 60′ ad numerum minutorum addendum arcui respondenti functioni minori, si ea sit sinus, tangens &c., demendum ab eo si sit cosinus, cotangens &c. Porro tam arcus ita inventus erit is, qui habebit functionem illam datam (per num. 53), quam is qui proveniet eo ablato a 90° (per n. 9).

Scholion.

84. Detur logarithmus tangentis 9.87343, & quæratur arcus. In tabulis logarithmus tangentis proximè major, omissis postremis binis notis, est graduum 30 = 9.87711, proximè minor graduum 36 = 9.86126. Differentia secundi a primo est 1585, secundi a proposito 1217. Fiat igitur ut 1585 ad 1210, ita 60′ ad quartum, & prodit 46′ omissis fractionibus. Arcus igitur quæsitus est 36°. 46′.

PARS

PARS SECUNDA.

De resolutione triangulorum planorum.

§. I.

De Triangulis rectangulis.

85. PRO resolutione triangulorum rectangulorum adhibebimus sequentes tres canones, quos ubi demonstraverimus, proponemus unicum problema; quo omnes casus triangulorum rectangulorum complectemur, ac singulis casibus apponemus exempla, pro quibus eruemus e tabulis hic adjectis functiones ex arcubus, & arcus e functionibus, licet functiones ita erutæ nonnihil discrepabunt a veris, ita tamen, ut nec in angulis error minuti primi, nec in basibus error integræ partis occurrat.

86. I. *In triangulo rectangulo angulorum obliquorum alter est complementum alterius; ac proinde dato altero, datur etiam alter.*

87. Patet ex prop. 1. Geom.

88. II. *Basis ad latus est ut radius ad sinum anguli oppositi ipsi lateri, vel ut secans anguli ipsi adjacentis, ad radium, vel ut secans anguli ipsi oppositi ad ejus tangentem.*

89. Patet ex num. 25, si habeatur pro radio prius basis, tum ipsum latus, ac demum latus alterum.

90. III. *Alterum latus est ad alterum, ut radius ad tangentem anguli adjacentis primo, vel ut tan-*

tangens anguli ipsi oppositi ad radium, vel ut sinus anguli ipsi oppositi, ad sinum adiacentis.

91. Patet ex eodem numero, habendo pro radio prius primum latus, tum latus secundum, ac demum basim.

PROBLEMA.

92. Datis in triangulo rectangulo plano præter angulum rectum binis aliis ad ipsum triangulum pertinentibus, reliqua invenire.

93. *Casus* 1. Si dentur bini anguli, perinde erit, ac si daretur unicus; cum alter innotescat per canon: I. In eo casu solum habebitur ratio, quæ intercedit inter latera, & basim, ope canon. II, & III. ex: gr: sumpto radio, & binis angulorum sinibus, ii per can. II. expriment rationem, quæ intercedit inter basim, & latera ipsis angulis opposita.

94. Sint in fig. 7. A $= 57°$, erit C $= 90° - 57° = 33°$; eruntque AC, BC, AB, ut 100000.00, 83867.06, 54463.49.

95. *Casus* 2. Detur basis, & alter angulus. Invenietur angulus alter per canon. I, latus oppositum utrilibet angulo per can. II, adhibita quavis ex tribus proportionibus ejusdem canonis.

96. Sit AC $= 875$, A $= 57°$, erit C $= 33°$. Fiet autem ut radius 100000 ad sin. A $=$ sin. $57° = 83867$, ita AC $= 875$ ad BC $= 733.8$ &c., sive 734.

97. Quod si habeantur Logarithmi, facilius invenietur summando Logarithmum sinus $57° = 9.92359$, ac Log. AC $=$ Log. $875 = 2.94201$, & demendo Logarithmum radii $= 10.00000$. Erit nimirum

mirum Log. BC = 9.92359 + 2.94201 − 10.00000 = 2.86560, cui Logarithmo numerus proximus in tabulis est 734.

98. *Casus* 3. Detur basis, & alterum latus. Invenietur alter angulus per can. II. adhibita altera e prioribus binis proportionibus. Hinc alter angulus innotescet per can. I, ac deinde latus alterum, adhibita quavis e tribus proportionibus, sive canonis II., sive III.

99. Sit AC = 627, AB = 356. Erit per can. II, Log. sin. C = Log. AB + Log. radii − Log. AC = Log. 356 + Log. radii − Log. 627 = 2.55145 + 10.00000 − 2.79727 = 9.75418. Adeoque C = 34°. 36′, qui nimirum angulus invenitur per num. 83. Hinc angulus A = 90° − 34°. 36′ = 55°. 24′ per can. I, & Log. BC = Log. sin. A + Log. AC − Log. rad. = 9.91544 + 2.79727 − 10.00000 = 2.71271, adeoque BC = 516.

100. *Casus* 4. Dentur bina latera. Invenietur alter angulus ope utriuslibet e binis prioribus proportionibus canonis III. tum alter angulus per can. I, ac demum basis per quamvis e tribus proportionibus canonis II.

101. Sit AB = 476, BC = 595, erit per can. III Log. tang. A = Log. BC + Log. rad. − Log. AB = Log. 595 + Log. rad. − Log. 476 = 2.77452 + 10.00000 − 2.67761 = 10.09691. Adeoque A = 51°. 20′. Quare, per can. I, B = 38°. 40′, &, per can. II, Log. AC = Log. BC + Log. rad. − Log. sin. A = Log. 595 + Log. rad. − Log. sin. 51°. 20′ = 2.77452 + 10.00000 − 9.89251 = 2.88201, adeoque AC = 762.

Scholion.

102. Sic omnes rectangulorum solvuntur casus. In casu quarto, potest etiam sine Trigonometria obtineri basis AC, extrahendo radicem e summa quadratorum laterum, & in casu tertio latus BC extrahendo radicem ex differentia quadrati basis AC, & quadrati lateris AB. Nimirum ibi est AC $= \sqrt{(226576 + 354025)} = \sqrt{580601} = 762$, hic BC $= \sqrt{(393129 - 126736)} = \sqrt{266393} = 516$. Immo quia facile deducitur ex demonstratione corol. 2. pr. 13. Geom. differentiam quadratorum binarum quantitatum quarumcumque æquari producto ex earum summa & differentia, facilius eruetur latus, ducendo in se invicem summam basis, & lateris dati, ac differentiam, & extrahendo radicem, quo pacto & Logarithmi adhiberi possunt. Sic in ipso casu tertio cum sit AC + AB $= 983$, AC $-$ AB $= 271$; erit BC $= \sqrt{271 \times 983} = \sqrt{266393} = 516$, & Log. BC $= \frac{1}{2}$ (Log. 271 + Log. 983) $= \frac{1}{2}$ (2.43297 + 2.99255) $= \frac{1}{2} \times 5.42552 = 2.71276$, adeoque BC $= 516$, ut prius.

103. Superest monendum tantummodo in casu 3, si basis non fuerit major latere, casum fore impossibilem, ut patet ex eo, quod basis debeat habere quadratum æquale summæ quadratorum laterum. Sed id ipsum calculus quoque indicaret. Nam si assumeretur basis AC æqualis lateri AB, sinus anguli C obveniret æqualis radio, & proinde angulus ipse rectus, ac angulus A nullus. Si autem assumeretur basis minor latere, sinus ille prodiret radio major, quod est absurdum.

De

§.II.

De triangulis obliquangulis.

104. TRes alii canones exhibebunt solutionem triangulorum obliquangulorum. At primum in quovis triangulo obliquangulo ACB (fig. 8, & 9) habito quovis latere, ut AB, pro basi, concipiatur demissum ab angulo ipsi opposito C perpendiculum CI in ipsum latus, quod cadet intra basim, si uterque angulus ad basim acutus fuerit, ut in fig. 8, & extra ipsam, si alter fuerit obtusus, ut in fig. 9.

105. Binas rectas AI, BI dicimus segmenta basis etiam in casu figuræ 9, in quo I cadit extra basim ad partes B, quo casu segmentum BI consideramus, ut negativum. Quamobrem si sumatur ID æqualis, & opposita BI, in utroque casu dicimus AB summam, AD differentiam ipsorum segmentorum, quæ differentia in casu figuræ 9 erit major quam summa. Segmentum AI dicimus adiacens lateri AC, & angulo A, ac oppositum lateri BC, & angulo C; contra vero segmentum BI adiacens his, oppositum illis.

106. Patet vero hoc Theorema. *Segmentum majus lateri majori adjacet*. Quadratum enim segmenti cum quadrato perpendiculi CI utrobique communi æquatur quadrato lateris adiacentis, ob angulos ad I rectos. En autem ipsos canones.

107. IV. *In quovis triangulo latera sunt, ut sinus angulorum oppositorum.*

108. Nam in triangulo rectangulo AIC, per can. II.,

can. II., est AC ad IC, ut radius ad sinum anguli CAI, vel CAB, ac in triangulo BIC est IC ad BC, ut sinus anguli CBI, qui etiam in fig. 9. est idem ac sinus CBA (per num. 9) ad radium. Quare ex æqualitate perturbata est (per num. 21, cap. 2. Arith.) latus AC ad latus BC, ut sinus anguli CBA oppositi primo ad sinum CAB oppositi secundo.

109. V. *In quovis triangulo summa binorum laterum ad differentiam est, ut tangens semisummæ angulorum ad basim, quæ æquatur complemento dimidii anguli lateribus intercepti, ad tangentem semidifferentiæ.*

100. Cum enim sint ea latera, ut sinus angulorum oppositorum; erit eorum summa ad differentiam, ut summa eorum sinuum ad differentiam, nimirum (per num. 31) ut tangens semisummæ eorum angulorum, ad tangentem semidifferentiæ. Cum vero omnes simul anguli conficiant 180°, binorum dimidium, cum dimidio tertii continet 90°; ac proinde binorum semisumma, est complementum dimidii tertii.

111. VI. *In quovis triangulo summa segmentorum basis, sive basis ipsa est ad summam laterum, ut horum differentia ad differentiam illorum.*

112. Nam ob DI = BI, & CI communem triangulis rectangulis CID, CIB, erit (per pr. 2. Geom.) etiam CD = CB. Quare circulus centro C, & radio CB descriptus transibit per D. Secabit autem AC productam, quantum opus fuerit, in E versus A, & in F ad partes oppositas, eritque AF summa, AE differentia laterum AC, CB, ac erit AB . AE : : AF . AD (per pr. 13, & 10 Geom.)

PRO-

PROBLEMA.

113. Tribus datis in triangulo obliquangulo, reliqua invenire.

114. *Casus* 1. Si dentur tres anguli; perinde erit, ac si dentur bini tantum; tertius enim invenitur, si eorum summa auferatur a 180. Porro in eo casu solum invenitur ratio laterum, quæ per can. IV. est eadem, ac ratio sinuum angulorum oppositorum.

115. *Casus* 2. Dentur bini anguli, & unum latus. Tertius angulus invenitur per num. 114. Tum utrumvis e reliquis lateribus invenitur per can.IV, si fiat, ut sinus anguli oppositi lateri dato ad sinum anguli oppositi lateri quæsito, ita latus datum ad quæsitum.

116. *Casus* 3. Dentur bina latera cum angulo alteri eorum opposito. Invenietur per can.IV, sinus anguli oppositi alteri lateri dato, factis ut primum illud latus ad hoc secundum, ita sinus anguli dati ad sinum anguli quæsiti. Invento sinu, eruentur e tabulis (per num.83) bini anguli ipsi respondentes, alter acutus alter obtusus, complementum acuti ad 180°.

117. Hinc binas hic casus solutiones habere poterit, & ambiguus sæpe erit, quod in ipsa Fig.8 est manifestum, in qua triangula ACB, ACD, habent eandem magnitudinem laterum AC,CB, & AC,CD, ac eundem angulum A oppositum lateri CB. Angulus autem acutus CBD, cum æquetur (per Cor.2. prop.2. Geom.) angulo CDB, est complementum ad duos rectos anguli CDA.

118. Quare aliunde definienda erit species alterius

terius anguli oppositi alteri e lateribus datis, nimirum an is debeat esse acutus, an obtusus, & si forte latus oppositum angulo dato fuerit majus altero latere, constabit assumendum esse angulum acutum. Si enim is obtusus esset, multo magis deberet esse obtusus alter angulus lateri majori oppositus, & in triangulo bini anguli binos rectos excederent.

Invento autem secundo angulo, invenietur tertius, & ejus ope tertium latus (per num. 115).

119. *Casus* 4. Dentur bina latera cum angulo intercepto. Invenietur utervis reliquorum angulorum factis, per can. V, ut summa datorum laterum ad differentiam, ita cotangens dimidii anguli dati ad tangentem anguli, qui, ubi inventus fuerit, additus complemento dimidii anguli dati exhibebit angulum oppositum lateri majori, ablatus exhibebit oppositum minori. Inventis autem angulis invenietur latus tertium, ut in casu II.

120. *Casus* 5. Dentur tria latera. Invenietur quivis angulus, habendo pro basi alterum e lateribus, quibus concluditur. Factis enim prius per can. VI, ut ea basis ad summam reliquorum laterum, ita eorumdem differentia, ad differentiam segmentorum basis, ac hujus dimidio addito semisummæ segmentorum basis, sive dimidiæ basi (per n. 105), vel ab ea ablato, habebitur (per num. 28) segmentum basis majus, vel minus; ac assumendum erit illud, vel hoc (per num. 106), prout latus adjacens angulo quæsito erit majus, vel minus opposito. Tum vero, per can. I, fiat ut latus adjacens ad hoc segmentum, ita radius ad cosinum anguli quæsiti.

121. Por-

121. Porro invento cosinu invenientur bini anguli ipsi respondentes alter acutus, alter obtusus. Assumendus autem erit acutus semper præter casum, in quo segmentum ex subtractione proveniens fuerit adhibitum, & existente semidifferentia majore, quam semisumma, evaserit negativum.

122. Invento angulo opposito uni e lateribus, ope can.IV admodum facile invenitur angulus oppositus cuilibet e binis reliquis.

Scholion.

123. Exempla sibi quisque facile assumet. Unicum afferemus casus quarti. Sint tria latera 745, 647, 421, & quæratur angulus oppositus primo. Fiat basis secundum ex iis 647, & reliquorum summa erit 1166, differentia 324. Factis igitur ut 647 ad 1166, ita 324 ad quartum, prodit 584, cujus dimidium 292 additum, ac ablatum dimidiæ basi 323, exhibet bina segmenta 615, ac 31. Quoniam vero latus adjacens angulo quæsito 421 est minus opposito 745, adhibendum est segmentum minus, nempe 31; ac faciendum, ut latus adjacens 421 ad 31, ita radius ad cosinum anguli quæsiti, cujus cosinus logarithmus erit iccirco = Log.31 + Log. rad. — Log.421 = 1.49136 + 10.00000 — 2.62428 = 8.86708, adeoque angulus respondens tam 85° . 47', erutus e tabulis, quam ejus complementum ad duos rectos: sed assumendus est ipse 85° . 47'; cum differentia segmentorum 584 obvenerit minor, quam summa, sive quam basis 647.

124. Notandum autem, aliquando problema posse evadere impossibile: nimirum in casu 1, & 2, si bini anguli dati simul non sint minores duobus

rectis,

rectis: in casu 4 si latus oppositum angulo dato sit nimis exiguum, nimirum minus perpendiculo CI: in casu 5, si bina latera data simul tertio majora non sint. At in omnibus iis casibus impossibilitatem manifestabit ipse calculus; vel enim sinus aliquis obveniet radio non minor, vel aliqua secans eodem non major, vel aliquod segmentum non minus latere adjacente. In solo casu 4 problema est semper possibile.

PARS TERTIA.

De resolutione triangulorum sphæricorum.

§. I.

De angulorum, & triangulorum sphæricorum natura, & proprietatibus quibusdam.

Definitio 1.

125. Circuli, quorum plana transeunt per centrum sphæræ, dicuntur circuli sphæræ maximi.

126. Maximos revera esse patet ex num. 142 Solid.

Coroll. 1.

127. Circuli maximi se omnes mutuo bifariam secant, & communis intersectio planorum eorumdem est diameter sphæræ.

128. Cum enim omnium plana per centrum transeant; sibi occurrunt in ipso centro; ac proinde parallela non sunt; adeoque se invicem secant in aliqua

qua recta, quæ cum transeat, per centrum sphæræ, quod ipsis commune est (per num. 142. Solid.); ipsa eorum planorum intersectio, & erit diameter eorum circulorum, quos proinde secabit bifariam, & erit diameter sphære.

Coroll. 2.

129. Per quævis bina puncta assumpta in superficie sphære potest duci circulus maximus, & per quodvis punctum potest duci circulus maximus cujus planum sit perpendiculare plano dati circuli maximi.

130. Patet primum, quia per data duo puncta, & centrum potest duci planum (per num. 7. Solid.) cujus sectio cum superficie sphæræ erit circulus (per num. 142. Solid.), & maximus (per num. 124), ac transibit per data puncta,

131. Patet secundum, quia ex illo dato puncto potest demitti perpendiculum in planum dati circuli maximi, (per num. 45 Solid.) & per ipsum, ac centrum potest duci planum (per num. 73. Solid.), cujus sectio erit circulus maximus, ac ejus planum erit perpendiculare plano dati circuli maximi (per num 64 Solid.).

Definitio 2.

132. Diameter sphæræ perpendicularis plano circuli orti ex sectione sphæræ in ipsius sphæræ superficie, dicitur ejus axis, & extrema axis puncta dicuntur poli.

133. In fig. 10 P*p* est axis circulorum EFH, ABD, quorum plana pertundit in G, & C ad angulos rectos: P, *p* sunt eorumdem poli.

Coroll. 1.

134. Axis transit per centrum circuli, cujus est axis.

135. Si circulus sit maximus, patet; cum axis transeat per centrum sphæræ (per num. 132), cum quo quivis circulus maximus commune centrum habet (per num. 142 Solid.).

136. Si autem circulus non sit maximus, ductis ad bina quævis ejus puncta F, H rectis ex C, & ex occursu axis G cum ejus plano, erunt recti anguli CGF, CGH (per num. 13. Solid.), cum nimirum axis sit perpendicularis plano FGH (per num. 132). Quare quadrata GF, GH, erunt (per prop. 7. Geom.) excessus quadratorum æqualium CF, CH supra quadratum CG, adeoque æqualia; & proinde quævis GF æqualis eidem GH, & G centrum circuli.

Coroll. 2.

137. Omnia puncta peripheriæ cujuscunque circuli in superficie sphæræ distant per æquales arcus circulorum maximorum ab eodem suo polo.

138. Si enim assumantur bina ejusmodi puncta quæcunque H, & F, & per ea, ac polum P ducantur circuli maximi (per num. 129) PHp, PFp, & radii HC, FC, HG, FG, patet ex demonstratione præcedentis corollarii fore æqualia triangula GCH, GCF, adeoque & eorum angulos ad C, & proinde etiam arcus PH, PF æquales fore.

Coroll. 3.

139. Circulus maximus ab utrolibet suo polo distat quaquaversus per quadrantem circuli maximi, & circulus, cujus aliquod punctum distat a polo

polo suo per quadrantem circuli maximi, est maximus.

140. Si enim circulus fuerit maximus, ut ABD, transibit per centrum C, & radii CB, CD, qui erunt ejus intersectiones cum planis PFp, PHp, erunt perpendiculares axi PCp, qui toti plano BCD perpendicularis est; ac proinde tam arcus PB, PD, quam pB, pD erunt quadrantes.

141. Si autem circulus non fuerit maximus ut EFH; non transibit ejus planum per centrum; ac proinde secta (per num. 50 Solid.) sphæra per centrum plano ABD parallelo ipsi EFH, erunt PB, PD, pB, pD quadrantes; adeoque PF, PH minores iis, & pF, pH majores erunt. Nullum igitur punctum circuli non maximi distat per quadrantem a suo polo; adeoque is, cujus aliquod punctum ita distat, maximus est.

Definitio 3.

142. Angulus sphæricus dicitur is, quem in superficie sphæræ continent bini arcus circulorum maximorum, ubi concurrunt, pro cujus mensura ipsi æquali consideratur angulus rectilineus, quem continent rectæ jacentes cum iisdem arcubus in iisdem planis, & ad easdem partes, ac eos tangentes in ipso concursu.

143. FPH est angulus sphæricus, cui substituitur pro ejus mensura angulus rectilineus *f*P*b*, quem continent tangentes *f*P, *b*P in P.

Coral. 1.

144. Si arcus supra arcum cadit, duos angulos facit aut rectos, aut simul duobus rectis æquales.

145. Nam tangens *f*P cum tangente *eb* duos angulos

gulos facit, aut rectos, aut duobus rectis æquales (per cor. 2. def. 10 Geom.).

Coroll. 2.

146. Si bina anguli latera ultra verticem producantur; angulos ad verticem oppositos æquales continebunt.

147. Si enim tangentes *f*P, *b*P producantur ultra verticem P, continebunt angulos ad verticem P æquales (per cor. 4. def. 10. Geom.).

Coroll. 3.

148. Si plana laterum fuerint sibi invicem perpendicularia; angulus erit rectus: & si angulus fuerit rectus; plana laterum erunt sibi invicem perpendicularia.

149. Si enim planum FP*p* fuerit perpendiculare plano HP*p*; tangens *f*P, quæ est perpendicularis diametro P*p* (per cor. 5. & 6. prop. 8. Geom.) communi intersectioni eorum planorum, erit (per n. 66. Solid.) perpendicularis toti plano HP*p*, adeoque & tangenti P*b*.

150. Si autem tangens *f*P fuerit perpendicularis tangenti P*b*, cum etiam sit perpendicularis diametro P*p* (per cor. 5. pr. 8. Geom.), erit (per num. 18. Solid.) perpendicularis toti plano HP*p*, ac proinde & planum FP*b* erit (per num. 64 Solid.) perpendiculare eidem.

Coroll. 4.

151. Si è quovis puncto diametri transeuntis per verticem anguli exeant in planis arcuum, quibus continetur, binæ rectæ ipsi perpendiculares; angulum continebunt rectilineum sphærico æqualem.

152. Si enim ejusmodi rectæ fuerint GF, GH, erunt

erunt eæ (per Cor. 1. def. 17. Geom.) parallelæ rectis Pf, Pb perpendicularibus eidem diametro Pp; ac proinde angulus FGH erit (per num. 41 Solid.) æqualis angulo fPb.

Coroll. 5.

153. Angulus sphæricus est æqualis angulo, quem continent plana arcuum continentium ipsum angulum sphæricum.

154. Nam eorum planorum angulum, sive inclinationem plani ad planum exhibet idem angulus rectilineus FGH (per num. 57. Solid.).

Coroll. 6.

155. Mensura æqualis angulo sphærico erit arcus circuli cujuscumque habentis polum in ejus vertice interceptus inter ejus crura.

156. Secta enim sphæra plano quovis ABD, vel EFH perpendiculari ad diametrum Pp, communem intersectionem planorum arcuum PF, PH, sectio erit circulus habens polum in P (per num. 132) cujus arcus BD, vel FH interceptus cruribus PF, PH erit mensura æqualis angulo BCD, vel FGH, qui cum contineatur radiis BC, DC, vel FG, HG perpendicularibus axi Pp, æquatur angulo sphærico FPH (per num. 151).

Coroll. 7.

157. Si anguli sphærici crura producantur; iterum concurrent ita, ut singula semicirculum compleant, & angulum sphæricum contineant priori æqualem.

158. Cum enim PCp sit diameter utriusque arcus PF, PH; debet uterque productus transire per p; eruntque PFp, PHp semicirculi, & angulorum

O 3 FpH,

FpH, FPH mensura erit idem arcus BD, vel PH (per num. 155).

Coroll. 8.

159. Circulus maximus circulo maximo perpendicularis transit per ejus polos, & si circulus maximus transit per polum circuli maximi, est ipsi perpendicularis.

160. Sit enim circulus maximus PBp perpendicularis circulo maximo ABD: erit planum PBp perpendiculare plano ABD (per num. 149). Quare in eo jacebit axis circuli ABD (per num. 66 Solid.), cum sit perpendicularis plano ABD (per num. 133) & transeat per BC intersectionem planorum ABD, PBp. Ac proinde poli, qui sunt extrema axis puncta (per num. 133) jacebunt in ipsa peripheria circuli PBp.

Defin. 4.

161. Triangulum sphæricum dicitur, quod continetur in superficie sphera tribus arcubus circulorum maximorum, qui dicuntur ejus latera.

Coroll. 1.

162. Si in triangulo sphærico bini anguli fuerint recti; latera iis opposita erunt quadrantes: & si bina latera fuerint quadrantes, anguli iis oppositi erunt recti; ac in utroque casu tertium latus erit mensura æqualis tertio angulo sibi opposito.

163. Si enim sint anguli PBD, PDB recti, polus circuli ABD, qui debet jacere in utroque circulo BP, DP (per num. 159), cadet in ipsam eorum intersectionem, sive in anguli verticem P; ac proinde PB, PD quadrantes erunt (per num. 139).

164. Si autem arcus PB, PD fuerint quadran-

tes;

tes; anguli BCP, DCP erunt recti; ac proinde recta CP perpendicularis plano BCD (per num. 18. Solid.): & iccirco plana arcuum PB, PD perpendicularia erunt plano arcus BD, & anguli PBD, PDB recti (per num. 148).

165. In utroque casu, cum P sit polus circuli BD, arcus BD est mensura aequalis angulo BPD (per num. 155).

Coroll. 2.

166. Si omnes anguli fuerint recti; omnia latera erunt quadrantes, & si omnia latera fuerint quadrantes, omnes anguli erunt recti.

167. Si enim etiam tertius angulus fuerit rectus, etiam tertium latus erit quadrans, & viceversa (per num. 165).

Scholion 1.

168. Hinc patet resolutio trianguli habentis omnes angulos, vel saltem binos rectos, in quibus nullum opus est tabulis functionum. Superest igitur ut agamus de triangulis, in quibus unus angulus est rectus, quae dicuntur rectangula, ac de iis, in quibus rectus est nullus, quae obliquangula appellantur. Ac in illis quidem apellatur basis latus illud, quod recto angulo opponitur; in his latus quodcunque pro basi assumi potest.

Scholion 2.

169. Consideratio trianguli sphaerici eodem recidit cum consideratione anguli solidi constituti a tribus angulis planis ut innuimus num. 91 Solid. Consideretur enim in fig. 11. angulus solidus, quem continent tres anguli plani BCD, BCA, ACD, & concipiatur radio CB sphaera occurres eorum angulorum

rum planis in BD, AD, AB. Hi tres arcus continebunt triangulum sphæricum BAD, cujus latera mensurabunt angulos illos planos ad C, anguli vero ad B, D, A, erunt æquales inclinationibus, seu angulis, quæ plana eorundem angulorum continent cum planis contiguis (per num. 153). Quare, quæ demonstrantur de eo angulo solido pertinent ad triangulum sphæricum, & viceversa.

170. Porro hinc, & ex iis, quæ in Solidis a num. 82 de angulo solido vel demonstravimus, vel innuimus inferuntur juxta num. 91 ipsorum solidorum sequentes triangulorum sphæricorum proprietates.

171. In quovis triangulo sphærico, tria latera simul circulo minora sunt; potest autem eorum summa in infinitum minui: at bina quævis tertio majora sunt.

172. Nam anguli plani, ex quibus angulus solidus constat, & simul minores sunt quatuor rectis, (per num. 85 Solid.), & possunt esse magnitudinis cujuscunque dummodo quivis ex iis sit minor reliquis simul sumptis.

173. Ex tribus lateribus quibuscunque potest semper constare triangulum sphæricum, idque unicum; dummodo & omnia simul circulo minora sint, & quodvis ex iis minus reliquis simul sumptis.

174. Id enim ostendimus num. 90 Solid. de angulis planis constituentibus solidum.

175. Trianguli sphærici tres anguli simul & minores sunt sex rectis, & majores binis.

176. Id constat ex num. 91 Solid. Id ipsum autem, ut etiam a tribus angulis eas conditiones im-

plentibus unicum triangulum constitui posse, ac superiora omnia hic accurate demonstrari possent; sed ea omnia, utpote ad resolutionem non necessaria, innuisse sufficiet.

§. II.

De resolutione triangulorum rectangulorum.

177. Resolutionem triangulorum rectangulorum planorum docuimus ope trium canonum. Pro sphæricis duplo plures requiruntur, quos omnes exhibebit consideratio solius figuræ 11.

178. In ea sit jam triangulum BAD rectangulum ad A. Circulus lateris AD sit ADEFL cujus planum concipiatur congruens cum plano ipsius chartæ. Latus AB insistens periphæriæ ADEF verticaliter, & basis DB oblique, si producantur, occurrent ipsi alicubi in E, & F ita, ut AE, DF sint diametri, & ABE, DBF semicirculi. (per num. 157).

179. Concipiatur BC, tum BI perpendicularis plano ADE, quæ cadet in ipsam diametrum AE (per num. 66 Solid.) alicubi in I ad angulos rectos, tum IG perpendicularis diametro DF, ac BG, quæ pariter erit perpendicularis ipsi DF. Nam planum BIG transiens per IB perpendicularem plano ADE erit eidem perpendiculare (per n.64. Solid.). Quare recta GC perpendicularis eorum intersectioni IG jacens in posteriore erit (per n.66. Solid.) perpendicularis priori, nimirum ipsi BIG, adeoque & rectæ BG.

180. Demum sectis semicirculis DAF, DBF bifariam in L, & H, transeat per ipsa puncta L, H arcus circuli maximi (per num. 129.) occurrens semicirculo ABE alicubi in P; eruntque anguli DLH, DHL

DHL recti (per num. 162) ; ac proinde D polus circuli LHP (per num. 159), & LH mensura æqualis angulo ADB (per num. 162). Ob angulos vero ALP, LAP rectos, erit P polus circuli AL, & PA, PL quadrantes (per num. 139.), ac AL mensura æqualis angulo HPB (per num. 162).

181. Jam vero omnis triangulorum sphæricorum resolutio profluit a consideratione pyramidis BIGC, & comparatione triangulorum rectangulorum BAD, BHP. Illa exhibebit tres canones, hæc alios tres, quibus continebuntur omnes casus triangulorum rectangulorum.

182. Primum igitur defigenda mentis acies in pyramidem ipsam. Illa in situ erecto considerata haberet basim IGC in plano chartæ, & verticem in B, at nos jacentem considerabimus ita, ut C sit vertex, basis autem vertici opposita BIG, a qua ad verticem C tendunt tria latera BC, IC, GC, quibus concluduntur tres facies BCI, BCG, ICG.

183. Porro tam illa basis, quam hæ facies sunt triangula plana rectangula. Nam anguli BIG, BIC sunt recti ob BI perpendicularem plano CIG, & anguli CGB, CGI ob CG perpendicularem plano BGI. Angulorum autem rectilineorum, quos illæ tres facies continent in C, nimirum angulorum BCI, BCG, ICG mensuræ ipsis æquales sunt arcus BA, AD, BD; angulus vero rectilineus BGI pertinens ad basim illam pyramidis est (per num. 152) æqualis sphærico BDA.

184. Comparando autem inter se bina triangula sphærica BAD, BHP rectangula ad A, & H, cuivis vel lateri, vel angulo alterius, respondet aliquid

in al-

in altero vel ipsi æquale, vel ejus complementum. Angulo BAD recto primi æqualis est angulus BHP rectus secundi: angulo ABD primi æqualis est (per num. 146) angulus HBP secundi ad verticem oppositus. Angulus ADB primi; quem exhibet LH (per num. 180) habet pro complemento latus HP secundi: latus AB primi habet pro complemento basim BP secundi: latus DA primi habet pro complemento arcum AL, adeoque angulum BPH, quem is exhibet (per num. 180): basis demum BD primi habet pro complemento latus BH secundi.

185. Jam vero priores tres canones eruemus considerando, juxta num. 25, qui hic consulendus, & habendus semper præ oculis, tamquam radium prius CB, tum CG, ac demum CI. Ex prima consideratione orietur in triangulis CIB, CGB, quibus CB communis est, ratio rectarum BG, BI, & alteram earum rationem exhibebit basis BIG, quæ rationes inter se combinatæ præbebunt primum canonem: secundum secunda præbebit ope rectarum BG, IG; tertium tertia ope rectarum GI, BI: sed jam aggrediamur rem ipsam.

186. Habita BC pro radio in triangulis rectangulis CGB, CIB, erunt BG, BI sinus angulorum BCG, BCI, sive sinus basis BD, & lateris BA oppositi angulo sphærico D. At in triangulo BIG rectangulo ad I, eædem BG, BI referunt radium, & sinum anguli rectilinei BGI, seu sphærici D. Quare

187. I. *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi.*

188. Habita CG pro radio in triangulis rectangulis CGB, CGI, erunt GB, GI tangentes angulorum

rum GCB, GCI, sive basis BD, & lateris DA adjacentis angulo D. At in triangulo BIG, eædem GB, GI referunt radium, & cosinum anguli rectilinei BGI, vel sphærici D. Quare

189. II. *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.*

190. Habita CI pro radio in triangulis rectangulis CIB, CGI, erunt IG, IB illa sinus anguli ICG, seu lateris AD adjacentis angulo D, hæc tangens anguli ICB, seu lateris AB eidem oppositi. At in triangulo BIG eædem IG, IB referunt radium, & tangentem anguli rectilinei BGI, seu sphærici *D*. Quare

191. III. *Radius ad tangentem anguli, ut sinus lateris adjacentis ad tangentem oppositi.*

192. Hæc ex pyramide: jam applicando hosce canones ad triangulum BHP, & ipsum comparando cum triangulo BAD orientur tres alii.

193. Ex can.I radius ad sinum anguli BPH, sive arcus AL, nempe ad cosinum lateris AD, ut sinus BP, nempe cosinus lateris AB ad sinum BH, nempe cosinum basis BD. Quare

194. IV. *Radius ad cosinum unius lateris, ut cosinus alterius ad cosinum basis.*

195. Ex eodem can.I radius ad sinum anguli PBH, sive ABD, ut sinus BP, nempe cosinus lateris AB adjacentis ipsi angulo ABD, ad sinum PH, nempe cosinum HL, sive cosinum anguli sphærici D, quem is exhibet, & qui opponitur lateri AB. Quare

196. V. *Radius ad sinum anguli adjacentis, ut cosinus lateris ad cosinum anguli oppositi.*

197. Ex

197. Ex can.III Radius ad tangentem anguli B, ut ſinus BH, ſeu coſinus baſis BD ad tangentem HP, nempe cotangentem HL, ſive anguli D. Quare

198. VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut coſinus baſis ad cotangentem alterius.*

199. In hiſce 6 canonibus continentur combinationes omnes, quæ haberi poſſunt, ſumendo tria ex iis quinque, quæ præter angulum rectum continet quodvis triangulum rectangulum, nimirum binis angulis, binis lateribus, ac baſi, ut paulò inferius patebit. Poſſent applicando canonem III etiam ad angulum P, & canonem II tam ad P, quam ad B, erui alii tres canones, qui tamen eaſdem combinationes iterum redderent, ac ad canones præcedentes facile reducerentur, ac iccirco eos omiſimus.

200. Porro in triangulorum reſolutione ope horum canonum invenietur ſemper aliqua functio baſis, vel lateris, vel anguli quæſiti, ut jam videbimus. At quoniam (per num.9) functiones eædem communes ſunt binis arcubus ſemicirculum complentibus, quorum alter eſt quadrante minor, alter major, neceſſariæ ſunt quædam Regulæ, quæ oſtendant, utram ſpeciem habere debeant anguli, & arcus quæſiti, nimirum acuti debeant eſſe, an obtuſi, ſive minores, an majores quadrante. Binas autem ejuſmodi regulas, quæ ſemper ſpeciem indicabunt, quotieſcunque in ſe determinata erit, ex fig.12. admodum facile eruemus.

201. Manentibus in ea punctis ABPDE, ut in fig.11, per polum P, & punctum D ducatur arcus circuli maximi (per num.129), qui erit perpendicularis

cularis ad ADE (per num.159), & semicirculo ADE secto bifariam in I, quod punctum erit polus circuli ABE, cum poli ejus circuli debeant esse in circulo ADE (per num.159), ac debeant per quadrantem distare ab eodem ABE (per num.139), ducatur arcus BI, qui erit quadrans (per n.139). Ducatur demum arcus B*d* per quodvis punctum semicirculi ADE jacens respectu I ad partes oppositas D, & polo B fit arcus circuli FI*f* occurrens arcubus BD, B*d* in F, *f*, qui ob BI quadrantem erit circulus maximus (per num.139), & (per eundem) abscindet BF, B*f* quadrantes, ac constituet angulos BIF, BI*f* rectos (per num.159).

202. Jam vero si latus AB sit minus quadrante AP; erit angulus ADB minor semper recto ADP, cujus erit pars: si autem illud sit majus, erit major: & hic, utcunque se habuerit alterum latus AD. Quare

203. Reg.1. *Latera sunt ejusdem speciei cum angulis oppositis.*

204. Si latus AB sit minus quadrante AB, erit angulus BIA, sive (existente etiam AD minore quadrante AI) BID minor recto per Reg.1, adeoque minor angulo BIF, angulus vero BI*d* major, recto BI*f*, & propterea basis BD minor quadrante BF, & basis B*d* major quadrante B*f*. In triangulis igitur BAD, BED, ubi latera sunt ejusdem speciei, basis est quadrante minor: in triangulis BA*d*, BE*d*, ubi ea sunt diversæ speciei, basis est quadrante major. Quoniam vero per reg.1 anguli sunt ejusdem speciei cum lateribus oppositis, possunt pro illis substitui, ubi agitur de eorum specie. Quare

205. Reg.2.

205. Reg.2. *Si duo latera, vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei; basis erit quadrante minor; si diversæ, major, & viceversa.*

PROBLEMA.

206. In triangulo rectangulo sphærico datis aliis binis præter angulum rectum reliqua invenire.

207. Ut quæstioni satisfiat, oportet arcus, vel anguli quæsiti invenire functionem aliquam, tum nosse utrius speciei sit.

208. Primum semper obtinebitur ope canonum. Nam in triangulo rectangulo præter angulum rectum habentur hæc quinque, basis, bina latera, bini anguli. Ea quinque sex tantum combinationes habent, quarum singulis terna ex iis contineantur; videlicet: 1. continetur basis cum utroque latere: 2.ª basis cum utroque angulo: 3.ª basis cum latere, & angulo adjacente: 4.ª basis cum latere, & angulo opposito: 5.ª utrumque latus cum altero angulo: 6.ª uterque angulus cum altero latere. Quotiescunque autem dantur bina quævis, & quæritur quodvis tertium, semper ea data, & id quæsitum erunt simul in una ex iis combinationibus; ut si detur basis cum altero latere, & quæratur angulus illi lateri adjacens; ea tria sunt simul in combinatione 3. Porro singulæ ejusmodi combinationes singulis canonibus continentur; sic illa combinatio tertia continetur in canone secundo: *Radius ad sinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis*, ac in eo canone, in quo ea combinatio continetur, habebitur radius, & binæ functiones binorum, quæ dantur, ut in allato exemplo habebitur tangens basis,

basis, & sinus anguli, ac simul aderit aliqua ejus functio, quod quæritur, ut ibidem tangens lateris adjacentis. Quare dabuntur tres termini proportionis eo canone inclusæ; ac proinde eruetur & quartus terminus, sive functio quæsiti arcus, vel anguli, (per num. 10. cap. 2. Arithm.), dividendo nimirum, si quæsita functio fuerit in uno ex terminis extremis, productum mediorum per alterum extremum, vel si ea fuerit in uno e mediis, productum extremorum per alterum e mediis, & ubi logarithmi adhibeantur, substituendo multiplicationi, ac divisioni additionem, & subtractionem.

209. Secundum semper obtinebitur per regulas, præter casum, in quo dentur alterum latus cum angulo opposito, & quæratur quodvis ex reliquis tribus. Is enim casus semper ambiguus erit, & binas solutiones admittet, ac quidvis e reliquis tribus esse poterit vel majus, vel minus quadrante. Nam in triangulis BAD, BAF (Fig. 11) rectangulis ad A, quamcunque magnitudinem habeat, latus AB est commune utrique, & angulus ADB ipsi oppositus in primo æquatur angulo AFB eidem opposito in secundo: basis auem BF, alterum latus AF, & alter angulus ABF posterioris sunt complementa ad duos rectos basis BD, lateris AD, anguli ABD prioris; ac proinde si detur latus AB, & angulus ipsi oppositus, vi eorum tantummodo, ambiguum erit, uter e binis illis triangulis sumendus sit. Porro solum in iis casibus, in quibus detur latus cum angulo opposito illæ regulæ nos destituunt, nec determinant speciem anguli, vel arcus quæsiti, quam determinant in cæteris omnibus.

Si enim

Si enim ex. gr. datis binis lateribus, quæratur angulus alteri oppositus; ejus species innotescet per reg. 1, cum debeat esse eadem, ac species data lateris oppositi dati. At si quæratur basis; ejus species invenietur per reg. 1, cum debeat deficere a quadrante, vel illum excedere, prout bina latera data fuerint ejusdem speciei, vel diversæ.

Scholion 1.

210. Ut pateat illud semper haberi per canones, hoc semper per regulas; subjiciemus indicem combinationum, & canonum, quibus ipsæ combinationes continentur, ac regularum, quarum ope in singulis combinationibus invenietur species: & quoniam secunda regula tres habet partes; earum singulas exprimemus.

1. *Basis cum utroque latere.*	*Can.*4. *Reg.*2. *pars* 1.
2. *Basis cum utroque angulo.*	*Can.*6. *Reg.*2. *pars* 2.
3. *Basis cum latere, & angulo adjacente.*	*Can.*2. *Reg.*2. *pars* 3.
4. *Basis cum latere, & angulo opposito.*	*Can.*1. *Reg.*1, *vel nulla in casu ambiguo.*
5. *Utrumque latus cum altero angulo.*	*Can.*3. *Reg.*1, *vel nulla in casu ambiguo.*
6. *Uterque angulus cum altero latere.*	*Can.*5. *Reg.*1, *vel nulla in casu ambiguo.*

211. Ut methodus resolvendi casum quemlibet illustretur exemplo, detur basis $= 57^\circ . 25'$. cum latere $= 41^\circ . 16'$., & quæratur angulus adjacens

ipsi lateri. Tria, quæ hic combinantur sunt basis cum latere, & angulo adjacente, quorum priora duo dantur, tertium quæritur. Huic combinationi, quæ est tertia, respondet Canon secundus, & regulæ secundæ pars tertia. In eo canone habetur *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.* Quare Log. cosinus anguli = Log. rad. + Log. tang. 41° . 16′ — Log. tang. 57° . 25′. = 10.00000 + 9.94323 — 10.19445 = 9.74878, cui respondet in tabulis 55° . 54′. Quoniam autem eidem combinationi respondet Reg. 2. pars 3., inde species determinabitur. Ibi enim habetur: *si latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei, basis erit quadrante minor, & viceversa*. Nimirum cum hic basis 57° . 25′ sit minor qadrante; latus cum angulo adjacente erunt ejusdem speciei. Est autem latus 41° . 16′ quadrante minus. Erit igitur recto minor & angulus quæsitus; adeoque sumendus erit ille ipse 55° . 54′, quem exhibent tabulæ, non ejus complementum ad duos rectos.

213. Singulæ combinationes continent terna Problemata, cum nimirum quodlibet ex iis tribus possit quæri, datis reliquis binis. Sic in combinatione, qua in exemplo allato usi sumus, posset potius quæri latus data basi & angulo adjacente, vel quæri basis, dato latere, & angulo adjacente. Eo pacto cum habeantur sex combinationes, Problemata essent 18. Sed bina Problemata primæ, & secundæ combinationis, coincidunt inter se; ac ejusmodi combinationes bina singulæ Problemata inter se diversa complectuntur. Nam in prima utrumlibet latus quæratur data basi, & altero latere, eodem res redit,

redit, ut in secunda idem dicendum de angulis; ac proinde omnis triangulorum rectangulorum resolutio continetur 16 Problematis, quæ iis combinationibus includuntur. Postremæ tres combinationes habent singulos singulæ casus ambiguos, cum nimirum dato latere & angulo opposito possit quæri basis in 4ª, latus alterum in 5ª, alter angulus in 6ª, in quibus tantum, ut supra monuimus deserimur ab iis regulis cæteros omnes complectentibus.

Scholion 2.

213. Addemus hoc secundo scholio quædam, quæ facile eruuntur è canonibus, & ostendunt, qui casus possint involvere impossibilitatem, quæ tamen, ut minus necessaria, omittere etiam Tyro poterit, si libuerit.

214. Basis in triangulo rectangulo non potest distare a quadrante magis quam latus utrumlibet.

215. Infertur e primo canone, in quo Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi. Cum enim radius non possit esse minor sinu ullius anguli (per num. 39); sinus basis non potest esse minor sinu lateris oppositi: æque autem facile infertur ex canone 2, vel 4:

216. At basis ipsa respectu anguli utriuslibet potest habere magnitudinem quamcumque.

217. Infertur ex can. 6, in quo radius ad tangentem unius anguli, ut cosinus basis ad cotangentem alterius. Cum enim radius possit habere (per num. 39) quamcunque rationem ad tangentem unius anguli, potest, & cosinus basis habere pariter quamcunque ad cotangentem alterius.

218. Patet autem etiam ex eo, quod capta ut-

cunque basi DB, & facto utcunque angulo BDA, possit semper (per núm. 129) duci ex B circulus perpendicularis circulo DAF, qui ubi semicirculum DAF secabit in A, constituet triangulum rectangulum.

219. Angulus non potest distare a quadrante minus, quam latus oppositum.

220. Infertur ex canone I. ubi alternando est radius ad sinum basis, ut sinus lateris, ad sinum anguli oppositi. Patet enim sinum lateris non posse esse minorem sinu anguli oppositi, ut radius non potest esse minor sinu basis. Idem æque facile deducitur ex can.3. pariter alternando, vel ex can.5.

221. Bini anguli simul debent esse majores uno recto.

222. Infertur ex can.5. ubi alternando est radius ad cosinum lateris ut sinus anguli adjacentis ad cosinum oppositi. Cum enim radius debeat esse major cosinu lateris, etiam sinus unius anguli debebit esse major cosinu alterius. Quare si uterque sit acutus alter debebit esse major complemento alterius; adeoque ambo simnl rectum excedent. Si vero neuter acutus est; patet utrumque simul debere rectum excedere. Idem inferri posset ex can. 6. pariter alternando: & idem infertur etiam ex n.175. Cum nimirum omnes tres anguli simul debeant duobus rectis majores esse, & unus jam rectus sit; non possunt reliqui duo simul non esse majores recto.

223. Angulus respectu lateris adjacentis potest habere magnitudinem quancunque.

224. Infertur ex can. 2, in quo est radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris

teris adjacentis. Assumptis enim utcunque basi, & angulo; invenietur tangens lateris adjacentis; & nulla tangens est impossibilis utcunque magna, vel parva.

225. Patet autem etiam ex eo, quod capto utcunque latere AB, & facto quovis angulo ABD, semper arcus BD occurret arcui ADE alicubi in D, & triangulum constituet.

226. Angulum autem respectu basis posse habere magnitudinem quamcumqùe diximus num. 216.

227. Latus non potest distare a quadrante minus quam basis, nec magis quam angulus oppositus, respectu vero anguli adjacentis & alterius lateris potest habere magnitudinem quamcumque.

228. Patet primum ex num. 214, secundum ex num. 219, tertium ex num. 223, quartum infertur ex can. 3, in quo quicumque fuerit sinus alterius lateris, invenietur tangens alterius, quæ impossibilis esse non potest, ac ex can. 5, in quo cosinus lateris utriuslibet semper proveniet minor radio adeoque possibilis.

229. Ex his patebit, qui casus possint impossibilitatem involvere qui semper possibiles sint. Id vero obtinebitur percurrendo alias sex combinationes, quæ contineant bina quævis, quæ dari possunt ex illis quinque.

230. Data basi, & altero latere, Problema erit impossibile, si basis data distet a quadrante magis, quam latus (per num. 214).

231. Data basi & altero angulo, Problema erit semper possibile (per num. 216).

 232. Da-

232. Datis binis angulis, erit impossibile, si eorum summa rectum non superet (per num. 221).

233. Dato angulo, & latere opposito, erit impossibile, si angulus distet a quadrante minus, quam latus oppositum (per num. 219).

234. Dato angulo, & latere adjacente, erit semper possibile (per num. 223).

235. Datis binis lateribus, erit semper possibile (per num. 227).

236. Atque in omnibus hisce combinationibus continentur iterum illa eadem Problemata, quæ in prioribus: nam singulæ terna continent, cum datis iis binis, quæri possit quodlibet e tribus reliquis, ac in tertia & sexta coincidant bina Problemata, ubi datis binis angulis quæritur latus utrumlibet, vel datis binis lateribus, quæritur uterlibet angulus.

237. Quoniam autem in omnibus Problematis invenitur functio per canones, & species per regulas præter combinationem quartam numeri 233, in qua datur latus cum angulo opposito, quæ speciem indeterminatam relinquit juxta num. 209, omnia ejusmodi Problemata unicam admittunt solutionem, ac angulum, vel arcum determinant, præter illa tria in ea quarta combinatione inclusa, quæ non determinant speciem, & proinde binas singula solutiones admittunt.

238. Porro quotiescumque Problema erit impossibile; id ipsum calculus etiam trigonometricus ostendet, ut monuimus num. 123. Detur ex. gr. basis 57° . 0′, latus vero 76° . 0′. & quæratur angulus illi lateri oppositus. Tria quæ hic combinantur sunt basis cum latere, & angulo opposito, quæ in

indi-

indice combinationum numeri 210 est quarta, & ipsi respondet canon 1, in quo habetur: *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi*. Quare erit Logarithmus sinus anguli quæsiti = Log. rad. + Log. sin. 76° . 0′ − Log. sin. 57° . 0′ = 10.00000 + 9.98690 − 9.92359 = 10.06331, qui Logarithmus est major quovis sinuum Logarithmo in tabulis, cum sit major quam 10.00000 Logarithmus radii, adeoque requirit sinum radio majorem, qui est impossibilis, & Problematis impossibilitatem evincit. Eam autem facile erat deprehendere ex num. 230; cum nimirum basis data 57° . 0′. magis distet a quadrante, quam latus oppositum 76° . 0′.

Scholion 3.

239. Iidem canones exhibent alia quoque theoremata sanè multa, in quibus eruendis Tyronem poterit exercere Præceptor, ut ea omnia, quæ de triangulis habentibus plusquam unum angulum rectum diximus, & alia, quæ addi possent. At iis omissis addemus pauca quædam usui futura in consideratione casuum quorundam ambiguorum, vel impossibilium in triangulis obliquangulis.

240. In fig. 12. si ex polo P circuli ADE ducatur ad quovis punctum D arcus PD circuli maximi; is semper erit quadranti æqualis (per num. 139), & cum eo angulum rectum constituet (per num. 159) ac proinde mutato utcunque loco puncti D per totum circulum AIEA, & magnitudo arcus PD, & angulus cum peripheria AIEA manebunt semper magnitudinis ejusdem = 90°. At si sumatur quodcumque aliud superficiei sphæricæ punctum B, & ducatur arcus BD; mutato situ puncti D mutatur &

magnitudo arcus ejusdem, & ejus inclinatio ad circulum ADE. Non erit abs re contemplari mutationes omnes, quæ accidunt illi arcui, & angulo.

241. Si per B, & P ducatur arcus circuli maximi, qui occurret circulo AIE*i* alicubi in A, & E ad angulos rectos (per n. 159), existente A ad partes B respectu P, ac bini semicirculi AIE, A*i*E secentur bifariam in I, & *i*, qui erunt poli ipsius circuli APE, juxta num. 139; puncto D abeunte in A, arcus BD erit æqualis ipsi BA, & omnium minimus, tum puncto D recedente utralibet ex parte versus E, perpetuo crescet, donec abeunte D in I, vel *i* fiet quadrans, ac demum abeunte D in E fiet æqualis ipsi BE, & omnium maximus.

242. Id facile deducitur ex can. 4. Nam in triangulo BAD ex eo can. erit radius ad cosinum lateris BA, ut cosinus lateris AD ad cosinum basis BD. Quare stante latere BA, & mutato latere AD, ita mutabitur basis BD, ut cosinuum ratio sit semper eadem; ac proinde decrescente complemento arcus AD per ejus continuum incrementum, usque ad I, vel *i* decrescet etiam complementum basis BD, quæ proinde perpetuo crescet: ac complementis simul evanescentibus ibidem, simul fient quadrantes, tum crescente perpetuo ab I, & *i* usque ad E complemento arcus AD, crescet perpetuo etiam complementum arcus BD, qui proinde pariter crescet.

243. Patet autem ex eadem demonstratione, tam versus I, quam versus *i* æque crescere arcum BD in æqualibus distantiis puncti D, hinc inde ab A.

244. Quare omnium arcuum, qui ex puncto B assumpto in superficie sphæræ applicari possunt ad peri-

peripheriam circuli AIE*i*, cui hemisphærium insistit, maximus est BPE, qui transit per polum P, minimus BA ipsi oppositus, reliqui eo minores, quo magis ad minimum accedunt, ac bini tantum hinc inde in æquali distantia a puncto A, vel E inter se æquales applicari possunt.

245. Si igitur ex puncto dato B oporteat applicare arcum datum, is applicari non poterit, si fuerit minor, quam AB, vel major, quam BE, nimirum si distiterit a quadrante magis, quam utervis ex arcubus AB, BE: poterit applicari in unica positione, si æque distiterit, in binis hinc inde a perpendiculo, si distiterit minus, & eo propius punctis I, *i*, quo fuerit quadranti propior.

246. At angulus quem arcus BD continebit cum circulo ADE, puncto D abeunte in A erit utrinque rectus; tum abeunte D versus I vel *i*, erit semper BDA acutus versus A, BDE obtusus versus E, & ille perpetuo crescet, hic decrescet donec in I vel *i* fiat ille minimus hic maximus, existente illius mensura AB, hujus BPE; deinde vero usque ad E ille iterum crescet, hic decrescet, ac abeunte D in E, iterum uterque fiet rectus.

247. Id facile deducitur ex can. 3. Nam ex eo erit radius ad tangentem anguli ADB, ut sinus lateris AD, ad tangentem lateris AB. Quare mutato utcunque puncto D, productum ex sinu lateris AD, & tangente anguli BDA erit semper idem; adeoque illius sinu crescente, vel decrescente, hujus tangens contra decrescet, vel crescet. Sinus autem illius perpetuo crescet donec ipse fiat in I vel *i* quadrans, tum decrescet, adeoque e contrario hujus tangens decre-

decrescet usque ad I, vel *i* tum crescet. Quare etiam angulus ex ea parte, ex qua erit acutus decrescet usque ad I, vel *i*, tum crescet, & ex altera parte, ex qua erit obtusus crescet, tum decrescet. Facto autem AD in I, vel *i* quadrante, ejus sinus æquatur radio; adeoque hoc ipso canone tangens ejus anguli æquabitur tangenti arcus AB, vel BE, & ipsi arcus AB, BE erunt mensura angulorum BDA, BDE in illo casu, quod etiam constat ex n. 155, cum D in eo casu abeat in I polum circuli ABE.

248. Patet autem etiam in æquali distantia punctorum D, *d* hinc inde ab I, vel ab *i* angulos hinc BDA, B*d*A, inde BDE, B*d*E æquales fore. Bini enim arcus AD, A*d* æquabuntur duplo quadrantis AI, sive semicirculo, adeoque sinus arcuum AD, A*d* æquales erunt; ac proinde & tangentes angulorum BDA, B*d*A eandem habebunt magnitudinem.

249. Quare omnium angulorum, qui ad circulum AIE*i* fieri possunt per arcus ductos ex B, minimum versus A metitur AB, maximum versus E metitur BE, & uterque ab eo limite ita recedit, ut in rectum desinat.

250. Si igitur ex puncto dato B oporteat applicare arcum, qui contineat angulum BDA, vel BDE datum; is applicari non poterit, nisi, qua parte respicit perpendiculum minus AB, sit acutus, ex parte perpendiculi majoris obtusus: nec pariter applicari poterit, si distet a recto magis, quam utervis arcuum BA, BE a quadrante: poterit autem in I, & *i* tantum, si æque distiterit: ac in binis positionibus æque remotis hinc inde tam ab I, quam ab *i*, si distiterit minus, eoque propius punctis A, E, quo fuerit propior recto.

De

§. III.

De resolutione triangulorum obliquangulorum.

251. Triangula obliquangula reducuntur ad rectangula ope perpendiculi demissi ex angulo aliquo in latus oppositum habitum pro basi, ut in triangulis planis. Sit ejusmodi triangulum (in fig. 13) ABD: Assumpto pro basi latere AD, occurrant ejus circulo in *a*, & *d* semicirculi arcuum AB, DB productorum. Per punctum B ducatur circulus perpendicularis circulo AD *ad* (per num. 129), qui ei occurret in binis punctis e diametro oppositis, adeoque jacebit altera intersectio E in semicirculo AD*a*, altera *e* in *ad*A. Secentur demum semicirculi E*ae*, EA*e* bifariam in I, *i*.

252. Triangulum ABD, ope perpendiculi BE reducitur ad bina triangula rectangula ABE, DBE, ubi sive ipsum perpendiculum BE cadat intra basim, ut figura exhibet, sive extra, ut in triangulo AB*d*, dicimus AE, ED segmenta basis, ABE, DBE, segmenta verticis, & AE, ABE adjacentia lateri AB, & angulo A, ac opposita lateri BD, & angulo D, contra vero DE, DBE illis opposita, his adjacentia.

253. Porro ope priorum sex canonum eruemus alios 7 pertinentes ad hæc segmenta, latera, & angulos, ubi quidquid dicemus de triangulo ABD, habet locum in reliquis tribus triangulis AB*d*, *a*BD, *a*B*d*, dummodo majoribus litteris apte substituantur minores.

254. Ex can. 1. Radius ad sinum anguli A, ut sinus AB ad sinum BE. Ex eodem alternando, est sinus anguli D ad radium, ut sinus BE ad sinum DB. Igi-

Igitur ex æqualitate perturbata ſinus D ad ſinum A, ut ſinus AB ad ſinum BE. Quare

255. VII. *Sinus angulorum, ut ſinus laterum oppoſitorum.*

256. Ex can.2. Radius ad coſinum anguli ABE, ut tangens AB ad tangentem BE. Ex eodem alternando coſinus DBE ad radium, ut tangens BE ad tangentem DB. Igitur ex æqualitate perturbata coſinus DBE ad coſinum ABE, ut tangens AB ad tangentem DB. Quare

257. VIII. *Coſinus ſegmentorum verticis, ut tangentes laterum oppoſitorum.*

258. Ex can.3. Radius ad tangentem A, ut ſinus AE ad ſinum BE. Ex eodem alternando tangens D ad radium, ut ſinus BE ad ſinum DE. Igitur ex æqualitate perturbata tangens D ad tangentem A, ut ſinus AE ad ſinum DE. Quare

259. IX. *Sinus ſegmentorum baſis, ut tangentes angulorum oppoſitorum.*

260. Ex can.4. Radius ad coſinum BE, ut coſinus AE ad coſinum AB, & ut coſinus DE ad coſinum BD. Ergo alternando coſinus AE ad coſinum DE, ut coſinus AB ad coſinum DB. Quare

261. X. *Coſinus ſegmentorum baſis, ut coſinus laterum adjacentium.*

262. Ex can.5. alternando, radius ad coſinum BE, ut ſinus ABE ad coſinum A, & ut ſinus DBE ad coſinum D. Igitur alternando, ſinus ABE ad ſinum DBE, ut coſinus A ad coſinum D. Quare

263. XI. *Sinus ſegmentorum verticis, ut coſinus angulorum adjacentium.*

264. In hisce novis 5 canonibus habentur aliæ quinque combinationes laterum, angulorum, segmentorum tam basis, quam verticis, nimirum in combinatione

7.	*Latera, & anguli inter se.*	Can. 7.
8.	*Latera, & segmenta verticis.*	Can. 8.
9.	*Latera, & segmenta basis.*	Can. 10.
10.	*Anguli, & segmenta verticis.*	Can. 11.
11.	*Anguli, & segmenta basis.*	Can. 9.

265. Superest combinatio segmentorum verticis, cum segmentis basis, pro qua admodum facile canon eruitur ex can. 3. Est enim ex eo alternando, Radius ad sinum BE, ut tangens anguli ABE ad sinum AE, & ut tangens anguli DBE ad sinum DE. Igitur alternando, tangens ABE ad tangentem DBE, ut sinus AE ad sinum DE. Quare *Tangentes segmentorum verticis, ut sinus segmentorum basis adjacentium*. Sed hic canon hic nobis usui non erit, adeoque eum in hac serie canonum non ponimus.

266. Porro hi canones inventis jam ope triangulorum rectangulorum segmentis usui erunt, ut infra patebit; at ex iis binos alios deducemus, ex quibus ipsa etiam in binis casibus segmenta inveniantur.

267. Ex can. 10. sumendo summas & differentias terminorum, erit summa cosinuum segmentorum basis ad differentiam, ut summa cosinuum laterum ad differentiam. Quare (per num. 31.)

268. XII. *Cotangens semisummæ segmentorum basis, sive cotangens dimidiæ basis, ad tangentem semidifferentiæ, ut cotangens semisummæ laterum ad tangentem semidifferentiæ.*

269. Ex

269. Ex can. 11. pariter summa sinuum segmentorum verticis ad differentiam, ut summa cosinuum angulorum ad differentiam. Quare (per num. 31.)

270. XIII. *Tangens semisummæ segmentorum verticis, sive tangens dimidii anguli verticalis, ad tangentem semidifferentiæ, ut cotangens semisummæ reliquorum angulorum ad tangentem semidifferentiæ.*

271. Neperus, & alii passim pro can. 12 proponunt hunc. *Tangens semisummæ segmentorum basis, sive tangens dimidiæ basis, ad tangentem semisummæ laterum, ut tangens semidifferentiæ ipsorum ad tangentem semidifferentiæ segmentorum basis*; ac ipsum demonstrant ex principiis Conicis. Nos eum facile admodum deducere possumus ex nostro canone 12. Prius enim alternando fit; Cotangens dimidiæ basis ad cotangentem semisummæ laterum, ut tangens semidifferentiæ segmentorum basis ad tangentem semidifferentiæ laterum. Tum pro ratione cotangentis dimidiæ basis, ad cotangentem semisummæ laterum, ponendo (per num. 17.), rationem tangentis hujus ad tangentem illius habetur: *Tangens semisummæ laterum ad tangentem dimidiæ basis, ut tangens semidifferentiæ segmentorum ipsius basis ad tangentem semidifferentiæ laterum*. Demum invertendo habetur ipsum Neperianum theorema. Sed quoniam hic noster idem prorsus officium præstat; eo, qui sponte propemodum profluit, utemur potius, quam Neperiano.

272. Præter hosce canones erit ad resolutionem necessaria etiam tertia regula, quæ determinet, quandonam perpendiculum cadat intra basim, quando vero extra. Eruetur autem sic.

273. Ex

273. Ex reg. 1. tam angulus BAE, quam BDE sunt ejusdem speciei cum arcu BE. Igitur si anguli BAD, BDA fuerint ejusdem speciei; jacebit punctum E intra basim AD, congruentibus angulis BDA, BDE, ac angulis BAD, BAE. Si vero fuerint diversæ speciei; cadet extra, ut in triangulo ABd, ubi cadit in E, vel *e* extra basim A*d* ita, ut angulo BA*d* non habente eandem speciem cum B*d*A, tam BAE, quam B*d*E eandem habeant, ac pariter tam BA*e*, quam B*de* eandem. Quare

274. Reg. 3. *Si duo anguli ad basim fuerint ejusdem speciei, perpendiculum intra basim cadet; si diversæ, extra.*

PROBLEMA.

275. In triangulo sphærico obliquangulo tribus datis reliqua invenire.

276. Sex casus complectitur hoc Problema, 1., in quo dentur bina latera cum angulo intercepto, 2. Bina latera cum angulo alteri eorum opposito, 3. Bini anguli cum latere intercepto, 4. Bini anguli cum latere alteri eorum opposito, 5. tria latera, 6. Tres anguli. Omnium solutio habebitur ope canonum, quos demonstravimus, excurrendo per casus singulos.

277. Ante tamen notandum est, in primo, & tertio casu Problema semper esse possibile, ac ita determinatum, ut unicam solutionem admittat. Facto enim utcunque angulo A, & assumptis, ut libuerit lateribus AB, AD, poterit per B, & D duci circulus maximus (per num. 129), qui erit unicus, cum planum transiens per puncta B, D, & centrum sphæræ non in directum jacentia sit unicum (per num. 7. Solid.),

Solid.), ac id ipsum ejus circuli sit planum (per num. 130). Pariter facto quovis angulo ad A, assumpto quovis latere AD, quod sit minus semicirculo ADa, & facto in D quovis angulo ope semicirculi DBd, hic semicirculo ABa occurret alicubi necessario in B, & triangulum absolvet.

278. Secundus, & quartus casus possunt habere, vel binas solutiones, vel unicam vel nullam. Sit enim datus angulus BAE, & datum latus AB: ut habeatur propositum triangulum oportet ex B ita applicare arcum BD, ut in secundo casu ipse sit æqualis alteri dato lateri, in quarto vero casu efficiat angulum BDA æqualem dato. Porro ex n. 245, & 250 facile eruitur id aliquando esse impossibile, aliquando unicam solutionem habere posse, aliquando vero binas.

279. Si latus datum vel datus angulus distet a quadrante magis quam arcus BE, qui ex datis angulo A & arcu AB facile invenitur (per combin.4); casus erit prorsus impossibilis, & in resolutione ejus trianguli, methodo, quam trademus infra, obveniet aliquis sinus radio major.

280. Si æque, vel minus distiterit applicabitur quidem arcus BD in una vel pluribus positionibus; sed ad hoc ut triangulum propositum sit possibile, oportet punctum D cadat in semicirculum AEa, & binorum angulorum, qui fiunt ad D is, qui respicit A, æquetur dato.

281. Quæ ad id conditiones requirantur facile erit determinare considerando ipsos numeros 245, & 250, pro varia specie arcus AB, & anguli A. Sit angulus BAE acutus, & arcus AB quadrante minor

ut

ut figura exhibet: eritque per reg. 1 etiam BE quadrante minor ac (per num. 241) arcuum omnium, qui ex B applicari possunt, minimus, & (per reg. 2.) AE pariter quadrante minor, adeoque assumptis quadrantibus EI, E*i*, cadet punctum I in semicirculum AE*a*, punctum *i* in A*ea*.

282. Hinc in secundo casu, si latus datum sit æquale BE; solutio erit unica puncto D abeunte in E: si idem sit majus, quam BE, sed adhuc minus, quam BA; solutio erit duplex: nam poterit arcus BD applicari vel citra E versus A, vel ut exhibet figura, ultra E versus *a*. Si sit æquale BA, vel eo majus; sed adhuc minus, quam B*a*, non poterit BD applicari versus A, poterit autem versus *a*, & solutio erit unica. Si demum sit æqualis B*a*, vel adhuc major, applicari jam non poterit, nec versus A, nec versus *a*, & casus iterum erit impossibilis.

283. At in casu quarto, si anguli dati fuerit mensura arcus BE; poterit applicari BD, abeunte D in I, & *i*, sed sola applicatio in I Problemati inserviet, adeoque solutio erit unica. Si angulus sit aliquanto major, sed adhuc minor angulo B*a*E, sive dato BAE; binæ erunt solutiones, puncto D cadente in arcum I*a*, vel ut figura exhibet in IA. Si is æqualis fuerit ipsi B*a*E, nimirum BAE, vel etiam major eodem, sed adhuc minor angulo BA*e* ejus complemento ad duos rectos; solutio erit unica, puncto D cadente in arcum IA, cadet enim in arcum IE, si fuerit acutus, in punctum E si rectus, in arcum EA, si obtusus. Quod si ipsi angulo BA*e* fuerit æqualis, vel eum excesserit; iterum casus fiet impossibilis.

284. Eodem pacto facile est ex iisdem principiis derivare, quando in iis casibus nulla solutio habeatur, quando unica, quando binæ; sive arcus AB quadrantem excesserit, vel angulus BAE excesserit rectum, vel contigerit utrumque simul. Verum solutio ipsa idem præbebit semper; nam in casu, in quo applicari non poterit arcus BD ullo pacto, obveniet sinus aliquis radio major: in casu vero, in quo is quidem applicari poterit, sed punctum D cadet extra semicirculum AE*a*, binorum segmentorum AE, ED, vel ABE, DBE summa excedet gradus 180, puncto D abeunte ultra *a*, vel differentia evadet negativa, eodem cadente citra A.

285. In quinto casu Problema erit semper possibile dummodo bina quævis latera tertio majora sint, & in sexto dummodo angulorum summa sit minor sex rectis, & major binis, ac in utroque casu Problema erit determinatum, & unicam solutionem admittet ut colligitur ex num. 173, 176, & ex ipsa solutione patebit.

286. Sed jam aggrediamur solutionem ipsam percurrendo singulos casus. In primis autem quatuor semper pro A sumendus est angulus datus, & pro AB latus datum, ex quibus segmentum AE, vel ABE eruetur resolvendo triangulum rectangulum AEB. In reliquis segmenta invenientur per canones postremos.

287. *Casus 1.* Dentur bina latera cum angulo intercepto; duo quæri possunt, 1.° latus tertium, 2.° angulus utrilibet lateri dato oppositus.

288. Quæratur 1.° latus tertium. Sume pro A angulum datum; eruntque data latera AB, AD, & quæ-

quæretur BD. Ex datis in triangulo rectangulo AEB basi AB, & angulo A quære AE (per combin. 3) & si forte id evaserit æquale arcui AD; abibit D in E, & triangulum erit rectangulum ad D: si minus; perpendiculum BE cadet intra basim AD; si majus, extra. Invento segmento AE, habebis & ED ob datum arcum AD. Ex segmentis AE, ED, & latere AB invenies cosinum BD (per combin. 9, & can. 10): Ex dato A habes speciem BE (per reg. 1.). Ex ipsa, & specie ED habes speciem BD (per reg. 2.).

289. Quæratur 2.° angulus utervis. Assume pro AB latus ipsi oppositum, pro AD alterum latus datum ipsi adjacens; eritque A datus, D quæsitus angulus. Quære segmenta AE, ED ut prius. Ex iis & angulo A (per combin. 11. can. 9) invenies tangentem D. Species autem anguli D erit eadem ac A, vel diversa (per reg. 3), prout segmentum AE obvenerit majus, vel minus basi AD.

290. *Casus* 2. Dentur bina latera cum angulo opposito alteri ex iis: tria quæri possunt, 1.° tertium latus, 2.° angulus datis lateribus interceptus, 3.° angulus alteri lateri oppositus.

291. Quæratur 1.° tertium latus. Sume pro A angulum datum, pro AB latus ipsi adjacens: eritque datum & latus BD, ac quæretur AD. Invenies AE, ut num. 288: Ex datis lateribus AB, BD, & segmento AE, invenies (per combin. 9, can. 10) cosinum ED, qui cosinus si obvenerit æqualis radio, erit ED = 0, & puncto D abeunte in E, triangulum rectangulum ad D. Ex specie BE, (quæ est eadem ac BAE), & BD invenies speciem ED (per reg. 2.). Sed quoniam aliquando haberi poterit du-

plex solutio hinc inde ab E, subtrahe ED ab EA, & habebis primam, adde & habebis secundam. Si forte AD ex subtractione evaserit = o, vel negativa ob AE æqualem ipsi ED vel minorem, vel ex additione evaserit æqualis, vel major semicirculo ob ED æqualem vel majorem E*a*; eam solutionem rejice; abibit enim in primo casu D in A vel citra ipsum, in secundo in *a* vel ultra ipsum, juxta num. 284.

292. Quæratur 2.° angulus ABD interceptus. Ex datis AB, & A quære segmentum verticis ABE (per combin.2.). Ex lateribus AB, BD, & segmento verticis ABE invenies (per combin. 8, can. 8.) cosinum EBD, qui cosinus si fuerit æqualis radio, erit pariter DBE = o, & triangulum rectangulum ad D. Ex BD dato, & specie BE communi angulo dato BAE invenies speciem DBE (per reg.2.). Subduc DBE ab ABE, & habebis primam solutionem: adde, & habebis alteram: Si angulus ABD, ex subtractione evaserit = o, vel negativus, vel ex additione æqualis, aut major duobus rectis; eam solutionem rejice, ut prius.

293. Quæratur 3.° angulus D oppositus lateri AB. E lateribus AB, BD & angulo A invenies (per combin. 7. can. 7.) sinum D: species in secunda solutione erit eadem ac A, in prima diversa, (per reg. 3.).

294. *Casus* 3. Dentur bini anguli cum latere intercepto: duo quæri possunt, 1.° tertius angulus, 2.° latus utrilibet angulo oppositum.

295. Quæratur 1.° tertius angulus. Sume pro latere AB latus datum, eruntque dati anguli A, & B, ac quæretur D. Ex datis AB, & A quære segmen-

mentum verticis ABE, (per combin. 2.), quod segmentum si evaserit æquale angulo ABD, punctum D abibit in E, & triangulum erit rectangulum ad D, si minus, perpendiculum BE cadet intra basim BD; si majus, extra. Invento segmento ABE, habebis est DBE ob datum totum ABD. E segmentis ABE, DBE, & angulo A invenies (per comb. 10. can. 11.) cosinum D. Is erit ejusdem speciei cum A, si ABE fuerit minor, quam ABD, perpendiculo BE cadente intra basim, diversæ, si major.

296. Quæratur secundo latus utrumvis. Assume pro A angulum ipsi oppositum, pro ABD alterum angulum ipsi adjacentem; eritque AB latus datum, BD quæsitum. Quære segmenta ABE, DBE, ut prius. Ex iis, & latere AB (per combin.8. can.8.), invenies tangentem BD. Ejus speciem invenies (per reg.2), e specie DBE inventa, & specie BE, quæ est eadem, ac anguli dati A.

297. *Casus* 4. Dentur bini anguli cum latere opposito alteri ex iis: tria quæri possunt, 1.° tertius angulus, 2.° latus datis angulis interceptum, 3.° latus alteri angulo oppositum.

298. Quæratur 1.° tertius angulus. Sume pro AB latus datum, pro A angulum datum ipsi adjacentem; eritque datus etiam angulus D, & quæratur ABD. Invenies ABE, ut num.295. Ex datis angulis A, D, & segmento ABE invenies (per combin.10. can.11.) sinum DBE, qui in eo canone non poterit evadere = 0, existente angulo D obliquo. Ejus autem species erit indeterminata, cum solum detur species lateris BE eadem, ac anguli A, & species anguli D oppositi ipsi lateri BE in triangulo

 BDE,

BDE, qui est casus ambiguus trianguli rectanguli (per num.209.). Inde autem colligitur posse aliquando haberi duplicem solutionem, puncto D cadente hinc, vel inde ab I, vel *i*. Quare poterit assumi segmentum DBE tam acutum, quam obtusum. Si autem angulus D fuerit ejusdem speciei cum A, debebit ad habendos pro binis solutionibus binos angulos ABD, utrumque addi segmento ABE, ut (juxta reg.3.), perpendiculum intra basim cadat. Si verò D fuerit diversæ speciei, debebit utrumque subtrahi. Si ex additione non obvenerit angulus minor binis rectis, vel ex subtractione positivus; eæ solutiones rejiciendæ erunt; abibit enim punctum D in *a*, vel ultra ipsum, aut in A, vel citra ipsum, ut num.291.

299. Quæratur 2.° latus AD interceptum. Ex datis AB, & A quære segmentum AE (per combin.3.). Ex angulis A, D, & segmento AE invenies (per combin.11. can.9.) sinum ED. Species ipsius erit pariter indeterminata: assume valorem tam minorem, quam majorem quadrante, & adde segmento AE, vel subtrahe, prout angulus D habuerit eandem speciem, ac A, vel diversam, & habebis binas bases AD pro binis solutionibus. Sed si basis ipsa ex additione non obvenerit semicirculo minor, vel e subtractione non manserit positiva, eam solutionem rejice, ut prius.

300. Quæratur 3.° latus BD oppositum angulo A. Ex angulis A, D, & latere AB invenies (per combin.7. can.7.) sinum BD. Species altera adhibenda erit in altera e solutionibus, quam in triangulo rectangulo BED definiet (per reg.2) species BE

co-

cognita, nimirum eadem ac species A, una cum specie assumpta segmenti ED, sive segmenti EBD.

301. *Casus 3.* Dentur tria latera; potest quæri angulus quivis.

302. Sume pro A angulum quæsitum, pro basi AD utrumvis latus ipsi adjacens. Ex datis AB, BD, & dimidia basi AD invenies (per can. 12.) tangentem semidifferentiæ segmentorum AE, ED, quam semidifferentiam sumes quadrante minorem. Eam adde dimidiæ basi, & subtrahe, & cum dimidia basis sit semisumma eorundem segmentorum, habebis (per num. 28) bina segmenta AE, DE. Sed pro AE assumes segmentum illud, quod magis vel minus distet a quadrante, prout latus adjacens AB distabit pariter magis, vel minus; cum nimirum (per can. 10.) sint: *Cosinus segmentorum basis, ut cosinus laterum adjacentium*, & arcus propioris quadranti cosinus sit minor (per num. 39.). Jam in triangulo rectangulo AEB ex AB, & AE invenies angulum BAE (per combin. 3.). Sed si AE habitum fuerit per subtractionem, & obvenerit negativum, perpendiculo BE cadente citra A, angulus quæsitus BAD non erit idem ac BAE, sed ejus complementum ad duos rectos.

303. *Casus 6.* Dentur tres anguli: potest quæri latus quodvis.

304. Sume pro AB latus quæsitum, pro vertice ABD utrumvis angulum ipsi adjacentem. Ex datis A, D & dimidio angulo verticali ABD invenies (per can. 13.) tangentem semidifferentiæ segmentorum ABE, EBD, quam semidifferentiam sumes quadrante minorem. Eam adde dimidio angulo verticali & subtrahe, & cum dimidius angulus verticalis

 calis

calis sit semisumma eorundem segmentorum ; habebis (per num. 28.) bina segmenta ABE, DBE. Sed pro ABE assumes segmentum illud, quod magis, vel minus distet ab angulo recto, prout e contrario angulus A adjacens distabit minus, vel magis; cum nimirum (per can. 11.) sint sinus segmentorum verticis, ut cosinus angulorum adjacentium, & arcus propioris quadranti cosinus sit minor, sinus major (per num. 39.). Jam in triangulo rectangulo AEB ex AB, & ABE invenies angulum BAE(per comb.2.). Sed si ABE habitum fuerit per subtractionem, & obvenerit negativum, perpendiculo BE cadente citra A, angulus quæsitus BAD non erit idem, ac BAE, sed ejus complementum ad duos rectos.

Scholion 1.

305. Licebit inter se conferre solutiones casus 1, 3, 5, cum 2, 4, 6, quæ ita sibi respondent, ut sæpe eadem prorsus verba adhibeantur. Plerumque solent demonstrare insignem proprietatem triangulorum sphæricorum ac eam in solutione adhibere. Si nimirum in quovis triangulo latera mutentur in angulos, anguli viceversa mutantur in latera, & e contario. Sed in ea mutatione in novo triangulo angulis quibusdam, vel lateribus substituenda sunt eorum complementa ad duos rectos. Hinc expositis casibus 1, 3, 5, ad eos reducunt reliquos tres ope ejusmodi transformationis. Sed quoniam & transformationis ipsius demonstratio, & determinatio casuum, in quibus lateri, vel angulo transformato substitui debeat ejus complementum ad duos rectos, est aliquanto operosior, & per nostros canones æque facile immediate solvuntur posteriores tres casus, ac prio-

ac priores tres; libuit potius hanc aliam adhibere methodum, quæ multo & expeditior est visa, & magis concinna.

306. Pariter cum secantium Logarithmi in tabulis adscribi non soleant, consulto ubique secantes vitavimus, per solos sinus, & tangentes re perfecta.

307. In quinti, & sexti casus solutione semidifferentiam ex tangente deduximus minorem 90.° Potuisset assumi etiam major, & solutio eadem prorsus obvenisset. Secto enim arcu AD bifariam in L, si in casu quinto pro semidifferentia LE, assumptum fuisset ejus complementum ad duos rectos, nimirum L*e*; pro segmentis AE, DE obvenissent segmenta AE, DE*e*, & in triangulo quidem rectangulo BA*e* inventus fuisset angulus BA*e*, complementum ad duos rectos anguli BAE; sed angulus BAD obvenisset idem. Præstat tamen adhibere semidifferentiam minorem 90.°; tum quia immediate eruitur e tabulis, tum quia ob AL quoque minorem quadrante numquam segmentum ex additione proveniens semicirculum excedet, qui aliquando excederetur, ut in ipso casu hujus figuræ segmentum DEA*e* proveniret semicirculo majus, pro quo, ad conferenda ipsa segmenta inter se, sumendum esset D*e* ejus complementum ad circulum, cum in vulgari Trigonometria, nec anguli, nec arcus semicirculo majores considerari soleant, ac eadem est ratio pro casu 6.

Scholion 2.

108. In quibusdam casibus solutiones aliquando faciliores haberi possunt. Si bina latera *BA*, *BD* essent

sent inter se æqualia, vel bini anguli A, D æquales; perpendiculum BE secaret bifariam basim AD, & angulum ABD. Nam (per num. 244) bini arcus AB, BD possunt esse æquales solum in æquali hinc inde distantia a puncto E, & ibi anguli EBD, EBA, quorum species debet (per reg. 1.) esse eadem ac species EA, ED, erunt ejusdem speciei; functiones vero æquales habebunt (per can. 8.), adeoque & inter se æquales erunt. Si autem assumatur ID = I*a*, erit angulus BDE = B*a*E (per num. 248), adeoque = BAE, (per num. 157), nec usquam alibi in semicirculo AE*a* constitui poterit angulus ipsi BAE æqualis. Cum autem quadrans EI sit æqualis dimidio semicirculo AD*a*, & arcus DI dimidio D*a*, erit DE æqualis dimidio AD, adeoque æqualis AE, & inde eodem argumento etiam ABE = DBE. Porro satis patet, quanto facilior inde solutio debeat profluere in hujusmodi triangulis Isosceliis.

309. Quod si in aliquo triangulo detur latus quadranti æquale, admodum facile dato triangulo substituitur aliud, quod rectangulum sit, & quo resoluto, illud etiam resolvitur. Capto enim quadrante AE, & per B, & E ducto circulo maximo, erunt (per num. 162) anguli AEB, ABE recti, & latus BE mensura anguli A; ac proinde arcus ED, & angulus EBD erunt complementa arcus AD, & anguli ABD. Datis igitur iis, quæ pertinent ad triangulum ABD, dantur ea, quæ pertinent ad BED, & hoc resoluto illud resolvitur.

Scholion.

Ut unico conspectu pateant omnia, quæ ad usum spe-

spectant, apponemus hic canones, cum combinationibus, & regulas:

Pro triangulis rectangulis.

I. *Radius ad sinum anguli, ut sinus basis ad sinum lateris oppositi.*

II. *Radius ad cosinum anguli, ut tangens basis ad tangentem lateris adjacentis.*

III. *Radius ad tangentem anguli, ut sinus lateris adjacentis ad tangentem oppositi.*

IV. *Radius ad cosinum unius lateris, ut cosinus alterius ad cosinum basis.*

V. *Radius ad sinum anguli adjacentis, ut cosinus lateris ad cosinum anguli oppositi.*

VI. *Radius ad tangentem unius anguli, ut cosinus basis ad cotangentem alterius.*

Reg. I. *Latera sunt ejusdem speciei cum angulis oppositis.*

Reg. II. *Si duo latera vel duo anguli, vel latus cum angulo adjacente fuerint ejusdem speciei; basis erit quadrante minor, si diversa, major, & viceversa.*

	1.	Basis cum utroque latere:	Can.4. Reg.2. pars 1.
Combin.2.		Basis cum utroque angulo:	Can.6. Reg.2. pars 2.
	3.	Basis cum latere, & angulo adjacente:	Can.2. Reg.2. pars 3.

4. Basis

	4. Basis cum latere, & angulo opposito:	Can. 1.)	) Reg. 1.
Combin. 5.	Utrumque latus cum altero angulo:	Can. 3.)	) vel nul-) la in ca-
	6. Uterque angulus cum altero latere:	Can. 5.)	) su am-) biguo.

Pro obliquangulis.

VII. *Sinus angulorum, ut sinus laterum oppositorum.*

VIII. *Cosinus segmentorum verticis, ut tangentes laterum oppositorum.*

IX. *Sinus segmentorum basis ut tangentes angulorum oppositorum.*

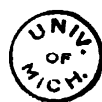
X. *Cosinus segmentorum basis, ut cosinus laterum adjacentium.*

XI. *Sinus segmentorum verticis, ut cosinus angulorum adjacentium.*

Reg. III. *Si duo anguli ad basim fuerint ejusdem speciei perpendiculum intra basim cadet; si diversæ, extra.*

	7.	Latera, & anguli.	can. 7.
	8.	Latera, & segmenta verticis.	can. 8.
Combin.	9.	Latera, & segmenta basis.	can. 10.
	10.	Anguli, & segmenta verticis.	can. 11.
	11.	Anguli, & segmenta basis.	can. 9.

Pro


UNIV.
OF
MICH.

Pro inveniendis segmentis in casu datorum laterum, vel angulorum.

XII. *Cotangens dimidiæ basis ad tangentem semidifferentiæ segmentorum, ut cotangens semisummæ laterum ad tangentem semidifferentiæ.*

XIII. *Tangens dimidii anguli verticalis ad tangentem semidifferentiæ segmentorum, ut cotangens semisummæ angulorum ad basim ad tangentem semidifferentiæ.*



Pro inveniendis ſegmentis in caſu datorum laterum, vel angulorum.

XII. *Cotangens dimidiæ baſis ad tangentem ſemidifferentiæ ſegmentorum, ut cotangens ſemiſummæ laterum ad tangentem ſemidifferentiæ.*

XIII. *Tangens dimidii anguli verticalis ad tangentem ſemidifferentiæ ſegmentorum, ut cotangens ſemiſummæ angulorum ad baſim ad tangentem ſemidifferentiæ.*



TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
0	0	0	100000.00	—Infin.	—Infin.
1	1745.24	1745.51	100015.23	8.2418553	8.2419215
2	3489.95	3492.08	100060.95	8.5428192	8.5430838
3	5233.60	5240.78	100137.23	8.7188002	8.7193958
4	6975.65	6992.68	100244.19	8.8435845	8.8446437
5	8715.57	8748.87	100381.98	8.9402960	8.9419518
6	10452.85	10510.42	100550.82	9.0192346	9.0216202
7	12186.93	12278.46	100750.99	9.0858945	9.0891438
8	13917.31	14054.08	100982.76	9.1435553	9.1478025
9	15643.45	15838.44	101246.51	9.1943324	9.1997125
10	17364.82	17632.70	101542.67	9.2396702	9.2463188
11	19080.90	19438.03	101871.68	9.2805988	9.2886523
12	20791.17	21255.65	102234.07	9.3178789	9.3274745
13	22495.11	23086.82	102630.39	9.3520880	9.3633641
14	24192.19	24932.80	103061.35	9.3836752	9.3967711
15	25881.90	26794.92	103527.62	9.4129962	9.4280525
16	27563.74	28674.54	104029.94	9.4403381	9.4574964
17	29237.17	30573.07	104569.18	9.4659353	9.4853390
18	30901.70	32491.97	105146.22	9.4899824	9.5117760
19	32556.82	34432.76	105762.07	9.5126419	9.5369719
20	34202.02	36397.02	106417.78	9.5340517	9.5610659
21	35836.79	38386.40	107114.50	9.5543292	9.5841774
22	37460.66	40402.62	107853.47	9.5735754	9.6064096
23	39073.11	42447.49	108636.04	9.5918780	9.6278519
24	40673.66	44522.87	109463.63	9.6093133	9.6485831
25	42261.83	46630.77	110337.79	9.6259483	9.6686725

TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
90	10000000.00	Infin.	Infin.	10.0000000	Infin.
89	99984.77	5728996.16	5729868.85	9.9999338	11.7580785
88	99939.08	2863625.32	2865370.83	9.9997354	11.4569162
87	99862.95	1908113.67	1910732.26	9.9994044	11.2806042
86	99756.40	1430066.63	1433558.70	9.9989408	11.1553563
85	99619.47	1143005.23	1147371.32	9.9983442	11.0580482
84	99452.18	951436.45	956677.22	9.9976143	10.9783798
83	99254.62	814434.64	820550.90	9.9967507	10.9108562
82	99026.80	711536.97	718529.65	9.9957528	10.8521975
81	98768.83	631375.15	639245.32	9.9946199	10.8002875
80	98480.77	567128.18	575877.05	9.9933515	10.7536812
79	98162.71	514455.40	524084.31	9.9919466	10.7113477
78	97814.76	470463.01	480973.43	9.9904044	10.6725255
77	97437.01	433147.59	444541.15	9.9887239	10.6366359
76	97029.57	401078.09	413356.55	9.9869041	10.6032289
75	96592.58	373205.08	386370.33	9.9849438	10.5719475
74	96126.17	348741.44	362795.53	9.9828416	10.5425036
73	95630.48	327085.26	342030.36	9.9805963	10.5146610
72	95105.65	307768.35	323606.80	9.9782063	10.4882240
71	94551.85	290421.09	307155.35	9.9756701	10.4630281
70	93969.26	274747.74	292380.44	9.9729858	10.4389341
69	93358.04	260508.91	279042.81	9.9701517	10.4158226
68	92718.39	247508.69	266946.72	9.9671659	10.3935904
67	92050.49	235585.24	255930.47	9.9640261	10.3721481
66	91354.54	224603.68	245859.33	9.9607302	10.3514169
65	90630.78	214450.69	236620.16	9.9572757	10.3313275

TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
26	43837.12	48773.26	111260.19	9.6418420	9.6881818
27	45399.05	50952.54	112232.62	9.6570468	9.7071659
28	46947.16	53170.94	113257.01	9.6716093	9.7256744
29	48480.96	55430.90	114335.41	9.6855712	9.7437520
30	50000.00	57735.03	115470.05	9.6989700	9.7614394
31	51503.81	60086.06	116663.34	9.7118393	9.7787737
32	52991.93	62486.94	117917.84	9.7242097	9.7957892
33	54463.90	64940.76	119236.33	9.7361088	9.8125174
34	55919.29	67450.85	120621.80	9.7475617	9.8289874
35	57357.64	70020.75	122077.46	9.7585913	9.8452268
36	58778.53	72654.26	123606.80	9.7692187	9.8612610
37	60181.50	75355.40	125213.57	9.7794630	9.8771144
38	61566.15	78128.56	126901.82	9.7893420	9.8928098
39	62932.04	80978.40	128675.96	9.7988718	9.9083692
40	64278.76	83909.96	130540.73	9.8080675	9.9238135
41	65605.90	86928.68	131501.30	9.8169429	9.9391631
42	66913.06	90040.41	134563.27	9.8255109	9.9544374
43	68199.84	93251.51	136732.75	9.8337833	9.9696559
44	69465.84	96568.88	139016.36	9.8417713	9.9848372
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10 0000000

TABULÆ FUNCTIONUM ARCUUM.

Gr.	Sinus	Tangen.	Secantes	Log. Sin.	Log. Tang.
64	89879.40	205030.38	228117.20	9.9536602	10.3118182
63	89100.65	196261.05	220268.93	9.9498809	10.2928341
62	88294.76	188072.65	213005.45	9.9459349	10.2743256
61	87461.97	180404.78	206266.53	9.9418193	10.2562480
60	86602.54	173205.08	200000.00	9.9375306	10.2385606
59	85716.73	166427.95	194160.40	9.9330656	10.2212263
58	84804.81	160033.45	188707.99	9.9284205	10.2042108
57	83867.06	153986.50	183607.84	9.9235914	10.1874826
56	82903.76	148256.10	178829.16	9.9185742	10.1710126
55	81915.21	142814.80	174344.68	9.9133645	10.1547732
54	80901.70	137638.19	170130.16	9.9079576	10.1387390
53	79863.55	132704.48	166164.01	9.9. 23486	10.1228856
52	78801.08	127994.16	162426.92	9.8965321	10.1071902
51	77714.60	123489.72	158901.57	9.8905026	10.0916308
50	76604.44	119175.36	155572.38	9.8842540	10.0761865
49	75470.96	115036.84	152425.31	9.8777799	10.0608369
48	74314.48	111061.25	149447.65	9.8710735	10.0455626
47	73135.37	107236.87	146627.92	9.8641275	10.0303441
46	71933.98	103553.03	143955.65	9.8569341	10.0151628
45	70710.68	100000.00	141421.36	9.8494850	10.0000000

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
1	0.0000000	34	1.5314789	67	1.8260748
2	0.3010300	35	1.5440680	68	1.8325089
3	0.4771213	36	1.5563025	69	1.8388491
4	0.6020600	37	1.5682017	70	1.8450980
5	0.6989700	38	1.5797836	71	1.8512583
6	0.7781512	39	1.5910646	72	1.8573325
7	0.8450980	40	1.6020600	73	1.8633229
8	0.9030900	41	1.6127839	74	1.8692317
9	0.9542425	42	1.6232493	75	1.8750613
10	1.0000000	43	1.6334685	76	1.8808136
11	1.0413927	44	1.6434527	77	1.8864907
12	1.0791812	45	1.6532125	78	1.8920946
13	1.1139433	46	1.6627578	79	1.8976271
14	1.1461280	47	1.6720979	80	1.9030900
15	1.1760913	48	1.6812412	81	1.9084850
16	1.2041200	49	1.6901961	82	1.9138138
17	1.2304489	50	1.6989700	83	1.9190781
18	1.2552725	51	1.7075702	84	1.9242793
19	1.2787536	52	1.7160033	85	1.9294189
20	1.3010300	53	1.7242759	86	1.9344984
21	1.3222193	54	1.7323938	87	1.9395192
22	1.3424227	55	1.7403627	88	1.9444827
23	1.3617278	56	1.7481880	89	1.9493900
24	1.3802112	57	1.7558749	90	1.9542425
25	1.3979400	58	1.7634280	91	1.9590414
26	1.4149733	59	1.7708520	92	1.9637878
27	1.4313638	60	1.7781512	93	1.9684829
28	1.4471580	61	1.7853298	94	1.9731279
29	1.4623980	62	1.7923917	95	1.9777236
30	1.4771213	63	1.7993405	96	1.9822712
31	1.4913617	64	1.8061800	97	1.9867717
32	1.5051500	65	1.8129134	98	1.9912261
33	1.5185139	66	1.8195439	99	1.9956352
34	1.5314789	67	1.8260748	100	2.0000000

100

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
101	2.0043214	134	2.1271048	167	2.2227165
102	2.0086002	135	2.1303338	168	2.2253093
103	2.0128372	136	2.1335389	169	2.2278867
104	2.0170333	137	2.1367206	170	2.2304489
105	2.0211893	138	2.1398791	171	2.2329961
106	2.0253059	139	2.1430148	172	2.2355284
107	2.0293838	140	2.1461280	173	2.2380461
108	2.0334238	141	2.1492191	174	2.2405492
109	2.0374265	142	2.1522883	175	2.2430380
110	2.0413927	143	2.1553360	176	2.2455127
111	2.0453230	144	2.1583625	177	2.2479733
112	2.0492180	145	2.1613680	178	2.2504200
113	2.0530784	146	2.1643529	179	2.2528530
114	2.0569049	147	2.1673173	180	2.2552725
115	2.0606978	148	2.1702617	181	2.2576786
116	2.0644580	149	2.1731863	182	2.2600714
117	2.0681859	150	2.1760913	183	2.2624511
118	2.0718820	151	2.1789769	184	2.2648178
119	2.0755470	152	2.1818436	185	2.2671717
120	2.0791812	153	2.1846914	186	2.2695129
121	2.0827854	154	2.1875207	187	2.2718416
122	2.0863598	155	2.1903317	188	2.2741578
123	2.0899051	156	2.1931246	189	2.2764618
124	2.0934217	157	2.1958996	190	2.2787536
125	2.0969100	158	2.1986571	191	2.2810334
126	2.1003705	159	2.2013971	192	2.2833012
127	2.1038037	160	2.2041200	193	2.2855573
128	2.1072100	161	2.2068259	194	2.2878017
129	2.1105897	162	2.2095150	195	2.2900346
130	2.1139433	163	2.2121876	196	2.2922561
131	2.1172713	164	2.2148438	197	2.2944662
132	2.1205739	165	2.2174839	198	2.2966652
133	2.1238516	166	2.2201081	199	2.2988531
134	2.1271048	167	2.2227165	200	2.3010300

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
201	2.3031961	234	2.3692159	267	2.4265113
202	2.3053514	235	2.3710679	268	2.4281348
203	2.3074960	236	2.3729120	269	2.4297523
204	2.3096302	237	2.3747483	270	2.4313638
205	2.3117539	238	2.3765770	271	2.4329693
206	2.3138672	239	2.3783979	272	2.4345689
207	2.3159703	340	2.3802112	273	2.4361626
208	2.3180633	241	2.3820170	274	2.4377506
209	2.3201463	242	2.3838154	275	2.4393327
210	2.3222193	243	2.3856063	276	2 4409091
211	2.3242825	244	2.3873898	277	2.4424798
212	2.3263359	245	2.3891661	278	2.8440448
213	2.3283796	246	2.3909351	279	2.4456042
214	2.3304138	247	2.3926970	280	2.4471580
215	2.3324385	248	2.3944517	281	2.4487063
216	2.3344537	249	2.3961993	282	2.4502491
217	2.3364597	250	2.3979400	283	2.4517864
218	2.3384565	251	2.3996737	284	2.4533183
219	2.3404441	252	2.4014005	285	2.4548449
220	2.3424227	253	2.4031205	286	2.4563660
221	2.3443923	254	2.4048337	287	2.4578819
222	2.3463530	255	2.4065402	288	2.4593925
223	2.3483049	256	2.4082400	289	2.4608978
224	2.3502480	257	2.4099331	290	2.4623980
225	2.3521825	258	2.4116197	291	2.4638930
226	2.3541084	259	2.4132998	292	2.4653828
227	2.3560259	260	2.4149733	293	2.4668676
228	2.3579348	261	2.4166405	294	2.4683473
229	2.3598355	262	2.4183013	295	2.4698220
230	2.3617278	263	2.4199557	296	2.4712917
231	2.3636120	264	2.4216039	297	2.4727564
232	2.3654880	265	2.4232459	298	2.4742163
233	2.3673559	266	2.4248816	299	2.4756712
234	2.3692159	267	2.4265113	300	2.4771213

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
301	2.4785665	334	2.5237465	367	2.5646661
302	2.4800069	335	2.5250448	368	2.5658478
303	2.4814426	336	2.5263393	369	2.5670264
304	2.4828736	337	2.5276299	370	2.5682017
305	2.4842998	338	2.5289167	371	2.5693739
306	2.4857214	339	2.5301997	372	2.5705429
307	2.4871384	340	2.5314789	373	2.5717088
308	2.4885507	341	2.5327544	374	2.5728716
309	2.4899585	342	2.5340261	375	2.5740313
310	2.4913617	343	2.5352941	376	2.5751878
311	2.4927604	344	2.5365584	377	2.5763413
312	2.4941546	345	2.537819	378	2.5774918
313	2.4955443	346	2.5390761	379	2.5786392
314	2.4969296	347	2.5403295	380	2.5797836
315	2.4983106	348	2.5415792	381	2.5806250
316	2.4996871	349	2.5428254	382	2.5820634
317	2.5010593	350	2.5440680	383	2.5831988
318	2.5024271	351	2.5453071	384	2.5843312
319	2.5037907	352	2.5465427	385	2.5854607
320	2.5051500	353	2.5477747	386	2.5865873
321	2.5065050	354	2.5490033	387	2.5877110
322	2.5078559	355	2.5502284	388	2.5888317
323	2.5092025	356	2.5514500	389	2.5899496
324	2.5105450	357	2.5526682	390	2.5910646
325	2.5118834	358	2.5538830	391	2.5921768
326	2.5132176	359	2.5550944	392	2.5932861
327	2.5145477	360	2.5563025	393	2.5943925
328	2.5158738	361	2.5575072	394	2.5954962
329	2.5171959	362	2.5587086	395	2.5965971
330	2.5185139	363	2.5599066	396	2.5976952
331	2.5198280	364	2.5611014	397	2.5987905
332	2.5211381	365	2.5622929	398	2.5998831
333	2.5224442	366	2.5634811	399	2.6009729
334	2.5237465	367	2.5646661	400	2.6020600

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
401	2.6031444	434	2.6374897	467	2.6693169
402	2.6042261	435	2.6384893	468	2.6702459
403	2.6053050	436	2.6394865	469	2.6711728
404	2.6063814	437	2.6404814	470	2.6720979
405	2.6074550	438	2.6414741	471	2.6730209
406	2.6085260	439	2.6424645	472	2.6739420
407	2.6095944	440	2.6434527	473	2.6748611
408	2.6106602	441	2.6444386	474	2.6757783
409	2.6117233	442	2.6454223	475	2.6766936
410	2.6127839	443	2.6464037	476	2.6776069
411	2.6138418	444	2.6473830	477	2.6785184
412	2.6148972	445	2.6483600	478	2.6794279
413	2.6159500	446	2.6493349	479	2.6803355
414	2.6170003	447	2.6503075	480	2.6812412
415	2.6180481	448	2.6512780	481	2.6821451
416	2.6190933	449	2.6522463	482	2.6830470
417	2.6201361	450	2.6532125	483	2.6839471
418	2.6211763	451	2.6541765	484	2.6848454
419	2.6222140	452	2.6551384	485	2.6857417
420	2.6232493	453	2.6560982	486	2.6866363
421	2.6242821	454	2.6570558	487	2.6875290
422	2.6253124	455	2.6580114	488	2.6884198
423	2.6263404	456	2.6589648	489	2.6893089
424	2.6273659	457	2.6599162	490	2.6901961
425	2.6283889	458	2.6608655	491	2.6910815
426	2.6294096	459	2.6618127	492	2.6919651
427	2.6304279	460	2.6627578	493	2.6928469
428	2.6314438	461	2.6637009	494	2.6937269
429	2.6324573	462	2.6646420	495	2.6946052
430	2.6334685	463	2.6655810	496	2.6954817
431	2.6344773	464	2.6665180	497	2.6963564
432	2.6354837	465	2.6674529	498	2.6972293
433	2.6364879	466	2.6683859	499	2.6981005
434	2.6374897	467	2.6693169	500	2.6989700

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
501	2.6998377	534	2.7275413	567	2.7535831
502	2.7007037	535	2.7283538	568	2.7543483
503	2.7015680	536	2.7291648	569	2.7551123
504	2.7024305	537	2.7299743	570	2.7558749
505	2.7032914	538	2.7307823	571	2.7566361
506	2.7041505	539	2.7315888	572	2.7573960
507	2.7050080	540	2.7323938	573	2.7581546
508	2.7058637	541	2.7331973	574	2.7589119
509	2.7067178	542	2.7339993	575	2.7596678
510	2.7075702	543	2.7347998	576	2.7604225
511	2.7084209	544	2.7355989	577	2.7611758
512	2.7092700	545	2.7363965	578	2.7619278
513	2.7101174	546	2.7371926	579	2.7626786
514	2.7109631	547	2.7379873	580	2.7634280
515	2.7118072	548	2.7387806	581	2.7641761
516	2.7126497	549	2.7395723	582	2.7649230
517	2.7134905	550	2.7403627	583	2.7656686
518	2.7143298	551	2.7411516	584	2.7664128
519	2.7151674	552	2.7419391	585	2.7671559
520	2.7160033	553	2.7427251	586	2.7678976
521	2.7168377	554	2.7435098	587	2.7686381
522	2.7176705	555	2.7442930	588	2.7693773
523	2.7185017	556	2.7450748	589	2.7701153
524	2.7193313	557	2.7458552	590	2.7708520
525	2.7201593	558	2.7466342	591	2.7715875
526	2.7209857	559	2.7474118	592	2.7723217
527	2.7218106	560	2.7481880	593	2.7730547
528	2.7226339	561	2.7489629	594	2.7737864
529	2.7234557	562	2.7497363	595	2.7745170
530	2.7242759	563	2.7505084	596	2.7752463
531	2.7250945	564	2.7512791	597	2.7759743
532	2.7259116	565	2.7520484	598	2.7767012
533	2.7267272	566	2.7528164	599	2.7774268
534	2.7275413	567	2.7535831	600	2.7781512

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
601	2.7788745	634	2.8020893	667	2.8241258
602	2.7795965	635	2.8027737	668	2.8247765
603	2.7803173	636	2.8034571	669	2.8254261
604	2.7810369	637	2.8041394	670	2.8260748
605	2.7817554	638	2.8048207	671	2.8267225
606	2.7824726	639	2.8055009	672	2.8273693
607	2.7831887	640	2.8061800	673	2.8280151
608	2.7839036	641	2.8068580	674	2.8286599
609	2.7846173	642	2.8075350	675	2.8293038
610	2.7853298	643	2.8032110	676	2.8299467
611	2.7860412	644	2.8088859	677	2.8305887
612	2.7867514	645	2.8095597	678	2.8312297
613	2.7874605	646	2.8102325	679	2.8313698
614	2.7881684	647	2.8109043	680	2.8325089
615	2.7888751	648	2.8115750	681	2.833[illegible]471
616	2.7895807	649	2.8122447	682	2.8337844
617	2.7902852	650	2.8129134	683	2.8344207
618	2.7909885	651	2.8135810	684	2.8350561
619	2.7916906	652	2.8142476	685	2.8356906
620	2.7923917	653	2.8149132	686	2.8363241
621	2.7930916	654	2.8155777	687	2.8369567
622	2.7937904	655	2.8162413	688	2.8375884
623	2.7944880	656	2.8169038	689	2.8382192
624	2.7951846	657	2.8175654	690	2.8388491
625	2.7958800	658	2.8182259	691	2.8394780
626	2.7965743	659	2.8188854	692	2.8401061
627	2.7972675	660	2.8195439	693	2.8407332
628	2.7979596	661	2.8202015	694	2.8413595
629	2.7936506	662	2.8208580	695	2.8419848
630	2.7993405	663	2.8215135	696	2.8426092
631	2.8000294	664	2.8221681	697	2.8432328
632	2.8007171	665	2.8228216	698	2.8438554
633	2.8014037	666	2.8254742	699	2.8444772
634	2.8020893	667	2.8241258	700	2.8450980

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
701	2.8457180	734	2.8656961	767	2.8847954
702	2.8463371	735	2.8662873	768	2.8853612
703	2.8469 53	736	2.8668778	769	2.8859263
704	2.8475727	737	2.8674675	770	2.8864907
705	2.8481891	738	2.8680564	771	2.8870544
706	2.8488047	739	2.8686444	772	2.8876173
707	2.8494194	740	2.8692317	773	2.8881795
708	2.8500333	741	2.8698182	774	2.8887410
709	2.8506462	742	2.8704039	775	2.8893017
710	2.8512583	743	2.8709888	776	2.8898617
711	2.8518696	744	2.8715729	777	2.8904210
712	2.8524800	745	2.8721563	778	2.8909796
713	2.8530895	746	2.8727388	779	2.8915375
714	2.8536982	747	2.8733206	780	2.8920946
715	2.8543060	748	2.8739016	781	2.8926510
716	2.8549130	749	2.8744818	782	2.8932068
717	2.8555192	750	2.8750613	783	2.8937618
718	2.8561244	751	2.8756399	784	2.8943161
719	2.8567289	752	2.8762178	785	2.8948697
720	2.8573325	753	2.8767950	786	2.8954225
721	2.8579353	754	2.8773712	787	2.8959747
722	2.85853 2	755	2.8779469	788	2.8965262
723	2.8591383	756	2.8785218	789	2.8970770
724	2.8597386	757	2.8780959	790	2.8976271
725	2.8603380	758	2.8796692	791	2.8981765
726	2.8609366	759	2.8802418	792	2.8987252
727	2.8615344	760	2.8808136	793	2.8992732
728	2.8621314	761	2.8813847	794	2.8998205
729	2.8627275	762	2.8819550	795	2.9003671
730	2.8633229	763	2.8825245	796	2.9009131
731	2.8639174	764	2.8830934	797	2.9014583
732	2.8645111	765	2.8836614	798	2.9020029
733	2.8651040	766	2.8842288	799	2.9025468
734	2.8656961	767	2.8847954	800	2.9030900

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
801	2.9036325	834	2.9211660	867	2.9380191
802	2.9041744	835	2.9216865	868	2.9385197
803	2.9047155	836	2.9222063	869	2.9390198
804	2.9052560	837	2.9227255	870	2.9395192
805	2.9057959	838	2.9232440	871	2.9400181
806	2.9063350	839	2.9237620	872	2.9405165
807	2.9068735	840	2.9242793	873	2.9410142
808	2.9074114	841	2.9247960	874	2.9415114
809	2.9079485	842	2.9253121	875	2.9420080
810	2.9084850	843	2.9258276	876	2.9425041
811	2.9090209	844	2.9263424	877	2.9429996
812	2.9095560	845	2.9268567	878	2.9434945
813	2.9100905	846	2.9273704	879	2.9439889
814	2.9106244	847	2.9278834	880	2.9444827
815	2.9111576	848	2.9283958	881	2.9449759
816	2.9116902	849	2.9289077	882	2.9454686
817	2.9122221	850	2.9294189	883	2.9459607
818	2.9127533	851	2.9299296	884	2.9464523
819	2.9132839	852	2.9304396	885	2.9469433
820	2.9138138	853	2.9309490	886	2.9474337
821	2.9143432	854	2.9314579	887	2.9479236
822	2.9148718	855	2.9319661	888	2.9484130
823	2.9153998	856	2.9324738	889	2.9489018
824	2.9159272	857	2.9329808	890	2.9493900
825	2.9164539	858	2.9334873	891	2.9498777
826	2.9169800	859	2.9339932	892	2.9503648
827	2.9175055	860	2.9344984	893	2.9508514
828	2.9180303	861	2.9350031	894	2.9513375
829	2.9185545	862	2.9355073	895	2.9518230
830	2.9190781	863	2.9360108	896	2.9523080
831	2.9196010	864	2.9365137	897	2.9527924
832	2.9201233	865	2.9270161	898	2.9532763
833	2.9206450	866	2.9375179	899	2.9537597
834	2.9211660	867	2.9380191	900	2.9542425

NUMERORUM LOGARITHMI.

N.	Logarith.	N.	Logarith.	N.	Logarith.
901	2.9547248	934	2.9703469	967	2.9854265
902	2.9552065	935	2.9708116	968	2.9858754
903	2.9556877	936	2.9712758	969	2.9863238
904	2.9561684	937	2.9717396	970	2.9867717
905	2.9566486	938	2.9722028	971	2.9872192
906	2.9571282	939	2.9726656	972	2.9876663
907	2.9576073	940	2.9731279	973	2.9881128
908	2.9580858	941	2.9735896	974	2.9885590
909	2.9585639	942	2.9740509	975	2.9890046
910	2.9590414	943	2.9745117	976	2.9894498
911	2.9595184	944	2.9749720	977	2.9898946
912	2.9599948	945	2.9754318	978	2.9903389
913	2.9604708	946	2.9758911	979	2.9907827
914	2.9609462	947	2.9763500	980	2.9912261
915	2.9614211	948	2.9768083	981	2.9916690
916	2.9618955	949	2.9772662	982	2.9921115
917	2.9623693	950	2.9777236	983	2.9925535
918	2.9628427	951	2.9781805	984	2.9929951
919	2.9633155	952	2.9786369	985	2.9934362
920	2.9637878	953	2.9790929	986	2.9938769
921	2.9642596	954	2.9795484	987	2.9943171
922	2.9647309	955	2.9800034	988	2.9947569
923	2.9652017	056	2.9804579	989	2.9951963
924	2.9656720	957	2.9809119	990	2.9956352
925	2.9661417	958	2.9813655	991	2.9960737
926	2.9666110	959	2.9818186	992	2.9965117
927	2.9670797	960	2.9822712	993	2.9969492
928	2.9675480	961	2.9827234	994	2.9973864
929	2.9680157	962	2.9831751	995	2.9978231
930	2.9684829	963	2.9836263	996	2.9982593
931	2.9689497	964	2.9840770	997	2.998695
932	2.9694159	965	2.9845273	998	2.9991305
933	2.9698816	966	2.9849771	999	2.9995655
934	2.9703469	967	2.9854265	1000	3.0000000

APPENDIX.



DDEMUS hic nonnulla, quæ ad Geometriæ planæ potissimum, & Arithmeticæ tractatus vel prorsus necessaria censuimus, vel maxime utilia. Tractatus eosdem jam olim conscripseramus in privatum Auditorum usum, qui ab Editore latinè redditi, & cæteris nunc a nobis conscriptis vel auctis præmissi sunt. Porro in Geometria plana seriem quandam theorematum jam tum ordinavimus, ex quibus fere omnia, quæ apud Euclidem, & cæteros Elementorum constructores occurrunt, vel sponte fluerent, vel facile, Præceptore indicante, deduci possent, soliti viva voce Tyronibus indicare deductiones ipsas, eosque ea ratione exercere in demonstratione theorematum, & problematum solutione. In Arithmetica verò demonstrationes pariter viva voce exponere soliti, eas plerumque ibidem omisimus, cum obrui soleat Tyronis animus, si dum in operationibus Arithmeticis exercetur, & præcepta ad usum deducit, demonstrationum, quæ scripto admodum difficulter satis dilucidè exponi possunt, longiore ambitu interturbatur.

Hic igitur ea, quæ Præceptor Tyroni insinuare potest, & quæ nos nostris Auditoribus insinuabimus, indicata potius, quam explicata adjiciemus. Erunt in iis & adnotationes quædam, & problemata exercendo Tyroni apta. Poterit autem hæc Tyroni ipsi Præceptor vel omnia, vel aliqua tantum selectiora pro ejus captu, & otio proponere, vel dum primum ele-

menta percurrit, vel dum, absolutis semel sine hac appendice elementis, ea iterum relegit. Si Tyro sine ullo Præceptore Geometriam addiscit; hæc, ubi elementa illa absolverit, videre poterit, sed nonnunquam consulendus erit aliquis Geometriæ peritior, ubi in deductione theorematum, vel solutione problematum vires suas incassum exercuerit: quod tamen multo rarius continget, si schemata, quæ hic præcipimus, diligenter delineare curet. Omittimus autem delineationem ipsam, ut eo acrius addiscentis industria excitetur, & ex veritatibus, tamquam suis quodammodo compertis, jucundiorem capiat voluptatem. Censemus autem nihil utilius ad Geometriam penitius cognoscendam haberi posse, quam hujusmodi contentio Tyronis in deducendis theorematis, vel solvendis problematis; qua fit, ut Geometria ipsa ejus animo multo altius insideat, & investigationis fontes aperiantur.

§. I.

De iis, quæ pertinent ad Geometriam Planam.

1. AXioma 5 converti posse notet in lineis rectis, & angulis æqualibus, quæ si æqualia sunt, debent congruere, & inde pendet demonstratio prop.2, & 3.

2. Lineæ rectæ, vel curvæ, ut & superficiei planæ, vel curvæ definitionem omisimus, quod nota sint æquè, ac quid sit majus, æquale, minus. At illud notandum, eam esse rectitudinis naturam, ut si bina puncta unius rectæ congruant cum binis alterius, debeant totæ ipsæ rectæ congruere, licet in infinitum produ;

productæ. Inde eruuntur hæc bina Euclidis axiomata. Rectæ lineæ spatium non claudunt: Rectæ lineæ segmentum commune non habent, nimirum in communem caudam non desinunt.

3. In schol. post def.4 pag.9 lin.11. notentur illa verba: *posita corporum continuitate*: nam si corpora constent punctis indivisibilibus, & a se invicem remotis, licet connexis ratione quadam exposita in dissertatione de lumine habita in Collegio Rom. anno 1748, puncta quidem realia sunt, & punctum quodvis potest solum etiam existere: corpora continuam extensionem, quam in iis Physici communiter admittunt nullam habent, ac in ea sententia aliæ est lineæ, superficiei, solidi idea. Linea est spatium per cursum motu puncti, superficies concipitur generari motu lineæ, solidum motu superficiei.

4. Post def.6 addi potest segmentum circumferentiæ circuli dici *arcum*, rectam, quæ ipsum subtendit, *chordam*, figuram interceptam arcu & chorda, *segmentum*, interceptam binis radiis *sectorem*.

5. In schol. post def.6 assumitur pag.10 lin.9, binas rectas ductas ex communi centro binorum circulorum, intercipere tot gradus in minori, quot in majori. Id ipsum accuratè demonstrari potest. Si majoris circuli circumferentia concipiatur divisa in quotcunque partes æquales, ut in gradus, & ad singulas divisiones ducantur rectæ: eæ secabunt in partes pariter æquales etiam peripheriam circuli minoris. Nam si quivis sector majoris circuli concipiatur revolvi circa alterum radium; arcus circuli majoris debebit congruere arcui sibi proximo, cum omnia
eorum

eorum puncta æquè distent a centro, & ipsi æquales sint. Inde autem facile eruitur debere simul & arcum minoris circuli arcui sibi proximo congruere, adeoque æqualem esse. Inde autem cætera sponte fluunt.

7. Eadem conversione demonstratur etiam circulum a diametro secari in binos æquales semicirculos, quod in defin.5 assumitur.

8. Ope postulati 3 ad datum punctum poni potest recta æqualis rectæ datæ, quod Euclidi est prop.2 l.1. Id ipse operosiore methodo solvit; cum non affirmat inter postulata translationem intervalli ex uno in alium locum, quod nos, ut evidenter possibile, & factu facile assumpsimus cum aliis multis.

9. Potest jam hinc insinuare Tyroni Præceptor discrimen inter problemata determinata, quæ vel unicam solutionem admittunt, ut ubi a recta majore abscindenda est recta datæ minori æqualis incipiendo a dato extremo, vel earum numerum determinatum, cujusmodi plura infra occurrent, & indeterminata, quæ infinitas solutiones admittunt, ut hic, ubi circa datum punctum descripto circulo cum intervallo rectæ datæ, quævis recta ad ejus peripheriam terminata solvit problema,

10. Hinc Tyro loci geometrici ideam habebit, qui nimirum omnes indeterminati problematis solutiones continet. Circuli descripti peripheria respectu hujus problematis est locus geometricus.

11. In scholio post def.7 assumuntur arcus circuli pro mensura angulorum. Notet Tyro, id rite præstari, ubi vertex anguli sit in centro. Facile enim demonstratur ope superpositionis, angulos ad centrum æquales subtendi arcubus æqualibus, & vice-versa.

versa. Quare duplo, triplo, centuplo angulo respondet duplus, triplus, centuplus arcus.

12. In Coroll. sequenti assumitur arcum PQ abscissum centro P intervallo BE esse æqualem arcui BE. Id accuratè demonstrari potest ex prop.4, quæ hinc non pendet. Ductis enim rectis BE, PQ, habebuntur bina triangula BCE, PMQ, in quibus latera unius erunt æqualia lateribus alterius, adeoque & angulus ad centrum C æqualis; unde patet, quo pacto in dato circulo applicari possit chorda æqualis datæ cuivis rectæ, quam tamen non posse diametro majorem esse patebit infra num.50.

13. Porro hinc deducitur hoc theorema. In æqualibus circulis chordæ æquales subtendunt arcus æquales ita nimirum, ut cùm quævis chorda subtendat hinc inde binos arcus; bini minores æquentur inter se, & bini majores inter se.

14. Ad defin.8 exponi potest norma, cujus ope recta datæ rectæ perpendicularis duci potest per datum punctum, & ejus examen, quod fit producto altero anguli recti latere, videndo an ea congruat novo angulo recto, qui fit ejusmodi productione. A norma ipsa perpendicularis appellatur normalis.

15. Corollarium 2, & 4. defin.10. converti possunt. Si fuerint (Fig.2.) anguli HCF, HCL simul æquales duobus rectis, rectæ, CF, CL jacebunt in directum, quia FC producta debet efficere cum HC angulum, qui sit complementum ad duos rectos anguli HCF, adeoque æqualis ipsi HCL, & si binæ rectæ CH, CK efficient cum recta FL angulos FCK, LCH ad verticem oppositos æquales, jacebunt pariter in directum. Utriusque hujus inversi theorema-

tis

tis usus est frequentissimus, primum Euclides demonstravit, secundum omisit.

16. Potest Tyroni Præceptor proponere, ut ope horum corollariorum ostendat, quo pacto extrorsum metiri liceat angulum, quem binæ externæ facies arcis, vel cujusvis alterius ædificii continent in plano horizontali. Præstabitur ope corol.2. si producto altero anguli latere, mensuretur is, quem ea linea continet cum latere altero, & capiatur complementum ad gr.180; ope corol.3, si ducatur quævis recta ab ipso anguli vertice, & a gradibus 360. demantur bini anguli, quos ea cum binis iis lateribus continet; ope cor.4, si producto utroque latere mensuretur angulus ad verticem oppositus.

17. Quod si eo pacto omnes arcis anguli determinentur, & angulorum latera mensurentur passibus; substituendo passibus ipsis particulas æquales quascunque, poterit arcis ambitus delineari.

18. In parallelarum doctrina assumpsimus in schol. post defin.17. æqualem inclinationem ad quamvis rectam, quæ nihilo minus evidens est, quam quidquid alii assumunt. At addi potest illud, rectas, quæ convergunt, si satis producantur, debere demum concurrere, licet infinita sint genera curvarum, quæ in infinitum productæ ad rectam, vel ad se invicem accedant ultra quoscunque limites; quin usquam concurrant, adeoque rectam, quæ parallelarum alteram secet, debere secare & alteram.

19. Hinc infertur theorema, quod Euclides pro axiomate assumpsit. Si recta incidens in binas rectas fecerit angulos internos ad eamdem partem minores duobus rectis, eæ rectæ satis productæ concurrent.

Parallelæ enim continent angulos æquales binis rectis. Quare si per concursum alterius ducatur recta alteri parallela; illa prior hanc novam parallelam secabit, adeoque & illam alteram rectam.

20. Potest hic proponi demonstrandum theorema, quod summo usui esse solet. Binæ rectæ binis aliis parallelæ, si uspiam concurrunt, continent angulos ad easdem partes æquales angulis, qui ab iis continentur. Facile demonstrabitur producendo earum alteram, si opus sit, donec occurrat harum alteri. Statim enim apparebit in ipso concursu haberi angulum æqualem utrilibet e præcedentibus.

21. Post defin. 18. addi potest, inter figuras quadrilineas *Trapezium* esse id, quod habet latera & angulos utcunque inæquales, *Rhombum*, qui omnia latera æqualia habet, *Rhomboidem*, quæ bina quævis opposita æqualia. *Multilateras*, *multangulas*, vel *polygonas* dici figuras plurium laterum, & angulorum, *pentagonum* quinque, *exagonum* sex, *decagonum* decem habere latera, & ita porro. *Polygonum regulare* & latera omnia habere æqualia, & omnes angulos æquales.

22. Post prop. 1. proponi potest quærendum, quam summam conficiant omnes anguli interni cujusvis polygoni, quam omnes externi. Si a singulis angulis ad quodvis punctum assumptum intra ipsum ducantur rectæ, fient tot triangula, quot sunt latera, & omnes eorum anguli simul æquantur omnibus angulis internis polygoni, una cum angulis, qui fiunt in eo puncto, & æquantur 4. rectis. Hinc omnes anguli interni æquantur tot rectis, quot exprimit duplus numerus laterum demptis 4. Cumque quivis exter-

ternus cum suo interno æquetur duobus rectis; omnes simul externi æquabuntur illis 4. rectis, qui a duplo laterum numero dempti sunt ad habendos omnes internos.

23. Inde eruetur quot graduum debeat esse angulus internus cujusvis polygoni regularis, dividendo summam per numerum laterum. In pentagono summa æquatur 6. rectis sive gradibus 540, quæ divisa per 5. exhibet angulum graduum 108.

24. Post corol.3. proponi potest hoc probl. A puncto dato extra rectam datam ducere aliam rectam, quæ cum ipsa contineat angulum æqualem dato. Solvetur, e quovis puncto rectæ datæ ducendo rectam, quæ cum data contineat angulum æqualem dato, tum aliam huic parallelam e puncto dato, vel ducendo e puncto dato rectam parallelam rectæ datæ tum aliam, quæ cum ea contineat angulum æqualem dato. Facta constructione statim patebit hanc rectam postremam cum data continere angulum æqualem dato.

25. In propr.2. notandum, quodvis latus pro basi assumi posse; sed in triangulis rectangulis basis nomine, nisi quid aliud exprimatur, intelligi hypotheausam, sive latus recto angulo oppositum.

26. Indicari hic potest, quo pacto distantiam aliquam metiri liceat ope hujus propositionis, ducendo ab extremis ejus punctis ad punctum quodvis binas rectas, mensurando eas, & angulum ibidem contentum, construendo alibi angulum ejusmodi, cum lateribus æqualibus, & mensurando basim novi trianguli obventuram æqualem quæsitæ distantiæ.

27. Ex eadem deducitur chordas æqualium ar-

cuum in æqualibus circulis æquales esse; cum nimirum si utrobique ducantur ab earum extremis radii ad centrum, anguli in centris æquales fiant, & latera circa ipsos æqualia.

28. E corol.2. eruitur, in trang. isoscelio productis lateribus, etiam angulos infra basim æquales esse inter se; nam cum iis, qui supra basim sunt singuli binos rectos complent.

29. Post corol.4. potest proponi construendum super data recta triangulum vel æquilaterum, vel isosceles datorum laterum; cumque id solvatur, facto centro in utroque extremo datæ rectæ, intervallo ipsius in primo casu, dati lateris in secundo, ductis binis circulis, & ad eorum intersectiones binis rectis; notari potest solutionem ejusmodi haberi per intersectionem binorum locorum geometricorum, de quibus num.9, & in primo casu semper haberi duas solutiones hinc inde a recta data, in secundo vel duas, vel nullam, lateribus nimirum dimidiam basim non excedentibus; ubi problematis impossibilis casus primo occurret.

30. Aliquanto difficilius, sed varietate casuum multo utilius problema erit hujusmodi. Dato puncto in altero latere dati anguli rectilinei, construere triangulum æquilaterum, cujus basis sit in eo latere, & incipiat a dato puncto, vertex vero sit in latere altero. Solvetur, assumendo in illo primo latere segmentum quodvis a puncto dato, construendo supra ipsum hinc inde bina triangula æquilatera, producendo utriusque latus illud, quod ad datum punctum terminatur, donec alteri lateri occurrat, ac ex hoc occursu ducendo rectam parallelam alteri lateri ejusdem

dem trianguli æquilateri. Admodum facile demonstrabitur haberi intentum ob angulorum æqualitatem in parallelis, ex quibus deducetur angulos triangulorum prodeuntium inter se omnes æquari. Patebit verò solutiones fore semper binas, præter casum, in quo angulus datus sit graduum 60, vel 120, quo casu alterius trianguli vertex in infinitum recedet, nec usquam jam erit.

31. In Coroll. 1. pr. 3. notetur, latera æqualia debere opponi angulis æqualibus. Possunt enim bini anguli cum uno latere æquari sine triangulorum æqualitate, si nimirum in altero latus illud iis angulis interjaceat in altero opponatur, vel non opponatur angulis æqualibus.

32. Post Coroll. 4. addendum illud. Si per quodvis diametri punctum ducantur binæ rectæ lateribus parallelæ; eæ parallelogrammum divident in 4 parallelogramma, quorum bina, per quæ diameter transit, dicuntur circa diametrum, reliqua bina dicuntur complementa. Porro complementa ipsa semper æqualia erunt. Nam integrum parallelogrammum secatur a diametro in bina triangula æqualia, a quibus singulis demendo bina triangula, quæ pariter sunt dimidia parallelogrammorum circa diametrum, relinquentur complementa quoque æqualia.

33. Tum proponi possunt demonstranda hæc theoremata, quorum usus sæpissimè occurrit. In quovis parallelogrammo binæ diametri se mutuo bifariam secant: si rectangulum sit, æquales sunt, & in ipsarum intersectione facto centro, circulus ipsi circumscribi potest. Demonstrabitur primum, considerando bina triangula ad verticem opposita, in

quibus invenientur latera parallelogrammi opposita æqualia, & anguli hinc inde ab ipsis alterni in parallelis æquales. Demonstrabitur secundum, considerando triangula, quæ utravis diameter continet cum binis rectanguli lateribus continentibus rectum angulum quæ habebunt latera æqualia, adeoque & bases. Tertium a primo, & secundo conjunctis sponte fluit.

34. In demonstratione Prop.4.superpositis basibus non est ostensum verticem unius trianguli non posse cadere in latus alterius, vel intra triangulum ipsum. At non posse cadere in latus, satis patet ob ipsam laterum æqualitatem: non posse cadere intra alterum triangulum, demonstrabitur, si conjunctis verticibus, ut in ipsa demonstratione, considerentur bina triangula isoscelia; nam ad absurdum devenietur eodem modo, si productis alterius lateribus consideretur in eo æqualitas angulorum ultra basim, in altero verò citra, ac illorum alter erit pars alterius ex his, alter vero totum respectu alterius.

35. Atque hic quidem exemplum habet Tyro demonstrationis indirectæ per reductionem ad absurdum. Directa, & expeditior demonstratio habebitur; si bases ita conjungantur, ut vertices cadant ad partes oppositas. Conjunctis enim verticibus, orientur bina triangula isoscelia, ex quorum angulis ad basim communem æqualibus, sponte fluet æqualitas angulorum oppositorum basi in dictis triangulis, & inde eorum æqualitas per prop.2.

36. Ex eadem Prop. demonstrari potest Rhombum, ac Rhomboidem esse parallelogramma. Ducta enim diametro habebuntur bina triangula per hanc propositionem æqualia, in quibus anguli ipsius diametri

metri cum lateribus exhibebunt æqualitatem angulorum alternorum, pro demonstrando parallelismo laterum. Porro hinc, & ex corollariis Prop.2., & 3, eruitur in quadrilineo, si ex hisce tribus, 1. quod utrumque par oppositorum laterum servet parallelismum, 2. utrumque servet æqualitatem, 3. alterum & parallelismum, & æqualitatem servet, habeatur unum, haberi semper reliqua duo. Bina ex his Euclides demonstravit: tertium, quod hic demonstravimus, licet æque necessarium, omisit.

37. Notandum hic in solis triangulis ab æqualitate laterum deduci æqualitatem angulorum, & arearum.

38. Ope prop.5. facile solvitur hoc problema. Cuivis polygono regulari circulum circumscribere. Solvetur, secando bifariam binos angulos proximos. Bissecantium concursus exhibebit centrum quæsiti circuli. Nam ob angulorum æqualitatem eæ rectæ cum latere poligoni constituent triangulum isosceles. Ex ipso concursu ductâ rectâ ad angulum proximum, fiet novum triangulum æquale priori; habebit enim mediam e tribus rectis bissecantibus angulos communem, latus ipsi proximum æquale lateri prioris, & angulum interceptum æqualem. Quare hæc tertia recta a suo angulo abscindet quantum & prima, nimirum ejus dimidium. Erit igitur & hoc isosceles, ac ita porrò.

39. Ex Coroll.3. ipsius pr.5. facile deducitur, quo pacto super data recta quadratum construi possit, vel rectangulum datorum laterum, & concipiendo superposita latera binorum quadratorum, patebit lateris majoris quadratum majus esse, & viceversa.

40. Licebit hìc eruere alium locum geomètricum, qui contineat vertices omnes omnium triangulorum isoscelium habentium datam rectam pro basi, sive centra omnium circulorum transeuntium per data duo puncta. Is erit recta indefinita secans bifariam, & ad angulos rectos rectam datam, seu jungentem data puncta:

41. Eruetur etiam hoc theorema summo sæpe futurum usui. In triangulo isoscelio ducta ab angulo basi opposito recta quadam, si ex hisce tribus, 1. quod angulus secetur bifariam, 2. quod basis secetur bifariam, 3. quod eadem secetur ad angulos rectos, habeatur unum, habebuntur & reliqua duo, & si in quodam triangulo habeantur duo ex iis, id triangulum erit isoscele. Demonstratio ex propositionis demonstratione sponte fluit.

42. Problema Tyroni exercendo aptum esse potest hujusmodi. In data recta invenire punctum a binis datis punctis æquè distans. Solvetur jungendo recta puncta data, & ex ipsa bifariam secta ducendo rectam perpendicularem indefinitam, cujus occursus cum data recta solvet problema, qui concursus abibit in infinitum, nec usquam jam erit; si bina puncta jacuerint in recta datæ rectæ perpendiculari.

43. Omitti autem non debet hoc aliud; datis tribus punctis invenire centrum circuli per ea transeuntis. Solvetur conjungendo unum cum reliquis, secando bifariam rectas jungentes, & ducendo per sectionum puncta rectas perpendiculares iis, quarum concursus determinabit quæsitum centrum; quod tamen in infinitum recedet, nec usquam jam erit, si tria data puncta in directum jaceant, recta illa quodammodo æquivalente arcui circuli infiniti.

44. Id

44. Id autem coincidit cum solutione hujus problematis: dato triangulo circumscribere circulum. Et quoniam datis tribus punctis, unicum invenitur centrum circuli per ea transeuntis, eruitur hoc theorema: Si binorum circulorum tria peripheriæ puncta congruant, congruunt reliqua omnia. Inde autem fluit solutio hujus problematis: dato circuli arcu invenire centrum, & ipsum complere. Satis erit assumptis in eo tribus punctis ad arbitrium invenire centrum circuli per ea transeuntis.

45. Potest exercitationis gratia proponi & hoc. In data recta invenire punctum, ad quod a binis datis punctis ductæ binæ rectæ contineant cum recta ipsa angulos æquales. Solvetur ducendo ex altero rectam perpendicularem rectæ datæ, & eam producendo tantundem; tum ex altero dato puncto ad punctum extremum rectæ productæ ducendo rectam; & erit idem casus, quem solvimus in scholio, pertinens ad reflexionis punctum.

46. Post Coroll.4. hujus prop.5. proponendum hoc problema. Datum circuli arcum bifariam secare. Solvetur ducendo e centro rectam perpendicularem chordæ dati arcus. Deducenda autem sequentia theoremata summo usui futura. Diameter, quæ chordam non per centrum transeuntem bifariam secat, vel quæ chordam quamvis secat ad angulos rectos, secat bifariam & arcum. Si arcum secat bifariam, secat bifariam, & ad angulos rectos chordam. Chorda, quæ aliam chordam, & ejus arcum bifariam secat, vel arcum bifariam, & ejus chordam ad angulos rectos, est diameter. Hæc facilè demonstrantur. Inde fluit hoc aliud: Binæ chordæ, quæ diame-

diametri non sint, non possunt se mutuo secare bifariam; recta enim e centro ad intersectionem ducta esset utrique perpendicularis. Demum habetur solutio hujus problematis: Dati circuli centrum invenire: solvitur, si ducta chorda quavis, & secta bifariam, per sectionem ducatur recta ipsi perpendicularis utrinque terminata ad circumferentiam, quæ erit diameter, & secta bifariam exhibebit centrum quæsitum.

47. In prop. 6. si punctum E cadat inter puncta C, & B, vel in B, demonstratio habebitur addendo binis triangulis æqualibus trapezium commune in primo casu, triangulum in secundo.

48. Ipsa prop. ac ejus corollaria convertenda sunt. Maximos enim conversa usus habent. Nimirum parallelogramma, vel triangula æqualia super eadem basi, & ad easdem partes, vel parallelogrammum duplum trianguli, sunt inter easdem parallelas. Facile demonstrantur, cum ob bases æquales debeant (per schol. sequens) habere altitudines æquales. Quare recta per vertices ducta, & recta ducta per bases claudunt bina perpendicula æqualia, & proinde parallelæ sunt.

49. Ex rectangulorum mensura, quæ habetur in scholio facile deducitur rectangulum contentum sub binis rectis, quæ nimirum angulum rectum contineant, æquari simul rectangulis omnibus contentis sub illa, & partibus omnibus hujus. Nam idem est unum numerum multiplicare per alium simul, ac multiplicare partes, sive idem est aliquid accipere decies, ac accipere prius bis, tum ter, tum quinquies. Inde vero eruitur etiam quadratum lineæ

æqua-

æquari rectangulis omnibus, quæ ipsa continet cum omnibus suis partibus, ac rectangulum, quod una pars lineæ continet cum tota æquari illi, quod continet secum, & cum altera parte, sive quadrato sui, & rectangulo binarum partium, qui sunt casus particulares prioris theorematis. In fine autem scholii, ubi de circuli dimensione agitur, notandum, contemptum quantitatum infinitesimarum adhiberi posse sine ullo erroris periculo, ut in solidis demonstratur. Sed de infinitesimis multo uberius agetur post sectiones conicas tomo 2.

50. Ex prop. 7, quæ fœcundissima est, plurima theoremata, ac solutiones problematum derivari possunt. Derivetur in primis hoc theorema. In triangulo rectangulo basis est major utrovis latere, & si in binis triangulis rectangulis bases æquales habentibus unum latus uni lateri æquale erit, erit & alterum alteri æquale, ac tota triangula æqualia; si autem unum latus primi sit majus uno latere secundi, erit alterum minus altero. Patet ex eo, quod summa quadratorum laterum est æqualis quadrato basis.

51. Inde sponte fluet hoc aliud. In circulo chordæ quæ a centro æque distant, æquales sunt: omnium chordarum maxima est diameter, reliquæ eo minores, quo magis a centro distant. Ducto enim a centro perpendiculo in chordam quamvis, quod ipsam secabit bifariam, fiet triangulum rectangulum, quod habebit pro basi radium, pro lateribus semichordam, & distantiam a centro, ex quo omnia facile deducuntur.

52. Proponenda hæc duo problemata: Datis quotcunque rectis, aliam invenire, cujus quadratum

tum sit æquale simul quadratis omnibus earum omnium : Datis binis rectis invenire aliam, cujus quadratum æquetur differentiæ quadratorum earundem. Primum solvetur, conjungendo ope anguli recti quadrata binarum in quadrato novæ rectæ, tum quadratum tertiæ cum quadrato hujus novæ in alia, & ita porrò. Secundum, abscindendo ex latere altero anguli recti segmentum æquale rectæ minori, tum ex extremo ejus puncto applicando in ipso angulo recto basim æqualem majori; latus enim alterum problema solvet.

53. Tum hoc theorema inferatur, quod rursus fœcundissimum erit. Rectarum omnium, quæ a dato puncto duci possunt ad datam rectam indefinitam brevissima est perpendicularis, reliquæ eo majores, quo magis a perpendiculari distant; & quæ hinc inde æque distant æquales, nec nisi binæ hinc inde æquales duci possunt. Ea omnia ex ipsa propositione sponte fluunt, si consideretur, quamvis rectam esse basim trianguli rectanguli, cujus alterum latus constans est perpendicularis illa, alterum distantia ab eadem assumpta in ipsa recta indefinita.

54. Inde hæc theoremata consequuntur. Quævis recta indefinitè producta vel circulum secat in duobus punctis, vel contingit in unico, vel illi nusquam occurrit: & in primo casu omnia puncta segmenti binis sectionibus intercepti, sive chordæ, jacent intra circulum, puncta reliqua omnia ejusdem rectæ jacent extra: in secundo casu præter unicum punctum contactus reliqua omnia jacent extra circulum. Si enim recta transit per centrum; in ea pars prima est manifesta: si per id non transit; de-

missò

misso in eam perpendiculo e centro, si id perpendiculum fuerit minus radio circuli, cadet intra circulum, & recedendo ab ipso hinc inde, distantia a centro semper magis crescet, donec deveniatur ad distantiam æqualem radio, quæ deinde semper major evadet. Si id perpendiculum erit æquale radio, extremum ejus punctum cadet in peripheriam, tum hinc inde distantiæ omnes radio majores erunt. Si perpendiculum fuerit majus radio, multo majores erunt reliquæ omnes distantiæ.

55. Quædam, quæ ad tangentem circuli pertinent, demonstravimus alia methodo in corollariis prop. 8. At vel hic, vel ibi potest deduci hoc theorema maximi usus. Si per quoddam peripheriæ punctum transeant binæ rectæ, & ex hisce tribus, 1. quod altera sit circuli tangens, 2. quod altera sit circuli diameter, 3. quod angulum rectum constituant, habeantur duo simul, habebitur & tertium:

56. Tum hoc aliud: Si in circulo adsit chorda, & alia recta per quoddam peripheriæ punctum transeat, ac ex hisce tribus, 1. quod arcus a chorda subtensus in eo puncto secetur bifariam, 2. quod ea recta circulum ibi tangat, 3. quod ipsi chordæ parallela sit, quotiescunque habebuntur duo, habebitur & tertium. Facile autem demonstrabitur, ducta ex illo puncto arcus diametro circuli, quæ si ipsum arcum bifariam secat, & illa recta sit ipsi chordæ parallela, secabit ad angulos rectos chordam, adeoque erit perpendicularis illi rectæ, quæ proinde erit tangens. Si ea fuerit tangens, illa diameter erit perpendicularis ipsi, ut chordæ, adeoque ipsa tangens parallela chordæ. Si autem illa recta fuerit tangens, & pa-

& parallela chordæ, diameter erit perpendicularis illi, adeoque & chordæ, quam proinde secabit bifariam.

57. Potest proponi hoc problema satis utile: Circulum describere, qui rectam datam continget in puncto dato, & transeat per punctum datum extra ipsam. Solvetur per intersectionem binorum locorum Geometricorum. Alter erit recta datæ rectæ perpendicularis in puncto dato, in qua jacent omnia centra circulorum ibi tangentium ipsam rectam datam, alter recta secans bifariam, & ad angulos rectos rectam jungentem punctum contactus cum altero puncto dato, in qua nimirum sunt omnia centra circulorum transeuntium per ea puncta.

58. Demum hic jam solvi potest hoc problema: Dato polygono regulari circulum inscribere. Solvetur autem secando bifariam binos angulos proximos, ac ex concursu, quod erit centrum, ducendo ad latus interceptum rectam perpendicularem, quæ erit radius. Nam rectæ ex eo centro ad omnes angulos ductæ eos bifariam secant juxta num. 38. Quare si ex ipso concursu in bina quævis latera proxima demittantur perpendicula; ea constituent bina triangula rectangula habentia pro basi communi rectam angulum interceptum bifariam secantem pro altero latere dimidia latera polygoni, quæ semper æqualia erunt; ac proinde perpendiculum quodvis sibi proximo æquale erit, & uno assumpto pro radio, circulus per omnium extrema transibit, ac latera omnia continget.

59. Facile eruetur ex ipsa demonstratione, in ipsis contactibus latera singula polygoni bifariam secari.

60. Pa-

60. Patebit autem eadem demonstratione etiam in quovis triangulo concursum binarum rectarum binos angulos secantium bifariam, præbere centrum circuli inscribendi. Exhibent enim eæ binæ rectæ bissecantes tria perpendicula æqualia.

61. In quovis triangulo bina latera simul tertio majora esse, videtur satis manifestum, ex ipsa rectitudinis natura. At id quidem accuratissime demonstrari potest ope corol. 1. prop. 8. Si enim (Fig. 35.) binorum laterum BD, DC primum concipiatur productum in A ita, ut sit DA æqualis DC, ducta CA, erit ob isoscelismum angulus DCA æqualis DAC. Quare totus BCA major BAC, & BA, sive BD, DC simul superabunt BC.

62. Inde consequetur hoc aliud theorema: Si bina triangula basim communem habeant, vertex autem alterius intra alterum cadat, hujus bina latera simul minora erunt binis lateribus illius, angulus vero ab iis contentus major illius angulo. Facile demonstrabitur producto inclusi latere altero, donec occurrat lateri includentis. Fiet enim super eadem basi tertium triangulum, cujus latera simul facile demonstrabuntur majora lateribus inclusi, minora lateribus includentis, ut angulus contra illius angulo minor, hujus major.

63. Ad Corol. 2. notari potest, si binorum triangulorum superponantur potius latera majora, fieri posse, ut punctum C cadat extra triangulum ABD, in ipsam basim AD, vel intra triangulum. In primo casu demonstratio facta locum habet, in secundo res est manifesta, in tertio demonstratur ope numeri præcedentis. Nam eo casu cadente C intra triangu-

lum

lum, rectæ AC, CB simul erunt minores rectis AD, DB, & demptis BC, BD æqualibus, recta AD erit major, quàm AC.

64. Ex ipso Corol.2. sponte fluunt sequentia theoremata. Rectarum omnium, quæ ex puncto dato extra centrum circuli terminantur ad omnia puncta peripheriæ, maxima erit ea, quæ ad centrum ducta, ac producta peripheriæ occurrit ultra ipsum centrum, reliquæ eo minores, quo per majores arcus distant ab eo occursu puncta, ad quæ terminantur, ac binæ tantummodo quæ hinc inde per æquales arcus distant ab occursu eodem, æquales inter se sunt: minima vero erit nulla, si punctum detur in ipsa peripheria, ac si detur extra, erit ea, quæ terminatur ad punctum priori e diametro oppositum. Satis erit ad hæc omnia demonstranda ducere radium e centro ad id punctum peripheriæ, ad quod terminatur recta ipsa, & considerare variationes omnes, quas subit angulus contentus in centro ab hoc radio, & a recta jungente centrum cum puncto dato, cujus bina latera semper eadem erunt, basis vero recta illa a puncto dato ad punctum peripheriæ terminata augebitur, vel minuetur cum angulo.

65. Inde verò facile admodum deducitur: chordam arcus magis a semicirculo recedentis esse minorem: circulum ab alio circulo vel secari in binis punctis ita, ut alter ex ejus arcubus binis intersectionibus interceptus sit totus intra ipsum, alter totus extra, & recta, quæ conjungit bina eorum circulorum centra, bifariam secet tum arcus ipsos, tum chordam per intersectiones ductam, ac secet chordam eandem ad angulos rectos: vel contingi in unico

eo puncto, quod quidem semper jacebit in eadem recta cum binis centris ita, ut si inter ipsa centra jaceat, alter circulus extra alterum cadat, & convexitatem sibi obvertant; si verò utrumque centrum jaceat ad eandem ejus plagam, totus minor circulus in majori includatur: vel demum sibi nusquam occurrere, sive alter ad alterum non pertingat, sive eum complexus ultra ipsum transcurrat. Hæc autem patebunt omnia, si pro puncto dato superioris numeri assumatur ipsum alterius circuli centrum.

66. In Corol. 1. post prop. 9, cum dicitur arcum esse mensuram anguli, non intelligitur mensura in eo sensu, in quo sumitur in schol. post prop. 7, ut sit id, quod aliquoties sumptum adæquat totum, sed pro quantitate æquali, qua mensurata habeatur magnitudo ejus quantitatis, cujus mensura dicitur, atque in hoc sensu fere semper etiam inferius accipietur.

67. In ipsa Prop. 9. notandum, si arcus circuli sit semicirculo major, non posse in communi angulorum consideratione angulum ipsi insistere ad centrum, licet possit ad circumferentiam. Nam ex binis ejus extremis rectæ ad centrum ductæ angulum constituent versus ipsum. Ac si ipse arcus semicirculo æqualis sit, bini ejusmodi radii in directum jacebunt, nec angulum constituent. Hinc ut in hoc communi modo concipiendi angulos demonstretur Corol. 1. recurrendum est iterum ad demonstrationem propositionis, & in hoc casu semper centrum necessariò cadet intra angulum, ut in fig. 40, eritque semper dimidius arcus AE mensura anguli ADE, dimidius BE mensura anguli BDE, adeoque dimidium totius AEB erit mensura totius anguli ADB.

68. Ceterum anguli, sive rectarum inclinationes considerari possunt etiam ex parte opposita cuspidis, nimirum externa, vel convexa, qui ab aliquibus dicuntur anguli gibbi. Quoniam id summo usui esse potest, & ad Geometriæ vim, & analogiam quandam intelligendam plurimum conducit, capiatur circinus, ac sensim aperiatur cuspide utraque, & hiatu spectante Cœlum, donec bina ejus crura in directum jaceant, tum motu crescente in contrariam partem inflectantur. Initio quidem angulus communi modo consideratus Cœlum spectabit; tum is perpetuo crescens abibit in rectum, deinde in obtusum. Jacentibus in directum cruribus, angulus non evadet nullus, sed æqualis binis rectis, sive graduum 180. Deinde vero angulus communi modo consideratus jam spectabit deorsum; at ille, qui Cœlum spectabat, adhuc magis auctus evadet major binis rectis, & fiet is, quem diximus angulum gibbum. Et si eo quidem pacto anguli considerentur, propositio erit generaliter vera, & cuicunque arcui insistat ad circumferentiam angulus, habebit alium insistentem ad centrum sui duplum.

69. Quin immo concipi potest angulus rectæ lineæ cum alia recta, ut major etiam 4. rectis, & graduum quotcunque, concipiendo alteram circa alteram absolvere integras conversiones quotcunque.

70. E Corol. 1. sponte fluit hoc theorema. Anguli omnes, qui in eodem, vel in æqualibus circulis insistunt arcubus æqualibus, ac ad peripheriam terminantur, sunt inter se æquales. Inde vero hoc aliud ejus inversum. Locus, qui continet ad easdem partes vertices omnes angulorum æqualium, quorum cru-

crura discedunt è datis binis punctis, est arcus circuli transeuntis per illa bina puncta, & verticem unius cujuslibet ex ipsis. Nam omnes ad eum arcum terminati æquales sunt; facile autem demonstratur omnes terminatos intra majores esse, extra minores, efficiendo angulum terminatum ad eum arcum, cujus anguli latus transeat per verticem terminati intra, vel extra; Erit enim is angulus respectu terminati intra internus & oppositus, respectu terminati extra externus.

71. Ex eodem Corol. 1. deducitur hoc aliud theorema: Circulus triangulo rectangulo circumscriptus, habet pro diametro basim; inde vero fluit hoc aliud: Vertex anguli recti distat a media basi per dimidiam basim. Primum patet ex eo, quod angulus rectus debeat esse in semicirculo, secundum ex eo, quod centrum debeat esse in media basi.

72. Tum inde haud difficulter derivatur hoc aliud. Si divisa circuli peripheria in partes æquales quotcunque, singulæ sectiones conjungantur cum sibi proximis, orietur polygonum regulare inscriptum, si per singulas sectiones ducantur tangentes, orietur circumscriptum. Primum patet; quia latera erunt chordæ arcuum æqualium, adeoque æqualia; anguli autem insistent arcubus æqualibus, nimirum excessui totius circuli supra binos arcus subtensos a binis eorum lateribus. Secundum demonstrabitur ductis a centro ad omnes contactus, & proximarum tangentium concursus rectis, quæ cum segmentis tangentium interceptis inter binas quasque proximas constituent triangula rectangula, & om-

nia prorsus æqualia ; unde & angulorum , & laterum æqualitas sponte fluet.

73. Ad exercendum Tyronem possunt proponi hujusmodi problemata. Per datum punctum rectam ducere ita, ut ejus segmentum dato circulo interceptum æquetur rectæ datæ. Dati circuli tangentem ducere ita, ut ejus segmentum interceptum inter contactum, & rectam datam indefinitam, æquetur rectæ datæ. Rectam ducere, quæ binos circulos datos simul tangat.

74. Primum solvetur ducta e quovis puncto chorda æquali datæ rectæ, tum e centro ducto perpendiculo in ipsam, & hoc radio, ac eodem centro, descripto circulo novo, ad quem si è dato centro ducantur tangentes; problema solvent; exhibebunt enim chordas æque a centro distantes, ac distat chorda primo applicata. Erunt autem binæ solutiones, vel unica, vel nulla; prout data recta fuerit minor, æqualis, vel major diametro.

75. Secundum solvetur, ducta ex quovis puncto peripheriæ tangente circuli æquali rectæ datæ, tum eodem centro per ejus extremum punctum ducto circulo, qui si bis secet rectam datam, solutiones erunt quatuor, ductis binis tangentibus e singulis intersectionibus, si in unico puncto contingat, binæ tantum tangentes inde duci poterunt; si ad eam non pertingat, problema erit impossibile. Demonstratio patebit, si producantur tangentes ipsæ, quæ fiunt chordæ circuli majoris æquè distantes a centro, & in ipsis contactibus bifariam secabuntur.

76. Tertium solvetur, ducendo radium quemvis

vis majoris circuli, ac in eo tam versus centrum, quàm producto ad partes centro oppositas abscindendo segmentum æquale radio minoris circuli: Si enim centro majoris circuli, & hoc novo intervallo summæ, vel differentiæ radiorum describatur circulus: ad eum ducantur tangentes ex centro minoris circuli, per contactum quemvis e centro majoris circuli ducatur radius, & per ejus extremum punctum tangens circuli majoris; eadem & minorem continget. Id autem demonstrabitur, ducendo ex centro circuli minoris perpendiculum in ipsam, quod invenietur æquale distantiæ binarum tangentium circuli majoris, & novi, adeoque radio circuli minoris. Porro si circulus alter extra alterum jaceat totus, invenientur quatuor tangentes ita ut binæ, quæ determinabuntur per summam radiorum, se inter ipsos circulos interserant, reliquarum utralibet ad eandem utriusque partem jaceat; si se contingant exterius, binæ illæ priores in unicam coalescent; si se secent, binæ priores impossibiles fient; si se contingant interius, etiam posteriores binæ in unicam coalescent; si alter intra alterum jaceat; omnes erunt impossibiles; ut adeò haberi possint solutiones 4, 3, 2, 1, nulla.

77. Poterit autem moneri Tyro, hoc postremum problema exhibere umbram, & penumbram Eclipsium, consideratis quatuor communibus tangentibus globorum Solis, & Lunæ, vel Solis, & Terræ, quarum priores duæ penumbram, posteriores umbram determinant.

78. Corol.3. hujus prop.9. converti poterit: describendo nimirum circulum per tres vertices angu-

gulorum quadrilinei habentis angulos oppositos simul duobus rectis æquales, qui transibit etiam per quartum. Nam si quartus vertex intra circulum caderet, contineret angulum majorem complemento oppositi ad duos rectos, si extra minorem, ut num.70.

79. Corol.5. converti potest ita: Si binæ chordæ se intra circulum non secantes intercipiant arcus æquales, parallelæ sunt. Si enim concurrerent extra; continerent angulum cujus mensura esset semidifferentia arcuum interceptorum.

80. E Corol.6. infertur hoc theor. Anguli, quos chorda ex contactu ducta continet cum tangente, æquantur iis, qui insistunt ipsi chordæ in alternis segmentis: nimirum angulus ABE æquatur cuivis angulo descripto in segmento ADB, & angulus ABF cuivis descripto in segmento, quem chorda AB continet cum suo arcu versus E. Nam habent mensuram eandem, illi dimidium arcum AB, hi dimidium ADB.

81. Hinc facile solvuntur hæc problemata: A dato circulo abscindere segmentum, quod contineat angulum æqualem dato, & incipiat in puncto peripheriæ dato: Supra datam rectam construere segmentum circuli continens angulum æqualem dato. Primum solvitur, ducta circuli tangente per datum peripheriæ punctum, & ex eodem chorda, quæ cum tangente contineat angulum æqualem dato: secundum solvitur, ducendo per alterum extremum rectæ datæ aliam rectam, quæ cum ea contineat angulum æqualem dato, tum per num.57. describendo circulum, qui hanc rectam tangat in eo chordæ extremo, & transeat per alterum extremum.

82. Pa-

82. Pariter hoc aliud: Dato circulo inscribere triangulum, quod habeat angulos æquales angulis dati trianguli, & cujusvis anguli verticem in puncto dato. Solvetur ducendo per id punctum tangentem, tum ducendo binas chordas, quæ contineant cum tangente hinc inde binos angulos æquales reliquis angulis trianguli dati. Conjunctis enim extremis chordarum, facile patebit haberi intentum (per num. 80).

83. In scholio ante prop. 10. delibantur tantummodo quædam, quæ pertinent ad algebraica signa, & Arithmeticæ notiones, quæ & captu facilia sunt, & ad reliqua, quæ hic pertractamus, sufficiunt. Arithmeticam plenius hic post Geometriam planam tractavimus, Algebram finitam hujus tomi pars secunda complectitur. Interea si quam notionem numeri integri, fracti, multiplicationis, divisionis &c. ignoret Tyro, nondum Arithmeticam aggressus, eam facile a Præceptore addiscet.

84. Ubi pag. 45. lin. 9. dicitur: *Quoties tertius terminus continet quartum, aut similem ejus partem*; notet in primis nomine *partis* non hic intelligi partem, quæ aliquoties sumpta adæquet totum, & dicitur aliquota, sed quæ cum alia parte totum adæquat, & dicitur aliquanta. Deinde nomine *similis* intelligi eodem expressam numero, ut nimirum si primus terminus contineat secundi partem quartam, quintam, decimam, etiam tertius contineat partem quartam, quintam, decimam quarti, & ita porro; nimirum numerus ille, qui exprimit, quo pacto primus terminus secundum contineat, debet esse idem, ac is, qui exprimat idem in tertio respectu quarti. Sine hac

explicatione nomen *similis*, quod potest sonare idem ac proportionalis, illud assumeret, quod deberet explicare.

85. Porro ille numerus m potest esse integer, vel fractus, vel continere seriem fractionum decrescentium in infinitum. Si primus rationis terminus est commensurabilis cum secundo, semper numerus m erit finitus utcumque fractiones involvat. Si primus terminus sit linea palmorum 12, secundus 4, erit $m = 3$, si ille 4 hic 12 erit $m = \frac{1}{3}$, si ille contineat palmos 17, hic 5, erit $m = \frac{17}{5} = 3.\frac{2}{5}$. At si incommensurabiles sint, non poterit haberi m sine serie infinita. Sic si primus terminus sit diameter quadrati, & secundus ejusdem latus, erit $m = 1.4142$ &c. (per schol. prop. 7.)

86. Posita hac defin. patet ex axiomate tertio, quantitates æquales ad alias æquales habere rationem eandem, & viceversa; ac patet etiam illud, quod Arithm. cap. 2. assumpsimus pro fundamento totius doctrinæ de proportionibus, si uterque rationis terminus per eandem quantitatem multiplicetur, vel dividatur, manere rationem.

87. In proportionibus monendus Tyro terminos homologos dici antecedentes inter se, & consequentes inter se, sive primum ac tertium, secundum ac quartum: Rationem autem reciprocam, seu inversam eam, quam habet terminus consequens ad antecedentem. Ratio directa 6 ad 3 est dupla, ratio reciproca ejusdem non est dupla, sed subdupla.

88. In demonstratione prop. 10 notandum, quantitates

titates etiam heterogeneas posse inter se multiplicari, si assumpta in quavis quantitatum specie una aliqua ad arbitrium, quæ dicatur unitas, reliquæ exprimantur numeris finitis, vel serie fractionum infinita, prout fuerint commensurabiles cum ea, vel incommensurabiles.

89. Ut vim habeat demonstratio prop. 10, necessarium est hoc theorema. Quotiescunque tres numeri multiplicantur ita, ut binorum productum multiplicetur per tertium, semper omnium productum evadit idem. Si multiplicandi sint 2, 5, 7 erit $2 \times 5 = 10$, & $7 \times 10 = 70$, tum $2 \times 7 = 14$, & $5 \times 14 = 70$, ac $5 \times 7 = 35$, & $2 \times 35 = 70$.

90. Id in quotcunque numeris verum est, & in Arithmetica demonstrandum. Eo posito vis argumenti sita est in eo, quod cum sit $a = mb$, & $c = md$, erit $ad = mbd$, & $bc = bmd$; nimirum in utroque casu idem productum numerorum m, b, d, licet ordine diverso multiplicatorum. Hinc $ad = bc$ productum extremorum æquale producto mediorum.

91. In Coroll. 1. notetur regulam trium non habere locum, si tres termini dati cum quarto quæsito proportionales non sint. Si navis inæquali vento impellatur, & scias horis tribus confecisse milliaria 7, non potes invenire, quot milliaria conficere debeat horis 9.

92. In Coroll. 2. notetur, alternationem propriè haberi non posse, nisi in quantitatibus homogeneis, & solum ope numerorum quantitates exprimentium transferri ad heterogeneas. In motu æquabili spatium factum uno tempore ad factum alio, est ut primum tempus ad secundum. Alternando est primum spatium

spatium ad primum tempus, ut secundum spatium ad secundum tempus. Propriè spatium ad tempus nullam rationem geometricam habet, cum se continere non possint, sed ratio habebitur in numeris ea exprimentibus.

93. In prop. 11. idem dicendum de multiplicatione antecedentium, & consequentium. Et quidem Euclides, ut evitaret multiplicationem in quantitatibus heterogeneis, & series infinitas in incommensurabilibus, alio modo rationem compositam definivit, ut videbimus suo loco. Sed hæc nostra methodus est multo contractior.

94. Euclides alios duos arguendi modos demonstravit *ex æqualitate ordinata, & perturbata*. Cum nobis hic usui futuri non essent, eos omisimus. Habentur Arithm. cap. 2. num. 21, & hic etiam admodum facile demonstrari possent. Pariter alium demonstrat arguendi modum *per conversionem rationis*, cum sumitur primus terminus ad excessum primi supra secundum, ut tertius ad excessum tertii suprà quartum, qui includitur in iis, quæ diximus in fine Coroll. 2. prop. 10, & quem demonstravimus Arithm. cap. 2. num. 12.

95. In demonstratione prop. 12, ubi pag. 50. lin. 18. dicitur: *Sed triangula &c.*, ex hoc theoremate, quod triangula æquè alta, si habent bases æquales æqualia sunt, infertur statim triangula CEB, DEB æque alta se eodem modo continere, quo bases suas. Id deducitur hoc pacto. Si utraque basis dividatur in particulas æquales quascunque, & ad communem verticem e singulis sectionibus ducantur rectæ; dividentur triangulorum areæ in particulas æqua-

æquales vi ejus theorematis, quæ erunt totidem numero, quot basium particulæ. Quare areæ se eodem modo continent, quo bases.

96. Verum & hæc prop., & aliæ multæ, quæ pertinent ad comparationes superficierum inferuntur e scholio prop.6. & doctrina proportionum: Hæc omnino non ignoranda: Quadratum mediæ proportionalis inter binas rectas æquatur earundem rectangulo. Omnia parallelogramma comparata inter se, & omnia triangula inter se sunt in ratione composita basium, & altitudinum (per prop.10.) cum æquentur productis ex basibus, & altitudinibus. Si bases fuerint æquales, illa sunt ut altitudines, & si altitudines fuerint æquales, erunt, ut bases, per num.86. Si bases fuerint in ratione reciproca altitudinum, nimirum basis unius ad basim alterius, ut hujus altitudo ad illius altitudinem, areæ æquales erunt, & viceversa, (per prop.9).

97. Ope tertii ex his theorematis statim patet in ea demostratione prop.12. triangulum CEB ad DEB esse ut basim CB ad DB, & ADB ad idem EDB ut AB ad EB, unde consequitur CB. DB :: AB. EB.

98. Ex Prop.12. plurima theoremata profluunt, plurimæ problematum solutiones, & multa quidem ex iis usu sæpissime occurrunt, alia sunt Tyroni exercendo aptissima. Potiora delibabimus. In triangulis habentibus aliquem angulum æqualem areæ sunt in ratione composita laterum eum angulum continentium. Si enim in alterum ex iis assumptum pro basi e vertice opposito demittatur perpendiculum sive altitudo; facile ope trianguli rectanguli, qui oritur ad partem anguli æqualis eruetur, illa perpendicula

cula esse ut latera non assumpta pro basi. Quare cum sint areæ in ratione composita ex ratione basium, & altitudinum; erunt in ratione composita eorum laterum. Hinc in ejusmodi triangulis si ea latera sint in ratione reciproca; areæ æquales erunt, & viceversa.

99. Atque hinc etiam statim consequitur theorema demonstratum in Corol. 1. Triangulorum similium areas esse in ratione duplicata laterum homologorum: cum latera circa æquales angulos sint proportionalia.

100. In quovis triangulo recta basi parallela secat latera in eadem ratione, & si ita secat est parallela. Deducitur facile ex ipsius propositionis demonstratione. Cum enim sit CB. BD:: AB. BE; erit dividendo CD. DB:: AE. EB, & huic quidem theoremati innituntur corollaria 4., & 5. Si autem ita sit, erit ED parallela AE; nam si ea non esset, esset alia ducta ex E, quæ in alio puncto secaret latus BC, & tamen secaret in eadem ratione. Quare ipsius rectæ BC, pars minor alterâ e partibus BD, DC haberet ad majorem alterâ eandem rationem, quam ipsæ habent, quod est absurdum, cum quò primus terminus rationis est minor, & secundus major debeat decrescere numerus, qui exprimat, quomodo se contineant.

101. Notetur etiam in triangulis æquiangulis esse tam AB. BC:: FG. GH, quam AB. FG:: BC. GH, & hic tam CD. DB:: AE. EB, quam CD. AE:: DB. EB, cum nimirum ex altera proportione eruatur altera, ut aliæ plures componendo, dividendo, invertendo, alternando.

102. Eruitur etiam hoc theorema futurum sæpe summo usui. Si per quoddam punctum transeant plures rectæ utrinque indefinite productæ, & incidant in rectas parallelas quotcunque, segmenta parallelarum intercepta binis ex illis rectis ad segmenta intercepta aliis binis quibuscunque erunt in omnibus parallelis in eadem ratione. Nam segmentum unius parallelæ ad segmentum alterius inclusum binis quibusvis iisdem rectis, facile invenietur esse, ut distantia primæ parallelæ a vertice ad distantiam secundæ assumptam in quavis ex iis rectis, quæ rationes omnes facile detegentur æquales.

103. Problemata exercendo Tyroni apta possunt esse hujusmodi: Datis in data recta binis punctis invenire tertium ita, ut ejus distantiæ a binis punctis datis sint in ratione data. Solvetur facile, erigendo ex primo puncto dato in quovis angulo rectam indefinitam, abscindendo in ea ab eodem puncto primam è rectis exprimentibus rationem datam, tum ab hujus extremo secundam, vel ad partes oppositas rectæ datæ, vel versus ipsam, ducendo ab extremo puncto hujus secundæ rectam ad secundum punctum datum, tum ab extremo primæ rectam huic parallelam. Hæc determinabit in recta data quæsitum punctum, quod facile in utroque casu demonstrabitur ope triangulorum similium, dividendo præterea vel componendo. Ac prima quidem solutio exhibebit semper unum punctum inter data duo puncta, & coincidit cum secunda parte Corol. 6, secunda extra eadem unum ad partes secundi puncti dati, vel nullum, vel unum ad partes primi, prout secunda recta data fuerit minor, æqualis, vel major respectu

pectu primæ. Ac plurimum proderit considerare excursum puncti inventi utriuslibet per rectam datam, & transitum ab una parte ad oppositam, pro varia mutatione magnitudinis vel directionis in secunda recta data.

104. Vel hoc aliud. A dato puncto rectam ducere, quæ ita secet latera dati anguli, ut binæ distantiæ puncti dati a binis laterum sectionibus sint in ratione data, vel ut bina latera dati anguli ab ejus vertice ad ejusmodi rectam sint in ratione data. Solvetur problema utrunque ducendo a puncto dato rectam parallelam primo lateri dato, donec occurrat secundo: tum pro solutione problematis primi capiendo ab anguli vertice in secundo latere segmentum, quod sit ad segmentum ipsius interceptum inter parallelam ductam, & verticem anguli in ratione secundæ quantitatis exprimentis rationem datam ad primam: pro secundo capiendo ab intersectione lateris secundi cum parallela ducta segmentum, quod ad ipsam parallelam sit in eadem ratione, ac ad ejus extremum ducendo rectam, quæ problema solvet, ut statim ac delineata fuerit figura, prodet similitudo triangulorum, & in utroque casu binæ solutiones habebuntur, segmento illo assumpto hinc inde ab anguli vertice, vel ab illo concursu, & lateribus anguli dati, si opus fuerit, productis etiam ultra verticem.

105. Potest etiam proponi hoc aliud. Datis binis punctis in binis rectis parallelis, & tertio extra utranque, ducere ab hoc rectam, quæ illas ita secet, ut segmenta intercepta inter ipsam, & illa puncta data sint in ratione data. Solvetur facile conjungendo bina illa puncta data, in recta jungente

te

te inveniendo punctum, cujus binæ distantiæ ab ipsis sint in ratione data (per num.99.) , & a puncto dato per hoc punctum ducendo rectam , quæ exhibebit , quod quæritur ; ac si punctum tertium non jaceat in directum cum reliquis binis , semper habebuntur binæ solutiones præter casum , in quo ratio data sit ratio æqualitatis , qui casus unicam solutionem admittet. Si autem tria puncta data in directum jaceant ; casus erit impossibilis , nisi ratio data fuerit eadem , ac ratio binarum distantiarum puncti tertii a prioribus binis , & tunc erunt infinitæ solutiones ; quævis enim recta ducta a puncto dato satisfaciet problemati .

106. Et hæc quidem exercendo Tyroni , & alia magis necessaria ad Geometriæ complementum proponi possunt , ut hoc . Super data recta construere parallelogrammum , cujus area æquetur areæ dati parallelogrammi . Solvetur facile , ducendo in dato parallelogrammo perpendiculum , quod erit ejus altitudo , tum inveniendo quartam proportionalem post rectam datam , basim parallelogrammi dati , & ejus altitudinem . Inventa enim quantitas erit altitudo parallelogrammi quæsiti ; ac proinde si in distantia æquali huic novæ altitudini ab illa recta data ducatur recta ipsi parallela , & in quovis angulo ab extremis punctis rectæ datæ ducantur usque ad eam binæ rectæ parallelæ ; solvetur problema , quod inde constat esse indeterminatum , & habere infinitas solutiones . Quod si præterea requiratur , ut novum parallelogrammum habeat angulum æqualem dato ; satis erit in eo angulo ducere illas duas rectas parallelas , & jam problema determinatum evadet .

107. Eo-

107. Eodem pacto triangulum construi poterit, quod habeat basim æqualem datæ rectæ, aream æqualem areæ dati trianguli, & angulum æqualem dato angulo, inveniendo nimirum novi trianguli altitudinem eodem prorsus modo, & ducendo rectam datæ parallelam in distantia æquali inventæ altitudini.

108. Quin immo facile fiet parallelogrammum æquale dato triangulo, vel triangulum æquale dato parallelogrammo cum iisdem conditionibus. Satis erit in primo casu dimidiare, in secundo duplicare inventam altitudinem, cum parallelogrammum esse debeat duplum trianguli habentis eandem basim, & altitudinem.

109. Inde data quavis figura rectilinea poterit cum iisdem conditionibus describi parallelogrammum habens aream ipsi æqualem. Si enim illa figura rectilinea resolvatur in totidem triangula, invenientur altitudines pro totidem parallelogrammis habentibus basim æqualem rectæ datæ, & aream æqualem singulis triangulis: tum si assumatur altitudo æqualis summæ omnium illarum altitudinum; parallelogrammum cum hac altitudine descriptum habebit aream æqualem areæ datæ figuræ, quod facile eruitur e num. 48.

110. Divisio circuli in gradus, quam apposuimus in schol. post prop. 12. obtineri non potest geometrice, cum nec arcus 30. gr. geometrice dividi possit in partes 3, nec arcus 5. graduum in 5. Et quidem, si pro 360 alii numeri adhibiti fuissent in divisione circuli in gradus, posset. Circulus enim potest dividi Geometrice in partes 2 ope diametri, in

in 6, adeoque & in 3 ope cor.4. prop.2., in 4 ope binarum diametrorum sibi invicem perpendicularium. Præterea potest in 5, sed ad id requiritur hoc Euclidis probl. Datam rectam ita secare, ut quadratum unius partis æquetur rectangulo sub reliqua parte & tota, quod quidem nos reservamus applicationi algebræ ad Geometriam, ut & alia quædam theoremata libri 2, quæ minus frequenter occurrunt. Rursus potest in 15, si enim e binis partibus quintis, dematur pars tertia, e sex partibus quintisdecimis dementur quinque; ac proinde relinquetur una. Demum hæ divisiones possunt continuari per bissectionem in infinitum. Atque inde patet, quæ polygona regularia circulo geometrice inscribi possint, & circumscribi.

111. Prop.13. corol.2, 3, 4. pertinent ad secundum Euclidis librum, & in numeris quoque possunt ostendi. Sit in cor.2. AC = 10, FB = 3, erit FC = 5, AB = 8, BC = 2. Habetur autem 2 × 8 + 3 × 3 = 5 × 5 cum sit utrumque = 25; ac eodem modo numeri in reliquis substitui possunt.

112. Ex prima parte Corol.5. deducitur, binas tangentes, quæ ex eodem puncto ad eundem circulum ducantur, esse æquales inter se; nam utriusque quadratum æquatur eidem rectangulo BE × BD.

113. Potest hic proponi solvendum hoc problema, quod summum habet usum, & ad quod in Geometria reducuntur omnia illa problemata, quæ in algebra sunt secundi gradus, ut videbimus in applicatione Algebræ ad Geometriam. Data summa, vel differentia binarum rectarum, & earum rectangulo, ipsas invenire. Describatur circulus, qui habeat

pro diametro datam summam, vel differentiam: ex extremo diametri puncto ducatur recta ipsi perpendicularis, cujus quadratum æquetur rectangulo dato, quod fiet inveniendo mediam proportionalem inter latera ipsius rectanguli dati. Ex extremo hujus puncto ducatur recta parallela diametro ubi datur summa, per centrum circuli ubi datur differentia, & hujus intersectiones cum peripheria circuli solvent problema. Nam bina intervalla ejus rectæ inter illud extremum, & singulas intersectiones, erunt binæ quæsitæ rectæ. Patet enim illud perpendiculum fore tangentem circuli, & proinde rectangulum sub iis binis rectis æquabitur ejus quadrato, sive rectangulo dato. In secundo autem casu patet, diametrum circuli fore differentiam rectarum inventarum, in primo vero ostendetur facile earum summam eidem æquari, ducendo aliud perpendiculum ab altero extremo, donec occurrat parallelæ illi productæ. Bina enim ejus segmenta intercepta arcu circuli, & binis perpendiculis æqualia esse facile perspicietur.

114. Porro in secundo casu patet, semper in circulo inveniri duo puncta; in primo verò invenientur duo, recta illa parallela secante circulum bis, vel unicum, ea ipsum tangente in vertice, vel nullum, ea cadente ultra circulum, prout illud quadrati latus fuerit minus, æquale, vel majus radio circuli, sive semisumma quantitatum quæsitarum. Quare in secundo casu semper habebuntur binæ quantitates quæsitæ; in primo eæ invenientur inæquales, æquales, vel impossibiles, prout quadratum semisummæ datæ fuerit minus, æquale, vel majus rectangulo dato.

115. Idem

115. Idem problema poteſt proponi ſic. Invenire binas rectas reciprocas datis, quarum detur ſumma, vel differentia. Si enim ſunt reciprocæ iis datis, earum rectangulum æquatur illarum rectangulo.

116. Poteſt & ſic. In data recta datis binis punctis invenire aliud ita, ut rectangulum ſub diſtantiis hujus a punctis datis æquetur dato rectangulo. Si enim id punctum inveniatur inter data puncta, diſtantiarum ſumma erit æqualis intervallo punctorum; ſi extra, differentia. Porro patet ſemper debere inveniri bina ejuſmodi puncta extra, ſingula ad partes ſingulorum, & intra ipſa vel bina hinc inde a medio, vel unicum, vel nullum. Sed ea elegantius invenientur ſic. Secetur bifariam recta interjacens punctis datis, erigaturque inde perpendiculum cujus quadratum æquetur rectangulo dato. Tum primum facto centro in illo puncto biſſecante, & intervallo diſtantiæ verticis perpendiculi ab altero e punctis datis, invenientur bina puncta extra. Deinde facto centro in vertice perpendiculi, intervallo dimidiæ diſtantiæ datorum punctorum invenientur bina puncta intra hinc inde a medio, vel unicum in medio, vel nullum, ut ſupra, & facile eſt demonſtrare hanc ſolutionem congruere cum præcedenti.

117. Exercendo Tyroni proponi poteſt hoc problema. A dato puncto rectam ducere quæ datum circulum ſecet ita, ut binæ ejus diſtantiæ ab interſectionibus ſint in ratione data. Si a dato puncto ducatur tangens circuli, vel recta perpendicularis diametro per datum punctum ductæ, prout ipſum fuerit extra, vel intra circulum; ea erit media propor-

tionalis inter binas distantias. Quare cum detur harum ratio, datur ratio etiam alterius ex his ad illam tangentem. Solvitur igitur hoc pacto. Inter binas rectas inveniatur media proportionalis. Fiat ut hæc ad alteram e rectis datis, ita tangens ducta ad quartam lineam. Facto centro in puncto dato, intervallo hujus novæ rectæ ducatur circulus, qui si datum circulum secuerit, vel contigerit, recta ad sectionem vel contactum ducta solvet problema: sed ubi punctum datur extra circulum, nisi novus circulus secuerit, vel contigerit circulum datum citra tangentem, vel ultra prout in proportione assumpta fuerit minor e datis rectis, vel major; problema erit impossibile.

118. In scholio hujus prop. notandum, rationem circuli ad circumferentiam multo ultra protractam esse nuper ab Eulero ope seriei cujusdam maximè convergentis, usque ad notas arithmeticas 137 in *Introductione in Analysim infinitorum*.

119. Ad prop. 14 notetur figuras similes dici eas, quarum anguli omnes æquales sunt, ac latera circa angulos æquales proportionalia. Est earum insignis proprietas hæc: si in binis figuris similibus e binis punctis perimetri correspondentibus ducantur in iisdem angulis ad latera homologa rectæ proportionales ipsis lateribus, tum ab harum extremis rectæ quævis in iisdem angulis cum iis ipsis; eæ terminabuntur ad puncta pariter correspondentia laterum homologorum, & erunt, ut ipsa latera homologa, quod facile demonstratur ope similitudinis triangulorum.

120. Hinc si e dato puncto ad perimetrum figu-

ræ

ræ cujusvis ducatur recta, & in ea producta utrinque assumatur utralibet ex parte puncti ipsius segmentum, quod ad eam sit in data ratione quavis, excurrente ipsa recta per perimetrum figuræ, extremum segmenti punctum describet figuram similem. Demum notetur illud. In parallelogrammo diviso in 4. parallelogramma juxta num. 32. ea bina quæ circa diametrum sunt, sunt & inter se similia, & toti, ac e converso: Si bina parallelogramma similia angulum habeant communem, vel ad verticem oppositum, ac laterum homologorum directiones congruant, vertices oppositi jacebunt in eadem recta cum qua diametrorum directiones congruent. Id autem pariter e similitudine triangulorum facile deducitur.

§. II.

De iis, quæ pertinent ad Arithmeticam.

121. Communium notarum proprietas, quibus in Arithmetica decadica utimur, in qua nimirum regredimur ad caput numerationis post decades, decadum decades, seu centurias, centuriarum decades, seu millia &c. est, quòd quævis nota seorsim legi possit, enunciando speciem, quam exprimit, ultima unitates, penultima decades, præcedens illam centurias, tum alia præcedens millia, deinde millium decades, millium centurias, miliones, & ita porro, vel conjungendo quotcunque notas libeat, & omnia denominando a specie notæ postremæ, idque tam in integris, quam in fractis decimalibus. Numerus 34756 legi potest sic: Tercentum quadraginta septem centuriæ, quinque decades, sex unita-

tates. Numerus 347. 56. sic: Triginta quatuor unitates, septuaginta quinque partes decimæ, sex centesimæ, & ita porro.

122. Ejus rei ratio patet ex eo, quod semper nota existens in sede præcedenti significat decuplum ejus, quod significat in sequenti; adeoque si binis sedibus præcedat exprimit ejus centuplum, si ternis milluplum, & ita porro.

123. Additionis, & subtractionis demonstratio satis patet ex iis, quæ innuimus post regulas. Notandum autem, ex ipsa multiplicationis notione idem esse, numerum totum simul multiplicare per alium numerum, ac ejus partes ita multiplicare alias post alias, ut monuimus in hac appendice num.49.

124. Pro multiplicatione numerorum inter 5, & 10 proposuimus num. 16. usitatam methodum per digitos. Quoniam adeo exiguus habetur casuum numerus, potest Tyro methodi demonstrationem sibi conficere per inductionem. Ope notarum algebraicarum res hoc pacto demonstraretur. Quoniam eriguntur tot digiti, quot unitatibus numerus propositus excedit quinarium; tot deprimentur, quot unitatibus idem deficit a denario. Deprimantur in altera manu digiti numero a, in altera b. Erit primus numerus $10 - a$, secundus $10 - b$. Multiplicentur per partes, & habebitur $10 \times 10 - 10a - 10b + ab$. Nam, ut in Algebra demonstrabitur, signa conformia, si multiplicentur, reddunt signum positivum, difformia negativum, prorsus ut si affirmes, aliquid existere, vel neges deesse, habebis positivam existentiam, si affirmes deesse, vel neges existere, habebis carentiam. Porro est $10 \times 10 -$

10 a

$10a - 10b = 10(10 - a - b)$, & $10 - a - b = 5 - a + 5 - b$, sive = summæ digitorum erectorum. Igitur si ea summa ducatur in 10, & addatur productum ab digitorum depressorum habebitur intentum.

125. Tabulæ Pithagoricæ usus per se evidenter patet ex constructione. Numero autem 18. proponitur insignis proprietas numerorum, quæ demonstrari potest incipiendo a casibus simplicioribus, & pergendo ad magis compositos. Sint bini numeri a, b, ut 6, & 8, multiplicandi per se invicem. Concipe cohortem militum, in qua sint ordines numero a, sive 6, quorum singuli contineant numerum militum b, sive 8. Accipiendo numerum 8 vicibus 6 habetur numerus militum. Ibidem autem erunt 6 primi, quivis in suo ordine, 6 secundi, & ita porro usque ad 6 octavos. Quare etiam sumendo numerum 6 vicibus 8 habetur idem militum numerus. Igitur in binis numeris a, b productum ab, & ba est idem.

126. Si numeri sint tres a, b, c; concipe legionem, in qua cohortes numero a, in quavis cohorte ordines b, in quovis ordine milites c. Erit bc numerus militum in cohorte, & $bc \times a$ numerus militum in legione. Si autem assumantur in quovis ordine soli primi; eorum numerus in cohorte erit idem, ac numerus ordinum b. Quare in universa legione erit ab, & cum cum sint totidem secundi, tertii &c., habebuntur tot hujusmodi numeri ab, quot milites sunt in quovis ordine, nimirum c; adeoque & $ab \times c$ exhibet eundem numerum. Demum si sumantur primi ordines tantum singularum cohortium, habebuntur milites ac, qui per

numerum ordinum multiplicati exhibebunt $ae \times b$ numerum pariter omnium militum.

127. Considerando exercitum compositum ex numero legionum d, res extendetur ad quatuor numeros: vires regni habentis exercitus e, ad quinque, & ita porro. Sed in pluribus numeris combinationes in infinitum excrescunt. Proderit autem Tyroni accipere 4, vel 5 numeros, & se in eorum multiplicatione exercere, ut videat eodem redire $a \times b \times c \times d \times e$, $ab \times c \times de$, $abd \times ce$, $ac \times bde$ &c.

128. Multiplicationis demonstrationem facile intelliget, qui exemplum aliquod consideret, & ea, quæ num.21. innuimus : ac iisdem principiis innititur methodus multiplicandi per tabellas Neperianas exposita num.23.

129. In divisione ubi ea conficitur sine scala, & tabellis Neperianis, operatio procedit ordine sequenti.

130. Sumantur in primis in dividendo tot notæ e prioribus, quot sufficiunt ad exprimendum numerum divisore non minorem. Eæ autem erunt totidem, quot in divisore continentur, vel una præterea. Nam numerus, qui unica nota alterum excedit semper illo major erit, ut 1000. est major quam 999.

131. Quæratur quoties hic numerus continet divisorem; id autem præstabitur, quærendo quoties primam notam divisioris continet prima partis assumptæ, vel primæ duæ, prout assumptæ fuerint totidem notæ, vel una præterea, sed ita, ut quod ibi relinquitur, conjunctum cum nota sequenti,

ti, & habitum pro decadibus sufficiat, ut toties saltem contineatur in eo secunda divisoris nota; si enim non suffecerit minuendus est unitate numerus vicium inventus, donec sufficiat. Is numerus vicium scribitur primo loco in quoto.

132. In exemplo exposito in quo 10105 dividitur per 43, cum priores binæ dividendi notæ 10 exhibeant numerum minorem quam 43, assumendæ tres 101.. Quærendum porro, quoties 4 contineatur in 10. Invenitur 2, & relinquitur 2, cui si addatur assumpti numeri sequens nota 1, fit 21, quod sufficit, ut sequens divisoris nota 3 bis contineatur. Quare in quoto scribitur 2. At si quæreretur, quoties 37 contineatur in 132, quærendo quoties 3 contineatur in 13, inveniretur 4; sed quia superest tantum 1, qui numerus conjunctus cum sequenti 2 exhibet 12, in quo numerus 7 quater contineri non potest; efficiendum ut 3 contineatur in 13 solum vicibus 3, ut relictis 4 possit 7 in 42 contineri pariter vicibus 3; adeoque prima nota quoti esset 3.

133. Per numerum inventum multiplicetur divisor, & productum scribatur sub illa parte divisoris assumpta, subtrahaturque inde, ac post residuum addatur sequens dividendi nota, & iteretur eadem operatio, quærendo eodem modo, quoties divisor contineatur in hoc residuo aucto, scribendo hanc novam notam, post notam quoti jam inventam, multiplicando, ac subtrahendo, ut prius, & ita porro.

134. Demonstratio methodi hinc petitur. Quoniam idem est dividere numerum per numerum, ac videre, si tot res quælibet, quot exprimit dividen-

 dus,

dus, distribui debeant in tot capita, quot exprimit divisor, quot ex iis dari singulis possint: quæritur primum, quæ sit altissima species numerorum a dividendo expressorum, e qua aliquid dari possit: ut in exemplo allato si e dividendo 10105 solum 10 millia assumuntur, ex his nullum singulis illis 43 dari potest; at si assumantur 101 centuriæ, quæ iis pauciores non sunt, poterunt singulis dari tot ex ipsis centuriis, quoties 43 contenetur in 101. Quare ille numerus inventus vicium debet esse prima quoti nota, & in eo exprimere debet illam eandem speciem, quam exprimit postrema nota partis assumptæ dividendi, ut hìc centurias. Porro eas exprimet, cum tot aliæ post eam scribi debeant, quot notæ in dividendo supersunt pro calculo toties restituendo, ut hìc aliæ duæ.

135. Multiplicando autem divisorem per notam quoti inventam determinatur, quid ex ea specie impendatur in ea distributione, ut hìc multiplicando 43 per 2 invenitur 86 centurias impendi. Subtractione invenitur, quid inde supersit, ut hic supersunt 15. Hæ centuriæ sunt, ac conjunctæ cum decadibus 0, efficiunt decades 150, ac quæritur eodem pacto, quot singulis decades dari possint; atque ita semper a speciebus altioribus gradatim ad inferiores descenditur.

136. Porro ubi quæritur, quoties divisor contineatur in parte quoti assumpta, non sufficit videre, quoties prima ejus nota contineatur in prima vel prioribus binis hujus; sed relinqui debet id, quod cum sequenti sufficiat secundæ; cum distribui non debeat numerus dividendus in tot capita, quot expri-

pri-

primit sola nota prima divisoris, sed in omnia a reliquis etiam ejus notis expressa. Atque iccirco si divisor contineat plures notas, videndum esset primo an quod superest primæ notæ divisoris conjunctum cum sequenti nota dividendi sufficiat pro secunda nota divisoris, tum an quod ipsi superest, conjunctum cum alia sequenti nota dividendi sufficiat pro tertia divisoris, & ita porro usque ad postremam. Sed ejusmodi inquisitio admodum molesta esset, & plerumque, ubi superest pro secunda, superesse solet etiam pro inferioribus, cum notæ in tertia sede centies minus, in quarta millies minus exprimant, quàm in prima. Hinc satis erit semper videre solum, an supersit pro secunda, & si forte residuum deinde non suffecerit pro reliquis, id calculus ipse indicabit. Nam multiplicato divisore per notam quoti inventam, proveniet numerus major eo, a quo subtrahi deberet, quo casu nota inventa minuenda esset unitate, productum illud delendum, & scribendum aliud productum divisoris multiplicati per notam quoti correctam: ac satius erit raro admodum restituere calculum, quam semper illam adeo molestam investigationem instituere.

137. Ubi, divisione peracta, aliquid remanet, præscribitur num.29, ut addatur fractio, cujus numerator sit postremum illud residuum, denominator sit ipse divisor. Ejus demonstratio hinc oritur, quod cum ex illo residuo singulis integræ unitates dari non possint, concipitur quævis unitas divisa in tot particulas, quot sunt ii, in quos divisio facienda, & quos divisor exprimit, & cum singuli singulas singularum unitatum particulas accipere debeant, singuli

guli accipient tot particulas, quot erant unitates residuæ, quarum magnitudinem determinabit denominator divisori æqualis. In casu ibi exposito singuli accipient particulas 182, qualium singulæ unitates continent 835.

138. Atque ex his quidem, & ex iis, quæ in Arithmetica diximus, habet Tyro, unde vim omnem divisionis percipiat, institutæ etiam sine lamellarum, aut scalæ præsidio, in qua Tyronem Præceptor debet exercere, ut minus difficilis illi deinde evadat radicum extractio.

139. In fractionibus, de quibus agitur a n.33, binæ præcipuæ proprietates notandæ sunt. Primo si numerator denominatorem excedit, fractio spuria est, & integras unitates continet, quarum numerus habetur dividendo numeratorem per denominatorem. Nam ubi numerator denominatori æquatur, fractio unitatem complet, quod ex ipsa fractionis notione constat. Cum enim pars quinta sit ea, quarum quinque in unitate continentur; patet quinque quintas partes unitatem complere. Hinc tot unitates habentur, quot vicibus e numeratore denominator potest detrahi, sive quot vicibus hic in illo continetur.

140. Secundò si in quavis fractione numerator, & denominator dividantur per eundem numerum quemcumque, valor illius manet idem, cum æque crescat numerus particularum, ac earum magnitudo minuatur in multiplicatione, ac prorsus oppositum in divisione contingat. Sit fractio $\frac{3}{4}$, & utroque numero ducto in 5 fiet $\frac{15}{20}$, cujus idem est valor. Si

enim

enim unitas divisa erat in partes 4, quarum 3 accipiebantur, subdivisis singulis in alias 5, jam unitas continebit partes $4 \times 5 = 20$, & illæ tres assumptæ continebunt $3 \times 5 = 15$, ac idem patet de quovis alio numero.

141. Ex prima proprietate constat ratio ejus, quod præscribitur num. 34., & 35, pro colligendis integris unitatibus, ubi numerator denominatorem excedit.

142. Ex secunda proprietate constat id, quod num. 37. præscribitur pro reductione fractionum ad eundem denominatorem. Notandum autem in fine ejus numeri, plures fractiones simul etiam redigi ad eundem denominatorem multiplicando numeratorem, & denominatorem cujuslibet per omnes reliquorum denominatores. Fractiones $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{5}{8}$ reduci possunt ad eundem denominatorem sic $\frac{2 \times 5 \times 7 \times 8}{3 \times 5 \times 7 \times 8}$, $\frac{4 \times 3 \times 7 \times 8}{5 \times 3 \times 7 \times 8}$, $\frac{3 \times 3 \times 5 \times 7}{7 \times 3 \times 5 \times 8}$, $\frac{5 \times 3 \times 5 \times 7}{8 \times 3 \times 5 \times 7}$

143. Reductio illa facilior, de qua num. 38, fieri potest in binis casibus. Primus est, cum in fractione aliqua numerator, ac denominator communem aliquem divisorem habeant, per quem dividi possint, & ad simpliciores terminos reduci, ut reducitur $\frac{6}{18}$ ad $\frac{1}{3}$ dividendo per 6 tam numeratorem, quam denominatorem juxta num. 140. Secundus est cum bini, vel plures denominatores aliquem divisorem communem habent, tunc enim is in communi

ni illo novo denominatore frustra repeteretur, & ubi is adest, multiplicatio per ipsum omittenda, ubi deest, semel tantum adhiberi debet in multiplicatione conjunctus cum divisoribus reliquis non communibus. Sint $\frac{5}{6}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{7}$, sive $\frac{5}{2 \times 3}$, $\frac{7}{3 \times 5}$, $\frac{4}{7}$.
Reducentur ad eundē denominatorem sic $\frac{5 \times 5 \times 7}{2 \times 3 \times 5 \times 7}$
$\frac{7 \times 2 \times 7}{3 \times 5 \times 2 \times 7}$, $\frac{4 \times 2 \times 3 \times 5}{7 \times 2 \times 3 \times 5}$, adhibendo communem divisorem 3 denominatoris primi, & secundi solum in tertia fractione.

144. Hinc patet pro reductione fractionum necessariam esse methodum inveniendi maximum communem divisorem binorum numerorum. Ea autem est hujusmodi. Dividatur major per minorem, & notetur residuum: tum divisor per hoc residuum, & notetur residuum novum, atque ita porro, donec deveniatur ad aliquam divisionem, quæ accuratè fiat sine ullo residuo. Ultimus divisor ille, per quem divisio accurata successit est maximus communis divisor.

145. Sint numeri 1896, 120, quorum quæratur maximus communis divisor. Diviso 1896 per 120, quotus est 15, residuum 96. Diviso 120 per 96, quotus est 1 residuum 24. Diviso 96 per 24, quotus est 4 sine residuo. Igitur 24 est communis maximus divisor. Et quidem diviso 1896 per 24, habetur 19, ac diviso 120 per 24 habetur 5.

146. Demonstratio innititur hisce theorematis satis per se notis. Quod mensurat aliquem numerum (sumendo mensuram pro parte aliquota) mensu-

surat, & quodvis ejus multiplum, nimirum ipsum quotcunque vicibus repetitum, & quod mensurat binos numeros, mensurat & eorum summam ac differentiam.

147. Porro si quis numerus mensurat 1896, & 120, mensurabit & 120 ductum in primum quotum 15, cumque id productum cum primo residuo 96 æquetur 1896, ille numerus mensurabit etiam id residuum sive differentiam. Eodem argumento cum mensuret 120, & 96, divisum, & divisorem novæ divisionis, mensurabit etiam novum residuum, & ita porro usque ad residuum penultimæ divisionis, quod cum metiatur se & postremum divisorem debet continere divisorem communem quemcumque propositorum numerorum. Totum autem ipsum esse divisorem communem constabit demonstratione retrograda. Cum enim mensuret se, mensurabit etiam divisum postremæ divisionis nimirum se multiplicatum per postremum quotum. Porro ipse erat residuum penultimæ divisionis, & postremus divisus erat ejusdem divisor: metiebatur autem ille eum divisorem, adeoque & ipsum ductum in penultimum quotum; cumque id productum cum residuo adæquet divisum ejusdem penultimæ divisionis, mensurabit etiam hunc divisum; ac eodem argumento, cum mensuret divisorem & divisum cujusvis divisionis posterioris, mensurabit etiam divisum & divisorem cujusvis præcedentis usque ad primam, nimirum binos numeros datos.

148. At si omnes divisores dati numeri invenire libeat, inventis divisoribus primis, de quibus §.7, illud notandum, fore divisores ejusdem numeri omnia

nia producta ex binis, ex ternis, ex quaternis, ex quotcunque simul sumptis, ac productum omnium simul fore ipsum numerum. Si enim sint quotcunque numeri primi, quocunque ordine multiplicentur inter se, utcunque sumantur bini, terni, quaterni &c. ac per reliquos multiplicentur, semper productum idem efficient ut notavimus hic num. 125, 126, 127. Quare ad inventionem omnium divisorum satis est invenire omnes primorum combinationes.

149. Erit aptius, quam in eo §. exemplum numeri 210, cujus divisores omnes invenientur hoc pacto. Dividendo 210 per 2 habetur 105, qui per 2 dividi non potest, dividitur autem per 3, & habetur 35, qui nec per 3 dividi potest, potest autem per 5, & habetur 7, qui dividi solum potest per se, ac habetur 1.

210	2	6	30
105	3	10	42
35	5	14	70
7	7	15	105
1		21	
		35	

Prima columna exhibet quotos, secunda divisores primos 2, 3, 5, 7. Combinando 2 cum 3, cum 5, cum 7, tum 3, cum 5, cum 7, demum 5 cum 7 habentur in tertia columna omnium binariorum combinationes. Combinando singula binaria cum posterioribus, qui ea binaria non ingrediuntur, aliis post alios, habentur omnia ternaria in columna quarta, tum combinando pariter ternaria singula cum reliquis posterioribus haberentur omnia quaternaria, & ita porro; sed hic quaternarium est unicum exhibens ipsum numerum propositum. Ac si iis columnis addatur ipse numerus 210 & 1, habentur omnes communes divisores sexdecim.

150. Fra-

150. Fractionum multiplicatio exposita §. 9 demonstratur ex ipsa definitione multiplicationis. Habeat primum utraque fractio numeratorem 1; ut si sit $\frac{1}{7}$ multiplicandum per $\frac{1}{5}$. Quoniam multiplicare per fractionem est accipere illam ejus partem, quam ea exprimit, sumenda erit partis septimæ pars quinta; & habebitur particula, quarum 5 continebit quævis è prioribus septem unitatis partibus, adeoque unitas tota continebit 7×5, nimirum habebitur pars $\frac{1}{7 \times 5} = \frac{1}{35}$.

151. Quod si non unius septimæ, sed plurium, ut quatuor septimarum partium sumenda sit pars quinta, patet sumendam fore in singulis unam ex iis particulis, adeoque $\frac{4}{7} \times \frac{1}{5}$ fore $\frac{4}{7 \times 5}$.

152. Demum si non una quinta ejus fractionis pars assumenda sit, sed plures, patet totidem vicibus plures particulas assumi, quot plures partes assumendæ sunt. Adeoque $\frac{4}{7} \times \frac{3}{5}$ fore $\frac{4 \times 3}{7 \times 3}$. Nimirum oportere & numeratores inter se multiplicare, & denominatores inter se.

153. Divisio earumdem demonstratur ex eo, quòd multiplicatio & divisio debeant se invicem destruere ita, ut quotus per divisorem multiplicatus debeat reddere divisum, ut constat ex ipsa multiplicationis, & divisionis notione. Porro sit $\frac{a}{b}$ dividendum per $\frac{c}{d}$ invertendo divisorem prodibit $\frac{ad}{bc}$; quia hunc

hunc quotum multiplicando per divisorem $\frac{c}{d}$ habebitur $\frac{adc}{bcd}$, sive ob *dc* communem divisori, & diviso habebitur (per num. 140) $\frac{a}{b}$, nimirum divisus ille.

162. Si quivis numerus integer consideretur, ut fractio quædam, quæ pro denominatore habeat unitatem; facile ex dictis eruentur hæc theoremata. Fractio multiplicatur per numerum integrum multiplicando per eum ejus numeratorem; Integer multiplicatur per fractionem multiplicando ipsum per ejus numeratorem, & relinquendo in utroque casu denominatorem pristinum. Fractio dividitur per integrum multiplicando per ipsum ejus denominatorem: Integer dividitur per fractionem multiplicando ipsum per ejus denominatorem, & ponendo pro denominatore numeratorem ipsius fractionis.

163. Notandum demum in quavis multiplicatione esse unitatem ad alterum factorem, ut alter ad productum, cum hoc ductum in unitatem maneat idem, nimirum sit æquale producto factorum: In quavis autem divisione esse divisorem ad divisum, ut est unitas ad quotum, cum quotus ductus in divisorem reddat divisum, adeoque divisum ipsum per unitatem multiplicatum; ac proinde in utroque casu habeantur æqualia producta mediorum, & extremorum.

164. Quæ §. 9 dicuntur de additione, & subtractione decimalium, patent ex iisdem principiis, ex quibus eadem deducuntur in integris. Quod pertinet

net ad eorum multiplicationem, facile demonstrabitur, si apponatur denominator, & notetur illud, quod diximus hic num. 121. Si enim sublato puncto scribatur sub eodem numero pro denominatore unitas cum tot cyphris, quot notæ decimalium habentur post punctum, habebitur fractio idem prorsus exprimens, quod ope puncti exprimitur, integris etiam, si qui sunt, simul ad eum denominatorem reductis. Multiplicatis iis fractionibus bini denominatores multiplicandi erunt, in quibus habebitur unitas cum tot cyphris, quot habebantur in utroque denominatore. Quare si, sublato ipso denominatore, productum ope puncti scribendum est, post punctum totidem in eo notæ haberi debent, quot in utroque factore simul habebatur.

165. Cum autem quotus per divisorem multiplicatus debeat divisum reddere, tot in illis decimales notæ haberi debent, quot habentur in ipso diviso.

166. Porro ubi numerus notarum deest ad implendas hasce regulas, debet suppleri ope cyphrarum præmissarum, quæ in fractionibus decimalibus valorem non mutant post ipsas notas, mutant autem ante ipsas, ut e contrario in integris præmittendo eas cyphras non mutatur valor, mutatur vero plurimum ponendo eas post ipsas notas. Distantia enim a puncto dirimente integros numeros a fractionibus determinat valoris speciem.

167. Extractionem radicis expositam §. 10., demonstrabimus in algebra. Pariter quæ de numeris surdis dicuntur §. 11. multo commodius & extendentur, & demonstrabuntur ibidem.

168. Ad

168. Ad caput 2 Arithmeticæ illud unum notabimus ad num.9: multo melius, quam in prop. 10. Geometriæ, demonstrari hìc ex principiis idcirco præmissis in proportione geometrica productam extremorum æquari producto mediorum, & viceversa, ac eadem mothodo, quæ in proportione arithmetica adhibita est pro summa. Demonstratio autem hìc omissa est hujusmodi.

169. Sit *a* . *b* : : *c* . *d*, ducendo priores terminos in *c*, posteriores in *a* manebunt eædem rationes (per num.6. cap.2 Arith.) eritque *ac* . *bc* : : *ac* . *ad*. Quare (per num.7.) *bc* = *ad*. Rursus si fuerit *bc* = *ad* erit (per num.7.) *ac* . *bc* : : *ac* . *ad*. Quare (per num.6.) *a* . *b* : : *c* . *d*. Q. E. D.

EXPLICIT TOMI I. PARS I.

ERRATA CORRIGE

Pag.	Lin.	Errata	Corrige
20.	12.	Lateribus	Lateribus & angulis
21.	8.	æquantur	æquantur ita
33.	20.	duo	duæ
38.	24.	eidem perpendicularis	eidem in eodem puncto perpendicularis
58.	28.	ex tota in	ex tota & adjecta simul sumptis in adjectam
66.	18.	34	35
	19.	35	36
261.	19.	nimirum differentiæ	nimirum compensatio differentiæ
287.	5.	(per num.41)	(per num.42)

Levioris momenti errata facilè per se quisque corriget.

ELEMENTORUM UNIVERSÆ MATHESEOS

AUCTORE

P. ROGERIO JOSEPHO BOSCOVICH

SOCIETATIS JESU

PUBLICO MATHESEOS PROFESSORE

TOMUS II.

CONTINENS

ALGEBRAM FINITAM.



ROMÆ MDCCLIV.

PROSTANT APUD FAUSTUM AMIDEI BIBLIOPOLAM IN VIA CURSUS.

ET IN TYPOGRAPHIA GENEROSI SALOMONI; PRÆSIDUM FACULTATE.

NOVA AUCTORIS PRÆFATIO.



Ujus etiam libri, magna itidem ex parte distracti; non vero recusi, mutatur titulus, ut in primi tomi nova præfatione monui. In ea, quam superiore anno huic ipsi libro præfixeram, & quæ adhuc retinetur, applicationem Algebræ ad Geometriam daturum promiseram secundo tomo. Tum enim exigebantur Elementa admodum compendiosa, quæ binis tomis includerent. Mathesim puram, quorum secundus in prima parte contineret Sectiones Conicas, & quidquid ad Geometriam infinitorum, & infinitesimorum, ac ad sublimiores curvas pertinet, in secunda vero parte applicationem Algebræ ad Geometriam, & totam Infinitorum Analysim compendiaria methodo pertractata. Nunc ubi ea omnia, quæ post primam Præceptoris institutionem per se ipse possit Tyro addiscere, uberius explicata requiruntur, excrescit tomorum numerus, licet rerum ordo servetur idem.

At ut iis etiam consulatur, qui minus otii habent, ad ampliora volumina percurrenda, illud curabo, ut veritates quasdam præcipuas inter se solas connectam, quæ proinde, omissis, vel in aliud tempus reservatis reliquis, cognosci possint. Id quidem præstiti in Sectionibus Conicis, & in præfatione tertii tomi proposui numeros illos paragraphorum, qui, reliquis omissis, legi possunt. Hic etiam in hisce Algebræ Elementis sublimiora quædam, vel minus necessaria ommittere poterit, qui festinare debeat, aut velit. Paragraphorum, qui legi debent, numeros hic subiiciam, & ubi binis numeris pun-

puncta interserantur, intermedii pariter omnes percurrendi sunt.

1...71, 84...87, 95, 101...107, 110...127, 143...174, 186...202, 204...209, 220, 221, 235...254, 257, 258, 263...275, 281...284, 287...290, 306, 330...332, 335, 336, 342...345, 361...368, 371, 383...388, 391...397, 413, 315.

In his numeris vix unquam habebitur eorum mentio, qui omittuntur, quæ si alicubi occurrit, ad ea, quæ ibi tradentur, non erit prorsus necessarium id, quod eo numero continebitur, ac ad uberiorem cognitionem facile supplebit voce Præceptor, quæ desint. Porro in his, quæ hic proposui, habentur præcipuæ algorithmi regulæ, elevatio binomii ad potentias, & ejus ope extractio radicis cujusvis, proprietates præcipue æquationum, resolutio æquationum primi, secundi, tertii, & quarti gradus, pro quibus solis habentur in Algebra generales regulæ. Si quærantur approximationes pro altiorum graduum æquationibus, percurratur §. quintusdecimus. Proderit autem, & sextumdecimum, omnium postremum percurrere.

PRÆ-

PRÆFATIO.



LGEBRÆ Finitæ elementa hìc tradimus ſine applicatione ad Geometriam. Applicationem ejuſmodi, ac infinitorum, & infiniteſimorum analyſim reſervamus tomo ſecundo. Tradimus autem primo quidem totius calculi fundamenta a primis ipſis, ac ſimpliciſſimis exorſi, nimirum ſignorum, notarumque uſum, additionem, ſubtractionem, multiplicationem, ac diviſionem, ubi ea, quæ ad potentias, ac radices pertinent, ac prima ſerierum rudimenta quædam perſecuti ſumus, ut & nonnulla de imaginariorum valorum natura ac uſu immiſcuimus nec inutilia ſane, nec injucunda. Tum æquationes aggreſſi earum natutam ac proprietates, & transformationes varias diligenter perſecuti, primum quidem reſolutionem æqua-

tionum primi, ac ſecundi gradus expoſuimus, tum in æquationibus gradus tertii, & quarti multo fuſius immorati profundioris inveſtigationis ſpecimen quoddam, & varia pluribus methodis inſtituta tentamina proponenda cenſuimus, quibus Tyro jam aliquanto exercitatior ad profundiorem analyſim viam ſibi muniret: quibus abſolutis quod ad altiorum graduum æquationes reſolvendas pertinet per radicum limites, & approximationem non ita fuſe expoſuimus, adhuc tamen nec omninò curſim perſtriximus.

Et his quidem ipſa calculi elementa continentur. At ejuſdem uſum in determinandis theorematis, & ſolvendis problematis, ſub finem multo diligentius perſecuti ſumus, exemplis pluribus illuſtrando methodos, ex quibus uberem ſane ſperamus Tyronis fructum. Illud unum monendum ducimus, licet omnem in eo operam collocaverimus, ut ſingula quàm maximè liceret, dilucidè exponeremus,

adhuc

adhuc tamen vivam Præceptoris vocem non utilissimam tantum, sed etiam fere necessariam plerumque fore, cum rarò admodum ejus indolis mentes producat natura, quæ in hæc velut adyta, & penetralia quædam irrumpant sine ductore.



IMPRIMATUR,

Si videbitur Reverendissimo Patri Magistro Sacri Palatii Apostolici.

F.M. de Rubeis Patriarcha Constantinopolitanus Vicesg.

IMPRIMATUR.

Fr. Joseph Augustinus Orsi Ordinis Prædicatorum, Sacri Palatii Apostolici Magister.

ELE-

ELEMENTA ALGEBRÆ.

§. I.

De notatione.

1. ALGEBRA signis quibusdam utitur, & quantitates litteris exprimit.

2. Signum + significat additionem, & dicitur positivum, — subtractionem, & dicitur *negativum*, = æqualitatem. Ubi vero nullum habetur signum, intelligitur positivum, quod in quantitatibus solitariis, vel initio plurium terminorum plerumque omittitur. Ex. gr. $2 + 3 = 5$ legitur *duo plus tria æquantur quinque*: $5 - 2 = 3$ legitur *quinque minus duo æquantur tribus*.

3. Signum multiplicationis est $\times$, divisionis lineola interposita diviso scripto supra ipsam, & divisori scripto infra. $3 \times 4 = 12$, $\frac{12}{4} = 3$. Divisio etiam scribitur interpositis binis punctis, ponendo $12 : 4$ pro $\frac{12}{4}$, & multiplicatio aliquando, sed raro admodum, interposito puncto, scribendo $3 . 4$ pro 3×4. Sed cavendum ab æquivocationibus, cum eodem modo scribantur fractiones decimales post punctum.

4. Signum $<$ significat, quantitatem præcedentem esse minorem sequenti, contra signum $>$, esse majorem. $6 < 8$, $8 > 6$.

5. Signum ∞ significat infinitum.

6. Signum radicis est $\sqrt{}$, quæ radix si fuerit quadrata, fere nihil addi solet, si cubica, quarta, quinta &c., ponitur numerus exponens radicem, ut $\sqrt[3]{}$, $\sqrt[4]{}$, $\sqrt[5]{}$ &c. $\sqrt{9}=3$, $\sqrt[3]{8}=2$, $\sqrt[4]{81}=3$. Radix prima alicujus quantitatis dici potest ipsa quantitas: $\sqrt[1]{3}=3$.

7. Quando plures quantitates in unam summam colligendæ sunt ita, ut signum præfixum afficiat simul omnes, adhibetur lineola supra omnes extensa, vel parenthesis. $\overline{1+3}\times\overline{9-4}$, vel $(1+3)\times(9-4)=4\times5=20$. $\sqrt{\overline{12+4+9}}$, vel $\sqrt{(12+4+9)}=\sqrt{25}=5$.

8. Quando primus terminus ita continet secundum, ut tertius quartum, quæ dicitur proportio geometrica, scribitur punctis hac forma interpositis illis quantitatibus . : : ., vel : = : Esse 8 ad 4, ut 6 ad 3, scribitur 8 . 4 : : 6 . 3, vel $8:4=6:3$. Secunda autem scribendi ratio fundatur in eo, quod si primus terminus continet secundum, ut tertius quartum, primus divisus per secundum debet æquari tertio diviso per quartum:

9. Quævis quantitatum genera litteris exprimuntur, & quidem, quæ cognitæ sunt, solent exprimi prioribus a, b, c &c., incognitæ postremis x, y, z &c., numeri indeterminati, potissimum in potentiis, & radicibus exprimi solent intermediis m, n, r. Aliqui pro incognitis, ut passim Angli, vocales adhibent, pro cognitis consonantes. Liberum est uti, quibus libet.

10. In

10. In multiplicatione facta per literas omitti solet signum $\times$, & sola conjunctio litterarum sine signo multiplicationem significat. Sit $a = 2$, $b = 10$, $c = 4$, erit $ab = 2 \times 10 = 20$, $abc = 2 \times 10 \times 4 = 80$.

11. Si eadem quantitas aliquoties addatur sibi, sive per aliquem numerum multiplicetur, quod idem est; præfigitur numerus, qui exprimat, quoties sumitur. $a + a + a + a = 4a$, & si $a = 3$, erit $4a = 4 \times 3 = 12$.

12. Si eadem quantitas a se ipsa subtrahatur, eliditur, & remanet cyphra o, ut $b - b = 0$, $a + b + c - b = a + c$.

13. Si eadem quantitas per se ipsam multiplicetur, apponitur post ipsam paulo supra numerus, qui exprimat, quoties scribenda esset: $aa = a^2$, $aaa = a^3$, $aaaa = a^4$. Cavendum, ne confundatur a^2 cum $2a$. Si $a = 5$, erit $a^2 = 25$, $2a = 10$. Si $b = 2$, erit $(a+b)^2 = \overline{a+b}^2 = 7 \times 7 = 49$.

14. Hinc ille numerus suprapositus est index, seu exponens potentiæ, potestatis, seu dignitatis quantitatis ipsius, & exprimit, quot vicibus unitas per illam quantitatem multiplicetur. Unitas autem exponens primæ potentiæ signari non solet, ut etiam in multiplicatione, & divisione unitas omittitur. $1 \times a = a^1 = a$, $1 \times a \times a = a^2$, $1 \times a \times a \times a = a^3$ &c.

15. Hinc vero quævis quantitas si in exponente habeat o, exprimit unitatem, cum exprimat eam nun-

nunquam multiplicatam per illam quantitatem. Si sit $a = 5$, $b = 10$, adhuc erit $a^0 = 1$, $b^0 = 1$.

16. Hinc rursus si aliqua quantitas dividenda sit per se ipsam, apponitur pro exponente cyphra o, vel scribitur unitas, vel si multiplicabatur per alias quantitates, omittitur. $\frac{a}{a} = a^0 = 1$; $\frac{abc}{b} = ab^0c = ac$; $\frac{abc}{bd} = \frac{ac}{d}$; $\frac{ab}{abc} = \frac{1}{c}$.

17. Si unitas dividenda sit per aliquam quantitatem, vel per aliquam ejus potentiam, apponitur exponens potentiæ cum signo negativo, nec lineola divisoria adhibetur: $\frac{1}{a} = a^{-1}$, $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$. Contra $\frac{1}{a^{-3}} = a^3$, cum nimirum significet unitatem divisam per fractionem $\frac{1}{a^3}$. Sit $a = 10$, $b = 2$, erit $a^3 b^{-2} = \frac{1000}{4} = 250$.

18. In exponentibus adhibentur etiam fractiones, & numerator fractionis significat potentiam quantitatis, ex qua radix extrahitur, denominator exponentem radicis. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$; $a^{\frac{3}{2}} = \sqrt{a^3}$; $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; $a^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{a}}$; $a^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^4}}$; $(a+b)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(a+b)}$.

19. Assue-

19. Assuescat Tyro quantitatibus maximè compositis numeros substituere, incipiendo a simplicioribus. Sit $a = 3$, $b = 2$, $c = 5$, $d = 10$, erit

$$\frac{a^2bc + bc^3}{bd + a^2} = \frac{9\times2\times5 + 2\times125}{2\times10 + 9} = \frac{90 + 250}{20 + 9} =$$

$\frac{340}{29}$. Sed $\frac{a^2bc}{bd} + \frac{bc^3}{a^2} = \frac{90}{20} + \frac{250}{9} = 4.\frac{1}{2} + 27.\frac{7}{9}$

$= 32.\frac{5}{18}$; $\left(\frac{ad^2b^{-2} + b^4c}{bc^{-1} + a^{-1}d}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\left(\frac{\frac{300}{4} + 80}{\frac{2}{5} + \frac{10}{3}}\right)}$

$= \sqrt{\left(\frac{620}{4} : \frac{56}{15}\right)} = \sqrt{\frac{9300}{224}} = \sqrt{41.51.}$ &c. $=$
6.44. &c.

§. II.

De primis operationibus calculi litteralis in quantitatibus unico termino constantibus.

20. Quomodo fiat additio, subtractio, multiplicatio, divisio quantitatum simplicium, patet ex §. præcedenti. Hic addendum, quod pertinet ad signa.

21. In additione retinentur signa quantitatis utriusque, quæ additur, & cui additur. In subtractione mutatur signum quantitatis subtrahendæ tantum in oppositum. In multiplicatione, & divisione si utriusque signa sunt conformia, nimirum utrunque

que simul positivum, vel utrunque simul negativum, apponitur producto signum positivum, si difformia negativum.

22. Quod ad additionem pertinet satis patet per se. In subtractione si ab a subtrahi debeat $b-c$, subtrahendo b nimis subtrahitur. Addendum igitur illud c, quod subtrahi non debuerat, & habebitur $a-b+c$. Sic si a numero 7 subtrahi debeat $5-2=3$, fiet $7-5+2=4$. Si autem sit $b=0$, subtrahendo $-c$ ab a, habebitur $a+c$.

23. Debeat autem multiplicari $a-b$ per $c-d$: Si multiplicetur per c, fiet $ac-bc$: nam ac est justo majus, cum debuerit multiplicari non totum a, sed quantitas ea minor $a-b$, adeoque ab ipso ac demendum bc. At præterea $a-b$ non debuit multiplicari per totum c, sed per $c-d$. Demendum igitur a producto $ac-bc$ productum ex $a-b$ & d, nimirum $ad-bd$, quo ablato, fiet $ac-bc-ad+bd$. Signa igitur conformia tum positiva, tum negativa dederunt signum positivum in ac, bd, difformia negativum in bc, ad. Sic si $7-3=4$ debeat multiplicari per $5-2=3$, fiet $5\times7-3\times5-2\times7+2\times3$, nimirum $35-15-14+6=12$. Et quidem si fiat $a=0$, $c=0$, fiunt ac, bc, $ad=0$, & $-b\times-d=+bd$, adeoque etiam solæ binæ quantitates negativæ per se invicem multiplicatæ exhibent signum positivum.

24. Porro tam in subtractione signi negativi, quam in multiplicatione binorum signorum negativorum, negando signum negativum, habetur positivum eo modo, quo qui negat carentiam alicujus rei, affirmat existentiam ejusdem.

25. De-

25. Demum divisio est destructio multiplicationis; adeoque ut iterum multiplicando redeat idem signum, debet in divisione servari eadem lex, quæ in multiplicatione. $\frac{+8}{+2} = +4$, ne si potius ponatur -4, multiplicando deinde $+2 \times -4$ reddat -8 pro $+8$; $\frac{+8}{-2} = -4$, ne si ponatur potius $+4$, deinde $-2 \times +4$ reddat -8; $\frac{-8}{+2} = -4$, ne si ponatur potius $+4$, deinde $+2 \times +4$ reddat $+8$; $\frac{-8}{-2} = +4$, ne si ponatur potius -4, deinde -2×-4 reddat $+8$.

26. Hinc autem infertur, quotiescunque concurrit numerus signorum negativorum par, haberi signum positivum, quotiescunque vero impar, haberi negativum. Nam bina negativa positivum reddunt, tertium negativum cum positivo binorum reddit negativum, quartum negativum cum eo negativo conjunctum dat iterum positivum, & ita porro; positiva autem signa, quæ adsint, rem nihil turbant; nam conjuncta cum negativo relinquunt negativum, cum positivo positivum.

27. Quamobrem quadratum quantitatis tam positivæ, quam negativæ erit semper positivum, $+2 \times +2 = +4$, $-2 \times -2 = +4$: at cubus quantitatis positivæ erit positivus, negativæ negativus, cum tria in hoc concurrant negativa signa, in illo nullum. Quarta potentia iterum utrobique erit

erit positiva, & generaliter quævis potentia quantitatis cujusvis habens exponentem parem erit positiva, quævis habens imparem, existente radice positiva, erit pariter positiva, existente radice negativa, erit negativa.

28. Inde vero consequitur radicem secundam, quartam, sextam, &c. quantitatis negativæ esse impossibilem, cum nimirum quæcunque radix possibilis sive positiva sit, sive negativa, exhibeat semper quamvis potentiam parem positivam. Ejusmodi radices exponentis paris quantitatum negativarum dicuntur idcirco quantitates imaginariæ. Sic $\sqrt{-1}$ est quantitas imaginaria, non realis.

29. Porro in solutione problematum si devenitur ad quantitates imaginarias, signum est admodum manifestum vel problema esse impossibile, vel in ejus solutione adhibitam esse methodum, quæ aliquid impossibile requirat, prorsus ut ubi devenitur in argumentatione quavis ad absurdum. Adhuc tamen frequens occurrit usus ipsarum quantitatum imaginariarum, quia ubi ipsum problema possibile est, & impossibilitas involvitur inter solvendum, sæpe impossibilitas ipsa deinde tollitur, ac eliditur pars illa impossibilis. Sic summa binarum quantitatum, quæ ex imaginariis, & realibus sunt mixtæ realis esse potest, ut quantitatum $3+\sqrt{-1}$, & $8-\sqrt{-1}$ summa est realis, nimirum 11, & differentia, nimirum 5. Ac potest quantitatum mixtarum ex realibus, & imaginariis esse realis non solum summa, & differentia, ut hic, sed & productum, & potentia aliqua: quod in potentia patet, cum quadratum ipsius $\sqrt{-1}$ sit $=-1$ ex ipsa radicis

radicis notione: de multiplicatione, & potentia tertia patebit infra.

30. Infertur autem etiam illud, quantitatis cujusvis radices secundas esse binas, alteram positivam, alteram negativam. Sic $\sqrt{4} = \pm 2$, nimirum vel positivum, vel negativum signum adhiberi potest, & radix quadrata semper ambigui valoris erit, quod attinet ad signum; ac iccirco ubi in solutionibus problematum obvenerit, semper binas exhibebit solutiones, cum utraque radix æquè idem quadratum habeat.

31. At radix exponentis imparis erit semper determinati valoris, positivi si quantitas sit positiva, negativi, si negativa, nec nisi una radix realis ejusmodi habebitur, cum quævis quantitas realis utcunque paulo minor, vel major potentiam generare debeat omnino minorem, vel majorem. Plures tamen imaginarios valores habere poterunt etiam radices gradus imparis, ut videbimus infra, cum quantitates compositæ ex realibus & imaginariis possint aliquando imaginarietatem destruere elevatæ ad potentiam imparem. Sed de eo ubi de compositarum quantitatum potentiis.

32. Jam vero si quantitates componantur ex numeris præfixis, & quantitatibus litteralibus prorsus similibus, summantur, vel subtrahuntur soli numeri, adscriptis summæ, vel differentiæ numerorum quantitatibus illis ipsis: & id quidem patet ex eo, quod idem est multiplicare unam quantitatem per aliam, ac eam multiplicare per omnes ejus partes alias post alias. $2a + 3a = 5a$, $5a - 2a = 3a$, $2a - 5a = -3a$.

33. Si

33. Si quantitates litterales sint dissimiles, adhibetur signum +, vel — sine ulla reductione. $3ab - 5cd$ reduci non potest ad expressionem simpliciorem. Sed si adsit aliqua littera communis, ea potest seorsum poni, summatis, vel subductis reliquis per modum numerorum. $ac+bc=(a+b)c$, $abed-abfg=(ed-fg)ab$.

34. Si quantitates componuntur ex numeris, & litteris quibuscumque, multiplicantur, & dividuntur seorsum numeri, & seorsum quantitates litterales. $3ac \times 5ab = 15a^2bc$; $\frac{6a^2bc}{2a^2c}=3b$; $\frac{10a^2b}{6a^2c}=\frac{5b}{3c}$. Patet ex eo, quod quocunque ordine per se invicem multiplicentur aliquæ quantitates, productum simul omnium semper est idem.

35. Fractiones reducuntur ad eundem denominatorem, tum summantur, vel subtrahuntur prorsus, ut in Arithmetica, multiplicando tam denominatorem, quam numeratorem cujuslibet per denominatorem reliquorum; $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}=\frac{adf}{bdf}+\frac{bcf}{bdf}+\frac{bde}{bdf}=\frac{adf+bcf+bde}{bdf}$.

36. Fractiones multiplicantur, ac dividuntur prorsus, ut in Arithmetica, multiplicando in primo casu numeratores per se, & denominatores per se; in secundo multiplicando numeratorem divisi per denominatorem divisoris, & viceversa denominatorem illius per numeratorem hujus, nempe multi-

multiplicando divisum per divisorem inversum, $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

37. Pro quantitatibus habentibus exponentem quantitatis habentur hi quatuor canones, qui profluunt ex ratione notandi potentias exposita §.1, ac ex operationibus arithmeticis. 1. In multiplicatione earum quantitatum summantur exponentes: 2. In divisione subtrahitur exponens divisoris ab exponente divisi: 3. In elevatione ad novam potentiam multiplicatur exponens præcedentis per exponentem novæ: 4. In extractione radicum dividitur exponens præcedentis per exponentem novæ.

$a^2 \times a^3 = a^5$, quia $aa \times aaa = aaaaa$, & generaliter $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $\frac{a^5}{a^2} = a^3$, quia $\frac{aaaaa}{aa} = aaa$; $\frac{a^2}{a^5} = a^{2-5} = a^{-3}$, quia $\frac{aa}{aaaaa} = \frac{1}{aaa}$; generaliter vero $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $(a^3)^2 = a^{2\times 3} = a^6$, quia $(a^3)^2 = a^3 \times a^3 = a^6$; $\sqrt[2]{a^6} = a^{\frac{6}{2}} = a^3$; quia $\sqrt{a^6} = \sqrt{(a^3 \times a^3)} = a^3$.

38. Hinc vero ope reductionis fractionum eruuntur plura circa quantitates radicales: sunt autem hujusmodi.

39. Si ex radice extrahenda sit radix, multiplicentur exponentes. $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}} = \sqrt[12]{a}$: quia $\sqrt[4]{a} = a^{\frac{1}{4}}$, ac extrahendo radicem tertiam debet dividi per 3 exponens $\frac{1}{4}$ (per num.37), qui ita divisus evadit $\frac{1}{12}$ (per n.36), adeoque $\sqrt[3]{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{1}{12}}$.

40. Inde autem eruitur, radicem quartam cujusvis quantitatis habere quatuor valores, quorum bini sunt semper imaginarii, & *bini alii reales*, vel imaginarii, prout quantitas fuerit positiva, vel negativa. Nam $\sqrt[4]{a} = \sqrt[2]{\sqrt[2]{a}}$, adeoque ob valorem radicis secundæ ambiguum, habebuntur valores quatuor $+\sqrt[2]{-\sqrt[2]{a}}$, $-\sqrt[2]{-\sqrt[2]{a}}$, $+\sqrt[2]{+\sqrt[2]{a}}$, $-\sqrt[2]{+\sqrt[2]{a}}$, quorum priores duo sunt semper imaginarii, posteriores autem erunt reales vel imaginarii, prout a fuerit valor positivus, vel negativus. Et eodem pacto generaliter $\sqrt[2m]{a}$, habebit duplum valorum numerum ejus, quem habet $\sqrt[m]{a}$, quorum saltem dimidium erit semper imaginarium, cum nimirum sit $\sqrt[2m]{a} = \sqrt[m]{+\sqrt[2]{a}}$.

41. Si exponens & radicis, & quantitatis signo radicali affectæ multiplicetur per eandem quantitatem, valor manet idem; $\sqrt[2]{a^3} = \sqrt[8]{a^{12}}$, quia $\sqrt[2]{a^3} = a^{\frac{3}{2}}$

$a^{\frac{3}{2}}$, & $\frac{3}{2}=\frac{3\times4}{2\times4}=\frac{12}{8}$, cum fractionis valor non mutetur, multiplicato & numeratore, & denominatore per eandem quantitatem quamcumque. Et eadem est ratio, si uterque contra dividatur per eandem quantitatem, quo pacto reducuntur sæpe radicales ipsi ad simpliciores. $\sqrt[8]{a^{12}}=\sqrt[2]{a^{3}}$.

42. Radices diversorum exponentium reducuntur ad eundem, si multiplicetur tam exponens alterius, quam quantitas eo radicali inclusa per exponentem radicis alterius. $\sqrt[2]{a^{3}}$, & $\sqrt[3]{a^{5}}$ reducuntur ad $\sqrt[6]{a^{9}}$, & $\sqrt[6]{a^{10}}$, quia $\sqrt[2]{a^{3}}=a^{\frac{3}{2}}$, $\sqrt[3]{a^{5}}=a^{\frac{5}{3}}$, ac reducendo $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$ ad eundem denominatorem habetur $\frac{9}{6}$, $\frac{10}{6}$ (per num.35); adeoque $a^{\frac{3}{2}}$, & $a^{\frac{5}{3}}$ reducuntur ad $a^{\frac{9}{6}}$, & $a^{\frac{10}{6}}$.

43. Radices si ejusdem exponentis sint, & easdem quantitates includant, summantur, vel subtrahuntur, summando, vel subtrahendo quantitates præfixas: $3\sqrt[3]{b}+5\sqrt[3]{b}=8\sqrt[3]{b}$; $5a\sqrt[3]{bc}-3a\sqrt[3]{bc}=2a\sqrt[3]{bc}$; si autem diversos exponentes habeant, vel diversas quantitates sub signis, non uniuntur in unum terminum, nisi forte redactæ ad eundem exponentem etiam eandem quantitatem includant. $5\sqrt[4]{a^{6}b^{8}}+8\sqrt[6]{a^{9}b^{12}}=5\sqrt[2]{a^{3}b^{4}}+$

$8\sqrt[6]{a^3 b^4} = 13\sqrt{a^3 b^4}$. Patet ex eo, quod radicalis terminus, ubi sub signo radicali eadem quantitas continetur tractari debet eodem modo, quo tractaretur, si certa quadam littera exprimeretur.

44. Radices si ejusdem exponentis sint, utcunque diversas quantitates includant, multiplicantur, & dividuntur, multiplicando, & dividendo quantitates ipsas; quia elevando ad eam potentiam, quam radix exprimit, invenitur eadem quantitas, quæ si signo multiplicationis conjunctæ fuissent eæ binæ radices. $\sqrt[3]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{ab}$; quia elevando utrobique ad potestatem tertiam habetur $a \times b = ab$.

$\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ ob eandem rationem.

45. Inde autem eruitur, binas quantitates imaginarias invicem multiplicatas, posse efformare quantitatem realem: $\sqrt{-2} \times \sqrt{-8} = \sqrt{16} = \pm 4$. Videtur tamen hic notandum, ubi radix imaginaria elevatur ad suam potentiam, debere retineri signum negativum tantummodo, ex ipsa nimirum notione potentiæ, & radicis. Sic quadratum quantitatis imaginariæ $\sqrt{-1}$, debet esse determinatè -1, licet $\sqrt{-1}$, si consideretur ut multiplicata per $\sqrt{-1}$, ex legibus multiplicationis reddat $\sqrt{+1} = \pm 1$. Nam $\sqrt{-1}$ ex ipsa notione radicis exprimit id, cujus quadratum est -1. Quamobrem si consideretur elevatio ad secundam potentiam, videtur valor haberi debere determinatè pro nega-

negativo; si consideretur multiplicatio, debere haberi pro ambiguo; nec mirum in quantitatis impossibilis usu exlex quidpiam occurrere, & aliud videri multiplicare quantitatem per se ipsam, aliud elevare ad secundam potentiam, quæ duo in realibus quantitatibus idem sonant.

46. Si radices diversum exponentem habeant, reducuntur ad eundem (per num.42), tum multiplicantur, vel dividuntur. $\sqrt[2]{a} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^2} = \sqrt[6]{a^3 b^2}$; $\frac{\sqrt[2]{a}}{\sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[6]{b^2}} = \sqrt[6]{\frac{a^3}{b^2}}$.

47. Hinc si extra signum radicale habeatur aliqua quantitas, potest includi signo radicali, multiplicando quantitatem inclusam per ejus potentiam ab exponente radicis expressam, cum quantitas non radicalis concipi possit ut radix prima sui ipsius habens exponentem $= 1$, & reducatur ad radicalem ejusdem exponentis. $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$; quia $a\sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3} \times \sqrt[3]{b} = \sqrt[3]{a^3 b}$. E contra si quantitas inclusa constet binis factoribus, e quorum altero radix illa extrahi possit; illa radix extracta potest poni ante signum radicale; relicta sub eo altera. $\sqrt[3]{a^7 b} = a^2\sqrt[3]{ab}$, quia $\sqrt[3]{a^7 b} = \sqrt[3]{a^6 \times ab} = \sqrt[3]{a^6} \times \sqrt[3]{ab} = a^2 \times \sqrt[3]{ab}$; $3\sqrt{50a^3 c^3} = 15a^2 c\sqrt{2ac}$; quia $3\sqrt{50a^3 c^3}$

$= 3\sqrt{25a^4c^2 \times 2ac} = 3\sqrt{25a^4c^2} \times \sqrt{2ac}$
(per n. 46) $= 3 \times 5a^2c \times \sqrt{2ac} = 15a^2c\sqrt{2ac}$.

48. Inde autem quævis radix imaginaria potest reduci ad hanc formam $a\sqrt[2m]{-1}$, ubi a est valor realis. Si enim sit $\sqrt[2m]{-b}$, & $-b$ exprimat quancunque quantitatem negativam, posito $a^{2m} = b$, erit $\sqrt[2m]{-b}$ $= \sqrt[2m]{-a^{2m}} = \sqrt[2m]{a^{2m} \times -1} = a\sqrt[2m]{-1}$.

§. III.

De iisdem operationibus in quantitatibus constantibus pluribus terminis.

49. IN additione plurium quantitatum similes singulis adduntur ita, ut si signa sint conformia, addantur numeri præfixi, qui dicuntur coefficientes numerici; si sint difformia subtrahatur numerus minor a majore, & apponatur signum numeri majoris: reliqui termini adjungantur cum suis signis. Proderit tamen similium alias sub aliis scribere, ut facilius colligatur summa.

50. Debeant addi hæ summæ, $8a^2 + 3ab - 4cd + 6ad$, $7a^2 + 4fg - 2ab - 8ad$. Scribantur hoc pacto,

$8a^2$

$$8a^2 + 3ab - 4cd + 6ad$$
$$7a^2 - 2ab \quad - 8ad + 4fg$$

$$15a^2 + ab - 4cd - 2ad + 4fg$$

51. In ſubtractione accipiantur omnes quantitates ſubtrahendæ, tanquam ſi haberent ſignum contrarium ei, quod habent, & fiat ſumma cum legibus jam præſcriptis. Sic earumdem quantitatum differentia erit

$$a^2 + 5ab - 4cd + 14ad - 4fg$$

52. In multiplicatione ſcribenda altera quantitas ſub altera, tum tota prima quantitas multiplicanda per unum e terminis ſecundæ, ſcribendo productum in una linea, deinde tota prima quantitas per aliam, & ita porro, ſcribendo ſingula producta in ſingulis lineis, ac notando ſimiles terminos diverſorum ejuſmodi productorum alios ſub aliis: demum omnium linearum colligenda ſumma.

53. In proximè ſequenti exemplo prima & ſecunda linea continent quantitates, quæ per ſe invicem multiplicantur, tertia primam multiplicatam per $3a^2$; quarta eandem multiplicatam per $4ab$; quinta eandem per $2c$, ſexta ſummam tertiæ, quartæ, & quintæ.

54. Omnium verò hujuſmodi operationum patet ratio ex eo, quod hic ſumma, ſubtractio, multiplicatio fiant per partes, juxta methodum propoſitam pro quantitatibus ſimplicibus §.2.

$$\begin{array}{l}
2a^2 + 3ab - c \\
3a^2 - 4ab + 2c \\
\hline
6a^4 + 9a^3 b - 3a^2 c \\
\qquad - 8a^3 b \qquad - 12a^2 b^2 + 4abc \\
\qquad\qquad + 4a^2 c \qquad + 6abc - 2c^2 \\
\hline
6a^4 + a^3 b + a^2 c - 12a^2 b^2 + 10abc - 2c^2
\end{array}$$

55. Possunt autem ope solius etiam summæ, subtractionis, multiplicationis plurima theoremata facile demonstrari. Est theorema, cujus usus sæpissimè occurrit. Productum sub summa, & differentia quantitatum æquatur differentiæ quadratorum ipsarum quantitatum. Sic ex. gr. numerorum 7, & 3 summa est 10, differentia 4, quorum productum 40, quadrata autem sunt 49, & 9, quorum differentia pariter 40. Generaliter autem patet sola multiplicatione summæ $a + b$ quantitatum a, & b, ac differentiæ earundem $a - b$. Facta enim multiplicatione habebitur $a^2 - b^2$.

56. Eodem autem pacto plurima alia demonstrantur, ac fere omnia theoremata libri II. Euclidis, ut patebit in Applicatione Algebræ ad Geometriam; atque hoc ipsum congruit cum quinta, & sexta propositione ejus libri, ad quas facile traducitur.

57. In divisione cavendum, ut tam quantitas dividenda, quam divisa ordinentur secundum potestates

ſtates cujuſdam litteræ ita, ut termini eandem illius litteræ poteſtatem continentes ſcribantur alii ſub aliis, & pro unico termino conſiderentur: tum primus terminus dividitur per primum, & notatur quotus, ut in Arithmetica: multiplicatur totus diviſus per hunc quotum: ſubtrahitur hoc productum a diviſo: notatur reſiduum, cui adduntur reliqui termini quantitatis dividendæ, & iteratur operatio eodem ordine uſque in finem.

$6a^4 + a^3 b - 12a^2 b^2$	$2a^2 + 3ab$ Diviſor
$+4a^3 c + 6a^2 bc$	$3a^2 - 4ab + 2ac$ Quotus

$$6a^4 + 9a^3 b$$

$$- 8a^3 b - 12a^2 b^2$$

$$+ 4a^3 c + 6a^2 bc$$

$$- 8a^3 b - 12a^2 b^2$$

$$+ 4a^3 c + 6a^2 bc$$

$$+ 4a^3 c + 6abc$$

$$0 \qquad 0$$

58. Prima, & ſecunda linea diviſi continent diviſum ordinatum, per potentias litteræ a, ubi ſecundus & tertius terminus habent binas partes. Diviſor

for pariter ordinatur per potentias ipsius a. Dividendo $6a^4$ per $2a^2$ oritur $3a^2$ primus terminus quoti. Tertia linea continet divisorem ductum in $3a^2$, quarta, & quinta residuum: dividendo $-8a^3b$ per $2a^2$ oritur $-4ab$ secundus terminus quoti: sexta linea continet divisorem ductum in $4ab$, septima residuum: dividendo $4a^2c$ per $2a^2$, oritur $2ac$ postremus terminus quoti: linea octava continet divisorem ductum in $2ac$.

59. Si in quantitate dividenda desint termini intermedii continentes potentias ejus litteræ intermedias, solent apponi stellulæ eorum loco.

$$\begin{array}{l|l}
x^4 * - 2a^2x^2 * + a^4 & x - a \\
\cline{2-2}
\underline{x^4 - ax^3} & x^3 + ax^2 - a^2x - a^3 \\
\quad + ax^3 - 2a^2x^2 & \\
\quad \underline{+ ax^3 - a^2x^2} & \\
\qquad - a^2x^2 * & \\
\qquad \underline{- a^2x^2 + a^3x} & \\
\qquad\quad - a^3x + a^4 & \\
\qquad\quad \underline{- a^3x + a^4} & \\
\qquad\qquad 0 \quad 0 &
\end{array}$$

60. Divisionis ratio patet ex eo, quod fiat per partes

partes prorsus ut in Arithmetica, subtrahendo semper e diviso productum ex parte quoti inventa, & divisore. Si nihil superest ex divisione, ut in exemplis allatis; divisio est perfecta, & quotus accuratus. Si quid supersit, apponenda fractio, cujus numerator residuum, denominator est divisor ipse.

$$\begin{array}{l|l} x^3+3ax^2+3a^2x+2a^3 & x+a \\ \underline{x^3+ax^2} & \overline{x^2+2ax+a^2+\frac{a^3}{x+a}} \\ \quad +2ax^2+3a^2x & \\ \quad \underline{+2ax^2+2a^2x} & \\ \qquad\quad +a^2x+2a^3 & \\ \qquad\quad \underline{+a^2x+a^3} & \\ \qquad\qquad\quad +a^3 & \end{array}$$

61. Quoniam in fine remanet a^3 apposita est quoto fractio $\frac{a^3}{x+a}$

62. Potest autem etiam divisio continuari per seriem infinitam, ut in arithmetica, concipiendo semper residuo additum o, ut in sequenti exemplo.

x^3+

$$x^3+3ax^2+3a^2x+2a^3 \;\Big|\; x+a$$

$$x^2+2ax+a^2+\frac{a^3}{x}-\frac{a^4}{x^2} \text{ \&c.}$$

$$\underline{x^3+ax^2}$$

$$+2ax^2+3a^2x$$

$$\underline{+2ax^2+2a^2x}$$

$$+a^2x+2a^3$$

$$\underline{+a^2x+a^3}$$

$$+a^3$$

$$\underline{+a^3+\frac{a^4}{x}}$$

$$-\frac{a^4}{x}$$

$$\underline{-\frac{a^4}{x}-\frac{a^5}{x^2}}$$

$$+\frac{a^5}{x^2}$$

63. Hinc, ut e posteriore exemplo patet, semper potest reduci in seriem quandam infinitam quæcumque fractio, sive quotus proveniens ex quantitate quacunque simplici divisa per quantitatem com-

compositam ex quotcunque terminis. Consideretur autem series orta ex fractione $\frac{a}{b+c}$, in qua si c exprimat quantitates quotcunque, casus hic simplicissimus extendetur ad denominatores utcunque compositos, quorum primum terminum exprimat b, reliquos omnes c.

$$\begin{array}{l|l} & b+c \quad \text{Divisor} \\ \hline \text{Divisus} \quad a & \frac{a}{b}-\frac{ac}{b^2}+\frac{ac^2}{b^3} \;\&c. \;\text{Quotus} \\ a+\frac{ac}{b} & \\ \hline -\frac{ac}{b} & \\ -\frac{ac}{b}-\frac{ac^2}{b^2} & \\ \hline +\frac{ac^2}{b^2} & \end{array}$$

64. In hac serie termini progrediuntur semper in progressione geometrica, & semper decrescunt, vel crescunt, vel eandem quantitatem conservant, prout primus terminus binomii b fuerit major, vel minor, vel æqualis secundo c. In primo casu series dicitur convergens, & ad verum quotientis valorem semper accedit magis in infinitum, ac eo citius

con-

convergit, quo fractio $\frac{c}{b}$ fuerit minor. In secundo dicitur divergens, ac semper magis recedit, in tertio parallela, ac semper æquè distat a vero valore. Res patebit in numeris.

65. Fractio $\frac{a}{b+c}$ sit $=\frac{1}{3}$, & $a=1$, $b=2$, $c=1$. Substitutis his valoribus in quoto num. 63, erit $\frac{1}{3}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{16}$ &c. Primi duo termini simul continent $\frac{1}{4}$, tres primi $\frac{3}{8}$, quatuor primi $\frac{5}{16}$, qui quidem valores semper propius accedunt ad $\frac{1}{3}$; & quidem si signa alternantur, ut hìc, semper ubi additur alterius signi terminus, exceditur verus valor, ubi additur terminus signi oppositi, ab eo deficitur. Porro mutato valore b, & c, eadem fractio potest redigi in seriem adhuc magis convergentem, ut si fiat $b=4$, $c=-1$, quo casu erit $\frac{1}{3}=\frac{1}{4-1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}$ &c., in qua serie priores tres termini efficiunt $\frac{21}{64}$, quod ad $\frac{1}{3}$ accedit multo magis, quam ∧ [illegible]. Generaliter autem, quo fuerit b major respectu c, eo series erit magis convergens.

∧ $\frac{5}{16}$.

65. Si

66. Si autem fiat $\frac{1}{3} = \frac{1}{1+2}$, habebitur $a =$ 1, $b = 1$, $c = 2$, & series $1 - 2 + 4 - 8$ &c., quæ semper a vero valore recedit magis, & est divergens.

67. Si demum fiat $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$, habebitur series parallela $1 - 1 + 1 - 1$ &c.

68. P. Guido Grandi summus cæteroquin Geometra inde deduxit summam infinitarum nullitatum esse $= \frac{1}{2}$, quia $1 - 1 = 0$, iterum $1 - 1 = 0$, & ita porro $0 + 0 + 0$ &c. $= \frac{1}{2}$. At eodem jure liceret dicere $-1 + 1 = 0$, $-1 + 1 = 0$ &c. adeoque $\frac{1}{2} = 1 + 0 + 0$ &c., & proinde $\frac{1}{2} = 1.\ \frac{1}{2}$ Sed series divergentes, & parallelæ verum valorem non exhibent, nec ad ipsum accedunt.

69. Licet autem series divergentes, & parallelæ verum valorem non exhibeant, adhuc usui esse possunt, tum quia in parallelis, cum æque distent hinc inde, & signa alternent, unius termini dimidium exhibet valorem verum, divergentes autem si e finita quantitate oriuntur, sæpe mutari possunt in convergentes; tum quia plurimæ series summari possunt, ut eæ omnes, quarum termini progrediuntur in progressione geometrica. Est enim in iis, quemadmodum in progressionibus demonstravimus Arith. cap. 3. num. 9, ut differentia primi termini a secun-

secundo ad primum, ita hic ad totam seriem; quæ quidem summa in progressionibus divergentibus, & parallelis non exhibebit valorem ipsius seriei, sed indicabit unde orta sit. Sic in superiore serie divergente $1 - 2 + 4 - 8$ &c., si fiat, ut $1 - (-2) = 1 + 2 = 3 . 1 :: 1 . \frac{1}{3}$, habebitur fractio $\frac{1}{3}$, unde ea series profecta est.

70. Porro serierum usus in sublimiore Mathesi frequentissimus est. Aliquis earum usus nobis etiam hic paulo infra occurret.

71. An aliqua formula algebraica divisorem aliquem habeat, & quos habeat divisores, non ita facile determinatur in quantitatibus aliquanto plus compositis. In simplicioribus primo aspectu divisores simpliciores facile deprehenduntur. Illud autem generaliter in omni quantitatum genere habetur, nimirum si inveniantur omnes divisores, aliorum multiplicatione non compositi, etiam productum ex binis quibusvis, vel ex ternis, vel ex quaternis, & ita porro, fore divisorem quantitatis ejusdem; productum autem ex omnibus exhibere quantitatem ipsam. Id autem patet ex eo, quod quocunque ordine eæ quantitates multiplicentur, debent demum idem illud productum exhibere, ut diximus Arithm. cap. 1. num. 18, & in Appendice num. 125.

72. Quantitatis $abcd + bcde$ sunt divisores non compositi ex aliis b, c, d, $a + e$; iccirco sunt etiam bc, bd, $ab + be$, cd, $ac + ce$, $ad + de$ composita ex binis, & bcd, $abc + bce$, $abd + bde$, $acd + cde$ composita ex ternis, & ipsa quantitas $abcd + bcde$ composita ex omnibus simul.

73. Pro

73. Pro inventione divisorum in quantitatibus magis compositis, methodum eo magis implexam, quo quantitates magis compositæ sunt, & quo divisores quæruntur pluribus constantes terminis, exhibuit sine demonstratione Nevvtonus in Arithmetica Universali, quam a pluribus demonstratam Tyro, cum aliquanto magis profecerit facile inveniet, si libuerit. Simplicissimi casus specimen aliquod hic exhibebimus usui futurum infra.

74. Sit formula quædam, quæ contineat plures unius tantummodo litteræ potentias numeris conjunctas integris ita, ut altissima potestas nullum numerum præfixum habeat, quemadmodum est $x^3 - 2x^2 - 13x + 20$, & quæratur, an habeat aliquem divisorem unius dimensionis, adeoque hujus formæ $x + a$, exprimente a aliquem numerum.

75. Ponantur pro x alii post alios plures termini progressionis arithmeticæ decrescentis per unitatem, inter quos sit 0, ut 1, 0, — 1. Colligantur diversi valores totius formulæ respondentes his diversis positionibus: adscribantur iis omnes eorum divisores: inter divisores respondentes diversis positionibus, qui omnes tam ut positivi, quam ut negativi considerandi sunt, cum tam positive, quam negative accepti eandem quantitatem possint semper dividere, quæratur aliqua progressio arithmetica decrescens per unitatem, cujus singuli termini sumantur inter divisores respondentes singulis positionibus: ejus progressionis terminus respondens positioni $x = 0$ sumatur pro a, & per $x + a$ ten-

tetur divisio, ac si non succedat per ullum a ita inventum, erit impossibilis ejus formæ divisor, qui si possibilis sit, invenietur omnino.

76. In casu formulæ $x^3 - 2x^2 - 13x + 20$, posito 1 pro x, habetur $1 - 2 - 13 + 20 = 6$: posito $x = 0$, habetur $0 - 0 - 0 + 20 = 20$: posito $x = -1$, habetur $-1 - 2 + 13 + 20 = 30$. Ordinentur hi numeri cum suis divisoribus, ut infra, ubi prima columna continet terminos progressionis arithmeticæ positos, pro x, secunda valores formulæ inde provenientes, quibus respondent ad latus omnes ipsorum divisores.

1	6	1, 2, 3, 6
0	20	1, 2, 4, 5, 10, 20
—1	30	1, 2, 3, 5, 6, 10, 30

77. Considerando divisores ipsos occurrunt tres progressiones decrescentes per unitatem, 3, 2, 1; —1, —2, —3; —3, —4, —5, quarum primi termini respondent primæ positioni, secundi secundæ, tertii tertiæ. Assumptis harum progressionum terminis, qui respondent positioni $x = 0$, ac sunt $+2$, -2, -4, tentanda divisio per $x + 2$, $x - 2$, $x - 4$. Priores duæ non succedunt, succedit tertia, existente quoto $x + 2x - 5$. Quare unicum ejus formæ divisorem $x - 4$ habet proposita quantitas.

78. Demonstratio methodi hinc petitur. Si formula quævis composita ex potentiis quantitatis x, & nu-

& numeris multiplicetur per $x + a$, & pariat aliam formulam, in qua pro x substituatur quivis numerus; valor totius hujus formulæ debebit habere inter suos factores valorem $x + a$. Ac proinde si pro x ponantur successivè diversi numeri alii aliis unitate minores, debet hic factor $x + a$ decrescere per illam unitatem, per quam decrescit x. Porro ubi ponitur $x = 0$, factor ille $x + a$ erit $= a$. Quare valor quæsitus a, debet inveniri, si habetur ullus, inter divisores respondentes positioni $x = 0$, sed præterea debent inter præcedentium positionum divisores inveniri numeri eodem valore a unitate majores, ac inter divisores sequentium debent inveniri minores pariter unitate; nimirum valor ille debet esse in progressione arithmetica decrescente per unitatem, & excurrente per omnium positionum divisores. Debet autem esse inter divisores integros non fractos; nam, ut demonstrabimus infra, nulla quantitas algebraica haberi potest, quæ multiplicata per $x + a$, existente a numero fracto, formulam exhibeat omni fractione carentem, adeoque quæsitus numerus a non potest esse numerus fractus.

79. Ubi plures obveniunt divisores, ut hìc, quin tententur tot divisiones, eæ, quæ evadunt inutiles, sæpe admodum facile excluduntur, assumpto pro x alio aliquo termino progressionis illius, ut hìc facto $x = 2$, quo casu habetur valor formulæ $8 - 8 - 26 + 20 = -6$. Inter hujus divisores debet adesse terminus præcedens progressionem arithmeticam inventam inter cæterarum positionum divisores usui futuram. Porro progressionum 3, 2, 1; -1, -2, -3; -3, -4, -5 termini præce-

 ce-

cedentes sunt 4, o, — 2, quorum priores bini non adsunt inter divisores hujus novi valoris inventi, nimirum numeri 6, tertius autem adest. Quare priores binæ usui esse non possunt, & relinquitur illa sola, quam vidimus exhibere quæsitum valorem $a = -4$.

80. An binæ quantitates communem habeant divisorem minus difficulter invenitur eadem ratione, quam pro numeris docuimus in *Appendice* Primæ Partis num. 145. Dividitur nempe altera per alteram: tum si quod sit residuum, dividitur per ipsum divisor, & per novum residuum divisor novus, atque ita porro, donec nullum residuum habeatur: ultimus autem divisor, erit divisor communis maximus. Demonstrationem ibidem dedimus num. 146, & 147.

81. Sæpe tamen in formulis Algebraicis, ut divisor possit dividi per residuum, oportet primos eorum terminos ita præparare, ut alter per alterum accuratè dividi possit sine fractione. Id autem fit notando, qui factores primi termini divisoris novi non habentur in primo termino novi divisi, & si per eorum aliquem dividi potest totus divisor, dividatur is totus per eum; sin minus, multiplicetur totus divisus per eos omnes, per quos dividi non potuerit divisor, quod etiam observandum erit quotiescunque nova quoti pars quæritur in ejusdem divisionis continuatione. Eo enim pacto divisio semper fiet sine fractione. Quod autem ea multiplicatio aut divisio communis divisoris inventionem non turbet satis constat ex iisdem theorematis, ex quibus methodum pro numeris derivavimus citato loco.

loco. Nec verò ullum erit periculum, ne auferatur aliquis communis divisor dum divisor totus dividitur per factorem non communem etiam diviso, vel addatur dum divisus totus multiplicatur per factorem non communem toti divisori. Res exemplo patebit magis.

82. Sint binæ formulæ $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$, & $5x^2 + 9x - 18$. Primus terminus primæ $2x^3$ non potest accuratè dividi per primum secundæ $5x^2$, cum inter factores illius desit 5, nec per ipsum 5 dividi potest tota secunda quantitas. Multiplicetur igitur per 5 tota prima, ac habebitur tertia $10x^3 + 40x^2 + 10x - 60$, & idem erit quærere divisorem communem primæ, & secundæ, ac quærere divisorem communem hujus tertiæ, & secundæ. Divisa autem tertia per secundam, quotus est $2x$, residuum $22x^2 + 46x - 60$, quod pariter in primo termino $22x$ non habet illum factorem 5, ut continuari possit divisio; icc irco ducendum totum residuum in 5, unde habetur $110x^2 + 230x - 300$, tum idem dividendum per illud $5x^2 + 9x - 18$, & provenit quotus 22, ac residuum $32x + 96$. Per hoc residuum dividendus esset ille divisor $5x^2 + 9x - 18$; sed quia primus ejus terminus $5x^2$, non habet inter factores

32, aut ullum divisorem ipsius 32 & totum illud residuum $32x + 96$ dividi potest per 32, remanente $x + 3$, dividatur $5x^2 + 9x - 18$ per $x + 3$, & quoniam divisio succedit, existente quoto $5x - 6$; divisor ipse $x + 3$, est communis divisor maximus quantitatum propositarum; Et quidem si per ipsum dividatur $2x^3 + 8x^2 + 2x - 12$, habetur $2x^2 + 2x - 4$, & si per ipsum dividatur $5x^2 + 9x - 18$, habetur $5x - 6$.

83. Porro invento communi divisore, fractiones possunt simpliciores reddi, dividendo numeratorem, & denominatorem per divisorem communem, si quem habent. Sic dividendo utrobique per communem hunc divisorem $x + 3$ fiet fractio

$$\frac{2x^3 + 8x^2 + 3x - 12}{5x^2 + 9x - 18} = \frac{2x^2 + 2x - 4}{5x - 6}.$$

§. IV.

De potentiis, quantitatum constantium pluribus terminis.

84. POtentiæ eruuntur continuà multiplicatione per radicem, quarum natura facilius cognoscitur, si multiplicentur per se invicem quantitates $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$ &c. Hujusmodi multiplicatio sic procedit.

$x + a$

$$\begin{array}{l} x + a \\ x + b \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} x^2 & + ax & + ab \\ & + bx & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + c \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} x^3 & + ax^2 & + abx & + abc \\ & + bx^2 & + acx & \\ & + cx^2 & + bcx & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x + d \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} x^4 & + ax^3 & + abx^2 & + abcx & + abcd \\ & + bx^3 & + acx^2 & + abdx & \\ & + cx^3 & + bcx^2 & + acdx & \\ & + dx^3 & + adx^2 & + bcdx & \\ & & + bdx^2 & & \\ & & + cdx^2 & & \end{array}$$

85. Patet autem ex hujusmodi multiplicatione primum terminum debere esse primam illam quantitatem x elevatam ad eam potentiam, quæ, exprimit numerum quantitatum multiplicatarum per se invicem, quæ quantitas in sequentibus terminis

aderit elevata ad potentias inferiores. In secundo autem termino haberi cum ea summam illorum terminorum a, b, c, d &c., in tertio summam productorum ex omnibus binariis, in quarto ex omnibus ternariis, in quinto ex omnibus quaternariis, & ita porro, ac semper in postremo productum ex omnibus.

86. Si jam omnes termini b, c, d &c. concipiantur æquales eidem a, habebitur $x + a$ per se continuo multiplicatum, sive habebuntur potentiæ, binomii $x + a$, productum autem ex binario quovis erit a^2, ex ternario a^3, ex quaternario a^4, & ita porro. Quare eo valore substituto, quadratum binomii $x + a$ erit $x^2 + 2ax + a^2$, cubus $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, quarta potestas $x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4$, & ita porro reliquæ potentiæ erui possunt.

87. In iis omnibus potentiis primus terminus erit solum eadem potentia primæ quantitatis x, postremus solum eadem potentia secundæ quantitatis a, in reliquis utraque quantitas habebitur ita, ut prioris potestas perpetuo decrescat per unitatem, posterioris crescat. Præterea autem habebuntur numeri, quos etiam vocant uncias, qui facile inveniuntur generaliter, si consideretur in secundo termino debere præfigi numerum ipsorum terminorum a, b, c, d &c., in tertio numerum binariorum, quæ ex iis constare possunt, in quarto omnium ternariorum, & ita porro. Si enim ii numeri generaliter

neraliter inveniantur, invenientur illæ unciæ numericæ.

88. Jam vero si $x + a$ elevari debeat ad quamvis potentiam m, patet assumi debere litteras illas a, b, c, d &c. numero m, adeoque uncia secundi termini erit m, sive $\frac{m}{1}$, quod idem est.

89. Si autem assumatur quivis numerus terminorum m, semper quicumque ex iis cum quovis alio præter se constituit binarium, adeoque constituit binaria $m - 1$; cumque ipsi termini sint numero m, habebuntur binaria $m \times (m - 1)$. Sed eo pacto quodvis binarium bis obveniet, ut binarium $a\,b$, & $b\,a$, cum nimirum conjungitur a cum b, & b cum a. Quare ad habendum numerum binariorum non similium oportet sumere $\frac{m \times (m - 1)}{2}$, sive $\frac{m}{1} \times \frac{m - 1}{2}$, & ea erit uncia tertii termini.

90. Quodvis binarium potest constituere ternarium cum quovis termino præter illos duos, ex quibus constat, nimirum ternaria $m - 2$. Quare ternariorum numerus habebitur, si numerus binariorum multiplicetur per $m - 2$. Sed quodvis ternarium ter prodibit idem, cum nimirum quivis e tribus terminis conjungitur cum reliquorum binario. Ac proinde numerus ternariorum dissimilium habebitur, si numerus binariorum multiplicetur per $\frac{m - 2}{3}$, eritque $\frac{m}{1} \times \frac{m - 1}{2} \times \frac{m - 2}{3}$, quæ erit uncia quarti termini.

91. Eo-

91. Eodem pacto numerus quaternariorum erit $\frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$, & ita porro. Quare formula generalis pro elevando binomio ad quamvis potentiam m, erit

$$\overline{x+a}^{m} = x^{m} + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2}$$

$$\times a^{2} x^{m-2} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^{3} x^{m-3} \text{ \&c.}$$

92. Hic autem primo obiter notari potest, haberi hic admodum facile, quot binaria vel ternaria, quæ dicimus *ambi*, *terni*, aut aliæ ejusmodi combinationes habeantur in dato numero. Pro binariis factum ex binis postremis dividendum per factum ex binis primis, pro ternariis assumenda sunt facta ex ternis, & ita porro. In numero 90 habentur binaria $\frac{90 \times 89}{1 \times 2} = 4005$, ternaria $\frac{90 \times 89 \times 88}{1 \times 2 \times 3} =$ 117480, quinaria $\frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} =$ 43949268. Sed hæc ad rem præsentem minus pertinent.

93. Notandæ sunt deinde plures potentiarum proprietates, & ipsius formulæ generalis indoles. Ea formula semper abrumpitur in potentia m post numerum terminorum $m+1$. Nam uncia secundi termini habet m, tertii uncia addit $m-1$, quarti

$m-2$, & ita porro. Quare terminus $m+2$: habebit

bebit $m - m = 0$, & sequentes omnes multiplicabuntur pariter per o, & proinde evanescent: Adeoque quævis potentia habebit terminos $m + 1$.

Sic si pro m ponatur 2, uncia prima erit $\frac{2}{1}$, secunda $\frac{2}{1} \times \frac{2-1}{2} = \frac{2}{1} \times \frac{1}{2} = 1$, tertia $\frac{2}{1} \times \frac{2-1}{2} \times \frac{2-2}{3}$, sive $\frac{2}{1} \times \frac{1}{2} \times \frac{0}{3} = 0$. At si sit $m = 3$, solum in quarta uncia $\frac{3}{1} \times \frac{3-1}{2} \times \frac{3-2}{3} \times \frac{3-3}{4}$, incipit adesse $3 - 3 = 0$. Formula igitur in quadrato abrumpitur post tertium terminum, in cubo post quartum, & quadratum habet tres, tertia potentia, seu cubus quatuor terminos, & ita porro:

94. Primus cujusvis potentiæ m terminus erit semper x^m, postremus a^m & unciæ eorum, qui præcedunt postremum, erunt eædem, ac eorum, qui sequuntur primum in eadem ab iis distantia. Sic in quinta potentia uncia termini penultimi erit $\frac{5 \times 4 \times 3 \times 2}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = \frac{5}{1}$ eadem quæ secundi: ante penultima $\frac{5 \times 4 \times 3}{1 \times 2 \times 3} = \frac{5 \times 4}{1 \times 2}$ eadem, quæ tertii, & ita porro.

95. Quadratum autem binomii $x^2 + 2ax + a^2$ continebit quadratum primi termini, bina producta ex primo, & secundo, ac quadratum secundi. Cubus

bus $x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$, continebit cubum primi termini, triplum productum ex quadrato primi & secundo, triplum productum ex primo & quadrato secundi, ac cubum secundi, & ita porro ejusmodi canones pro reliquis potentiis erui possunt.

96. Notandum præterea cubum quantitatis mixtæ ex reali, & imaginaria posse evadere realem. Quantitatis $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ cubus evadit $=+1$. Nam cubus $-1=-1$, tria quadrata $-1=+3$ ducta in $\sqrt{-3}$ sunt $=3\sqrt{-3}$, quadratum $\sqrt{-3}$ $=-3$, adeoque tria ejusmodi quadrata ducta in -1 sunt $=+9$, cubus $\sqrt{-3}=-3\sqrt{-3}$. Quare cubus $-1+\sqrt{-3}=-1+3\sqrt{-3}+9-3\sqrt{-3}=8$, & cubus $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ $=\frac{8}{8}=1$. Ac simili pacto cubus $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}=$ $\frac{-1-3\sqrt{-3}+9+3\sqrt{-3}}{8}=\frac{8}{8}=1$. Generaliter autem cubus $a\frac{(-1\pm\sqrt{-3})}{2}$ est a^3.

97. Inde vero eruitur cubi cujusvis a^3 haberi radicem tertiam realem a, & præterea binas alias radices imaginarias $a\frac{(-1+\sqrt{-3})}{2}$, $\frac{a(-1-\sqrt{-3})}{2}$. Quare etiam $\sqrt[6]{a^6}$, habebit sex radi-

ces, quarum binæ reales, quatuor imaginariæ; erit enim $= \sqrt[3]{\sqrt[2]{a^6}} = \sqrt[3]{\pm a^3}$; ac $\sqrt[3]{a^3}$, & $\sqrt[3]{-a^3}$: habebunt singulæ singulas radices reales, & binas imaginarias.

98. Si autem elevandum sit trinomium ad quamvis potentiam m, patet id fieri posse per eandem formulam $x + a$, dummodo primus e tribus terminis ponatur loco x, & reliqui duo loco a, eorum quadratum loco a^2 cubus loco a^3, & ita porro. Eodem pacto ad quadrinomia, & quævis polynomia progredi licet, ac series etiam quævis infinita elevari pariter poterit ad potentiam indefinitam m, dummodo primus ejus terminus ponatur pro x, ac reliqui omnes pro a. Adest etiam methodus generalis elevandi infinitinomium, quod certa lege progrediatur, ad potentiam indefinitam m, inveniendo statim quemlibet terminum, sed hæc Tyronibus abunde est indicasse.

99. Illud unum addi potest, formulam generalem, qua binomium elevatur ad quamvis potentiam m, & quam demonstravimus, pro casu quovis, in quo m sit numerus integer, & positivus, habere locum etiam si exponens potestatis sit numerus negativus, quo casu, ut vidimus, exprimitur divisio, vel in quo m sit numerus fractus, quo casu exprimuntur radices. Demonstratio tamen accurata ejus applicationis est multo operosior, quam ut hic videatur inserenda. Tyroni sufficiet exemplum potentiæ cujusvis habentis exponentem integrum, & positivum ex quo rite demonstrato, per analogiam quandam transibit ad reliquos casus.

100. Et

100. Et quidem, quod pertinet ad exponentem negativum, ex applicatione formulæ $\overline{x+a}^m = x^m + \frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times a^2 x^{m-2}$ &c., oritur etiam quotus illius fractionis $\frac{a}{b+c}$, quem §. 3. num. 63. eruimus per seriem $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3}$ &c. Nam $\frac{1}{b+c} = \overline{b+c}^{-1}$. Quare si in formula $\overline{x+a}^m$ ponatur $x = b$, $a = c$, $m = -1$, erit $\frac{m}{1} = -1$, $\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2} = \frac{-1}{1}\times\frac{-2}{2} = +1$, $\frac{m}{1}\times\frac{m-1}{2}\times\frac{m-2}{3} = \frac{-1}{1}\times\frac{-2}{2}\times\frac{-3}{3} = -1$, & ita porro, ac proinde $\overline{b+c}^{-1} = b^{-1} - b^{-2}c + b^{-3}c^2$ &c., sivè $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3}$ &c., & demum $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3}$, & ita porro prorsus, ut supra per divisionem actualem fuerat inventum. Applicationis autem ad exponentes fractos usum præstantissimum videbimus binis sequentibus §§.

De

§. V.

De radicibus earundem.

101. EXtractio radicum oritur a consideratione potentiarum. Ordiemur a radice quadrata. Ordinata quantitate proposita secundum potentias cujuspiam litteræ, extrahatur radix quadrata ex primo termino, & scribatur e regione ipsius, ac ejus radicis quadratum subtrahatur e quantitate proposita, tum per duplum radicis jam inventæ diviso primo termino residui quantitatis propositæ, & scripto quoto prope radicem jam inventam pro secundo ipsius radicis termino, multiplicetur is quotus per se, tum per duplum radicis antea inventæ, & subtrahatur id productum a residuo illo quantitatis propositæ. Primus terminus novi residui dividatur per duplum primi termini radicis jam inventæ, scribatur novus quotus in radice ipsa, ducatur in sextum in duplum radicis totius prius inventæ, fiat subtractio, ut prius, & ita porro peragatur semper, donec vel nihil supersit, vel per seriem quandam abeatur in infinitum.

107. Sit extrahenda radix quadrata e quantitate $y^4 + 2by^3 + b^2y^2 + 2cy + c^2$. Ordinata quantitate operatio instituetur, ut hic infra.

$$y^4 + 2by^3 + b^2y^2 + 2bcy + c^2 \;\Big|\; y^2 + by + c$$

$$\underline{y^4 \qquad\quad + 2cy^2}$$

$$+2by^3 + b^2y^2 + 2bcy + c^2$$

$$+ 2cy^2$$

$$\underline{+2by^3 + b^2y^2}$$

$$+2cy^2 + 2bcy + c^2$$

$$\underline{+2cy^2 + 2by + c^2}$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0$$

103. Nimirum extracta radice ab y^4 habetur y^2, cujus quadrato y^4 subtracto a quantitate proposita; primus residui terminus est $2by^3$, quo diviso per $2y^2$ habetur by, quod si ducatur in $2y^2$, & in se, fit $2by^3 + b^2y^2$, quo subtracto primus terminus residui $2cy^2$ divisus per $2y^2$ relinquit $+c$, & eo ducto in $2y^2 + 2by$, & in se, ac facta subtractione nihil superest. Quamobrem radix quæsita est ipsa illa quantitas $y^2 + by + c$.

104. In sequenti autem exemplo progredi licet in infinitum. Verum hæc series, quæ oritur ex extractione radicis plurimum differt ab illa, quæ ex divisione oritur. Illa enim terminos habet in geometrica

metrica progressione dispositos, ac proinde facile summari potest. In hac progressionis lex cito turbatur.

$$\begin{array}{l|l} y^2 + b^2 & y + \frac{b^2}{2y} - \frac{b^4}{8y^3} + \frac{b^6}{16y^5} - \frac{5b^8}{128y^7} \\ y^2 & \\ \hline +b^2 & \\ +b^2 + \frac{b^4}{4y^2} & \\ \hline -\frac{b^4}{4y^2} & \\ -\frac{b^4}{4y^2} - \frac{b^6}{8y^4} + \frac{b^8}{64y^6} & \\ \hline +\frac{b^6}{8y^4} - \frac{b^8}{64y^6} & \\ +\frac{b^6}{8y^4} + \frac{b^8}{16y^6} - \frac{b^{10}}{64y^8} + \frac{b^{12}}{256y^{10}} & \\ \hline -\frac{5b^8}{64y^6} + \frac{b^{10}}{64y^8} \text{ \&c.} & \end{array}$$

105. Demonstratio methodi pendet a formula quadrati $\overline{x+a}^2 = x^2 + 2ax + a^2$. Inventa enim aliqua radicis parte, quae dicatur x, & subtracto ejus

ejus quadrato ; ad inveniendam aliam a, primus terminus residui dividendus est per $2x$, cum debeat deinde posse subtrahi $2ax+a^2$. Ea secunda pars inventa ducenda est in $2x$ & in se, ut habeatur illud ipsum $2ax+a^2$ subtrahendum, quo nimirum subtracto post subtractum quadratum x^2 primæ partis, subtractum jam est quadratum totius summæ $x+a$. Eodem autem pacto progressus fit habendo semper pro x totam radicis partem jam inventam, & pro a novum terminum quæsitum, ac si nihil supersit, detracto quadrato radicis inventæ, oportet ipsa quantitas inventa sit radix quadrata quantitatis propositæ accurata, secus ad eam in infinitum acceditur, ubi residui termini in infinitum decrescant, & series satis convergat.

106. Hinc autem facile fit gradus ad extractionem radicis cubicæ considerata formula $\overline{x+a}^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$. Nimirum extracta radice ex primo termino, & subtracto cubo, dividendus est primus residui terminus per triplum quadratum prioris partis, nempe ob $3ax^2$ adhibendum pro inveniendo a, dividendus est per $3x^2$. Tum novus terminus ducendus in triplum quadratum radicis jam inventæ, deinde ejus quadratum in triplam ejusmodi radicem, ac demum faciendus ejus cubus, & tota hæc summa subtrahenda : nimirum oportet subtrahere $3ax^2 + 3a^2x + a^3$. Generaliter autem pro radice m dividendus est primus terminus residui per potentiam $m-1$ primi termi-

termini radicis jam inventæ ductam in m; ac si tota radix prius inventa dicatur x, ac nova pars exhibita ab eo quoto dicatur a, subtrahendum erit

$$\frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3}$$

&c. Exhibebimus exemplum radicis cubicæ tantummodo:

$$\underline{| y^2 + by + c}$$

$$y^6 + 3by^5 + 3b^2y^4 + b^3y^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3$$
$$+ 3cy^4 + 6bcy^3 + 3c^2y^2;$$

$$\underline{y^6}$$

$$+ 3by^5 + 3b^2y^4 + b^3y^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3$$
$$+ 3cy^4 + 6bcy^3 + 3c^2y^2$$
$$\underline{+ 3by^5 + 3b^2y^4 + b^3y^3}$$

$$+ 3cy^4 + 6bcy^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3$$
$$+ 3c^2y^2$$
$$+ 3cy^4 + 6bcy^3 + 3b^2cy^2 + 3bc^2y + c^3$$
$$\underline{+ 3c^2y^2}$$

$$0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0$$

107. Radix cubica termini y^6 est y^2, cujus cubo subtracto, primus terminus residui est $3by^5$. Is divisus per triplum quadratum y^2, sive per $3y^4$ exhibet $+by$ pro secundo radicis termino. Triplum quadratum ipsius y^2 ductum in by, est $3by^5$, triplum y^2 ductum in quadratum by est $3b^2y^4$, cubus by est b^3y^3. Quare subtrahendum $3by^5+3b^2y^4+b^3y^3$. Primus terminus novi residui est $3cy^4$, radicis jam inventæ y^2+by quadratum habet pro primo termino y^4, ac diviso illo $3cy^4$ per hujus triplum $3y^4$, remanet c pro postremo radicis quæsitæ termino. Triplum quadratum radicis y^2+by ductum in c est $3cy^4+6bcy^3+3b^2cy^2$, triplum ipsius y^2+by ductum in c^2 est $3c^2y^2+3bc^2y$, ac ejus cubus c^3 quibus subtractis, nullum jam habetur residuum.

108. Ubi autem residuum aliquod semper supersit, potest continuari series in infinitum. Potest autem, ut supra monuimus, adhiberi etiam series illa generalis binomii elevati ad potentiam m, in qua facto $m=\frac{n}{r}$, pro $\overline{x+a}^{m} = x^{m} + \frac{m}{1} \times a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2}$ &c. habebitur

$\overline{x+a}^{\frac{n}{r}}$

$$\overline{x-a}^{\frac{n}{r}} = x^{\frac{n}{r}} + \frac{n}{r}\, a x^{\frac{n-r}{r}} + \frac{n}{r} \times \frac{n-r}{2r} \times a^2 x^{\frac{n-2r}{r}} \text{ \&c.}$$

109. Ejus formulæ ope, si ex quavis quantitate eruenda sit radix quæcunque, tertia, quarta, quævis, primus ejus terminus ponatur pro x, summa reliquorum omnium pro a, 1 pro n, 3, 4, vel quivis alius radicis exponens pro r, & habebitur series exprimens eam radicem, quæ series nunquam abrumpi poterit, si $\frac{n}{r}$ sit fractio; ipsum enim r non metietur illum numerum n, adeoque nullus terminus seriei $n-r$, $n-2r$, $n-3r$ &c. poterit esse $=0$.

§. VI.

De applicatione earundem formularum ad extractionem radicum in numeris.

110. Radices in numeris extrahi possunt ferè eodem pacto, quo eas in calculo litterali eruimus. Quæritur radix per partes. Inventa una parte, & subtracta ejus potentia, ad inveniendam partem novam instituitur divisio, in radice secunda per duplam ipsam radicem, in tertia per triplum ejus quadratum, & generaliter dicta parte jam inventa x, invenienda a, radicis exponente m, fit divisio residui per mx^{m-1} ad inveniendum a, tum efformatur per multiplicationem, in radice quadra-

ta $2ax + a^2$ in cubica $3ax^2 + 3a^2x + a^3$, generaliter $\frac{m}{1} \times ax^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2}$ &c. ....: $+ a^m$. Sed natura numerorum se per decades excedentium quædam suppeditat ad faciliorem partium se succedentium inventionem, qua subtractiones illæ fieri possint, ita ut nihil supersit in fine, ubi radix accurata extrahi potest, supersit autem quantitas in infinitum decrescens, ubi non potest, & semper ad verum valorem accedatur, quantum licet. Sed methodus ipsa exemplis illustrabitur magis, quam præceptis.

111. In primis incipiendo a puncto distinguente numeros integros a fractionibus decimalibus, & procedendo retrorsum dividatur numerus propositus in classes quasdam, quarum singulæ contineant tot notas, quot unitates habet exponens radicis, in radice quadrata binas, in cubica ternas, & ita porro; primæ autem classi relinquantur, quæ supersunt, quotcunque fuerint, vel eodem numero, vel infra ipsum. Radix quæsita continebit totidem notas integrorum, quot fuerint eorum classes. Si è numero 143877824. extrahenda sit radix quadrata, dividendus erit in classes hoc pacto 1, 43, 87, 78, 24. & debebit habere ipsa radix notas quinque: si extrahenda sit radix quinta, dividendus erit in classes hoc pacto 1438, 77824., & debebit radix ipsa habere notas duas. Fractiones autem decimales eodem pacto in classes dividuntur, incipiendo a puncto, & progrediendo a notis superioribus ad inferiores. Numerus 143877.824 pro radice quadrata dividendus

dus esset sic 14, 38, 77. 82, 4, pro tertia sic 143, 877. 824, & haberet in radice secunda integrorum notas tres, in tertia duas: classes autem decimalium adjectis cyphris quotcunque in infinitum continuari possunt.

112. Demonstratio petitur ex eo, quod quævis potentia *m* unitatis conjunctæ cum quotcunque cyphris, multiplicat ipsum numerum cyphrarum per *m*. Potentia tertia numeri 100 habentis cyphras duas est 1000000, quæ habet cyphras $2 \times 3 = 6$. Hinc incipiendo a quadrato, quadratum numeri 10 est 100, numeri 100 est 10000, numeri 1000 est 1000000. Quare numerorum inter 0 & 10 unica nota constantium quadrata continentur inter 0 & 100, adeoque constant minus quam tribus notis, numerorum inter 10 & 100 constantium binis notis quadrata continentur inter 100 & 10000, adeoque constant notis pluribus quam binis, & paucioribus quam quinque, & ita porro. Numerorum autem inter 0 & 10 cubi sunt inter 0 & 1000, numerorum inter 10, & 100 cubi sunt inter 1000 & 1000000, adeoque pro quovis notarum numero *m* cubus debet habere numerum notarum, qui divisus per ternas notas in classes, reddat numerum classium *m*, & eadem est demonstratio pro altioribus potentiis, quæ non difficulter transfertur ad fractiones decimales, cum quadratum $\frac{1}{10}$ sit $\frac{1}{100}$ cubus $\frac{1}{1000}$, quadratum $\frac{1}{100}$ sit $\frac{1}{10000}$, cubus $\frac{1}{1000000}$ & ita porro.

 113. Jam

113. Jam ad ipſas radices extrahendas habeantur præ manibus potentiæ numerorum unica nota conſtantium, quæ habentur in tabella ſequenti, quæ continuari poteſt quantum libet.

I.	II.	III.	IV.	V.
1	1	1	1	1
2	4	8	16	32
3	9	27	81	243
4	16	64	256	1024
5	25	125	625	3125
6	36	216	1296	7776
7	49	343	2401	16807
8	64	512	4096	32768
9	81	729	6561	59049

114. Sit jam extrahenda radix quadrata numeri 178929. Eo diviſo in claſſes continentes binas notas, prima claſſis, quæ hic binas continet (poterat autem continere etiam unicam) eſt 17. Accipiatur ejus radix proxime minor, quoniam accuratam non habet, quæ ſi adeſſet, aſſumi deberet, ac

eſt 4.

est 4, quæ nimirum erit prima nota radicis quæsitæ. Notetur, ejusque quadratum 16 subtrahatur a prima ipsa classe 17, ac prope residuum 1 scribatur classis secunda 89, ut fiat 189.

115. Secunda nota debet esse ejusmodi, ut ex ipso residuo aucto 189 detrahi possit ejus quadratum, ac duplum productum ex ipsa & prima parte, nimirum ut dicta prima parte x, nota nova a, detrahi possit $2ax + a^2$. Porro ex ipsa decadica numerorum natura unitates contentæ in parte præcedenti sunt decies majores unitatibus contentis in nota nova adjicienda, & ad homogeneitatem reducuntur, si parti præcedenti addatur cyphra o. Quare debebit posse subtrahi productum ex nota nova, & duplo partis jam inventæ auctæ cyphra o, ac ipsius notæ novæ quadratum. Quæratur igitur quoties duplum radicis jam inventæ, & auctæ cyphra o, nimirum hic 80 contineatur in residuo illo aucto nova classe, nimirum in 189, ita tamen, ut supersit pro quadrato ipsius numeri vicium, ut hic continetur bis, ac remanet 29, quod sufficit pro 4, quadrato numeri vicium 2. Numerus hic 2, hoc pacto inventus, erit secunda nota radicis quæsitæ. Ducatur in duplum primæ partis inventæ, & auctæ cyphra o, nimirum in 80, & habebitur 160, assumatur ejus quadratum 4, ac summa utriusque 164 dematur ab illo residuo 189, ut habeatur novum residuum 25, prope quod notetur postrema classis 29, ut fiat 2529.

116. Eodem pacto sequens nota invenietur quærendo quoties duplum partis jam inventæ 42, & auctæ cyphra, nimirum 840 contineatur in novo resi-

residuo 2529 ita tamen, ut supersit pro quadrato hujus numeri vicium, ut hìc continetur ter, ac supersunt 9, quod sufficit pro quadrato numeri 3. Hic numerus, hoc pacto inventus, erit nova nota radicis quæsitæ, quo ducto in duplum illud 840, unde provenit 2520, ac assumpto 9 quadrato ipsius 3, dematur 2520+9, sive 2529 a residuo illo aucto nova classe, quod cum pariter fuerit 2529 ita, ut nihil supersit, nec aliæ classes reliquæ sint; radix inventa 423 est accurata radix numeri propositi.

117. Si autem aliquod residuum superesset, & aliæ adessent classes, continuanda esset operatio, investigando semper, quoties duplum partis jam inventæ auctum cyphra o contineatur in residuo aucto nova classe ita tamen, ut supersit pro quadrato ipsius numeri vicium, tum summa producti ex numero ipso vicium, & parte radicis jam inventa, ac quadrati numeri ejusdem detrahenda a residuo ipso aucto illa nova classe, & si aliquod residuum haberetur demum, ubi classis nulla superest, adjectis binis cyphris ipsi residuo, sive binis decimalibus, si decimales fractiones adfuissent in numero proposito, progressus fieret ad decimales fractiones radici addendas.

118. Methodus universa innititur formulæ $\overline{x+a}^2 = x^2 + 2ax + a^2$, & decadicæ numerorum naturæ, redacta semper parte jam inventa ad homogeneitatem cum invenienda per additionem cyphræ o. Sed ipsa hæc numerorum, quibus utimur, natura decadica, ut diximus compendia quædam suppeditat.

119. In

119. In primis cyphræ adjectio omitti potest, & res eodem redibit, si quæratur quoties duplum partis radicis jam inventæ contineatur in residuo aucto nova classe, sed mulctato postrema nota, ita tamen, ut quod superest conjunctum cum nota omissa sufficiat pro quadrato notæ quæsitæ. Idem enim est quærere quoties 80 contineatur in 189, & videre an residuum 29 sufficiat pro 4 quadrato numeri vicium 2, ac quærere quoties 8 contineatur in 18, & videre, an residuum 2 conjunctum cum nota 9, sive idem illud 29 sufficiat pro quadrato 2. Satis igitur erit semper supra partem radicis jam inventam scribere ejus duplum, & residuum auctum nova classe, sed mulctatum postrema nota dividere per hoc duplum, ita tamen, ut residuum habitum pro decadibus, & conjunctum cum nota omissa sufficiat pro quadrato numeri vicium: ac pariter satis erit ipsum numerum vicium ducere primum in se, tum in illud duplum, & productum ex utroque simul conjuncto subtrahere, cum idem sit ducere 2 in 80+2, ac ducere in 82.

120. Demum ubi jam plures radicis notæ inventæ sunt, nimis prolixa, & molesta est investigatio numeri vicium, quo ejus duplum continetur in illo residuo ita, ut supersit pro quadrato novæ notæ. Plerunque autem cum nova illa nota partem contineat ex ipsa numerorum natura multo minorem partẽ jam inventa, quod superest in illa investigatione numeri vicium, sufficit etiam pro quadrato notæ novæ. Quare satius est in investigando, quoties illud duplum contineatur in illo residuo mulctato illa postrema nota, conferre primas illius binas notas tantummo-

tummodo cum primis binis, vel ternis hujus, prout in hoc habebuntur totidem notæ, quot in illo, vel plures, nec quidquam cogitare de reliquis, ac de quadrato novæ notæ. Si enim forte residuum non suffecerit, patebit id ipsum ex eo, quod productum ex nota nova in se, & in duplum illud erit majus residuo ipso, a quo subtrahi deberet, & eo casu assumenda erit nota nova unitate minor, & iteranda multiplicatio. Satius enim erit aliquando operationem iterare, quod raro eveniet, quam semper molestam illam residuorum investigationem instituere.

121. Atque hinc quidem patent, quæcunque in Arithmetica proposuimus pro praxi extrahendæ radicis quadratæ, quorum singulorum rationem hinc depromptam facile admodum Tyroni Præceptor indicabit, quam nimirum ibi omiseramus reservatam in hunc locum.

122. Pro radice cubica methodus est admodum similis, & innititur iisdem principiis. Extrahenda ea sit e numero 143877824. Eo diviso in classes per ternas notas, incipiendo a fine, prima classis, quæ poterat etiam continere unicam notam, vel binas, continet notas tres 143. Quæratur hujus radix cubica proxime minor, cum accurata non adsit, eritque 5, quæ erit prima nota radicis quæsitæ. Hujus cubus 125 subtrahatur a prima classe 143. & prope residuum 18 scribatur secunda classis 877, ac habebitur 18877.

123. Addita jam parti inventæ 5 cyphra 0, fiat ejus quadratum 2500, quod triplicetur, quæraturque, quot vicibus hoc triplum quadratum 7500 ingrediatur in illud residuum auctum 18877 compa-

rando

rando pariter primas notas tantum. Hic habebitur 2, quæ erit sequens radicis nota, si modo triplum quadratum partis inventæ & auctæ cyphra o ductum in ipsam notam novam, cum triplo hujus quadrato ducto in ipsam primam partem, ac una cum ejusdem notæ cubo, nimirum illud $3\,ax^2 + 3\,a^2\,x + a^3$, non fuerit majus residuo, quo casu minuenda esset unitate nota inventa, donec deveniretur ad ejusmodi trium quantitatum summam non majorem residuo ipso. In exemplo adducto ducatur illud triplum quadratum 7500 in hanc notam 2, & habebitur 15000, tum triplum hujus quadratum 12 in primam partem radicis 50, & habebitur 600, ac demum capiatur ejus cubus 8 e tabella, & colligatur summa horum trium numerorum $15000+600+8=15608$; & quoniam hæc summa non est major illo residuo aucto 18877; nota hæc nova adscribatur radici jam inventæ 5, & hæc summa detrahatur ab illo residuo, ac habebitur 3269, cui adscripta classe sequenti 824, novum residuum auctum jam erit 3269824.

124. Iterum addita toti parti jam inventæ 52 cyphra o, factoque ejus quadrato 270400, quæratur quoties ejus triplum 811200 ingrediatur residuum novum auctum 3269824, & comparando solas priores notas invenitur 4. Ducto 4 in illud triplum quadratum 811200 habetur 3244800: ejusdem 4 triplum quadratum 48 ducatur in partem radicis jam inventam auctam cyphra 520, & habebitur 24960, capiatur demum 64 cubus ipsius 4, & quoniam eorum trium numerorum summa 3269824 non est major residuo illo, quod pariter erat 3269824, ipsa illa nota 4 erit adscribenda radici.

Cum

Cum vero è subtractione ejus summæ a residuo nihil supersit & nulla alia adsit classis deprimenda; ipse numerus 524 est accurata radix cubica numeri propositi. Si quid superesset liceret ternis adjectis cyphris progredi ad notas decimales per approximationem eadem semper methodo.

125. Pro altioribus radicibus methodus est prorsus eadem, sed pro quinta ex: gr:, diviso numero in classes constantes quinis notis, extracta radice vera, vel proximè minore primæ classis, subtracta quinta potentia, & adscripta sequenti classe prope residuum, oporteret partis inventæ, & auctæ cyphra o efformare quartam potentiam, tum per quartæ potentiæ quintuplum dividere residuum illud auctum, & cum formula quintæ potentiæ $x + a$ fit $x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5$, oporteret quintuplum quartæ potentiæ partis jam inventæ, & auctæ cyphra ducere in notam novam, decuplum tertiæ potentiæ illius in secundam hujus, decuplum secundæ illius in tertiam hujus, quintuplum illius in quartam hujus, ac assumere quintam hujus potentiam, & summam horum quinque numerorum detrahere ab illo residuo aucto, si liceret; & ita generaliter pro divisore ad inveniendam novam notam radicis m adhibere oportet mx^{m-1}, dicta x parte jam inventa, tum detrahere $\frac{m}{1}ax^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2x^{m-2}$ &c. $\ldots + a^m$, dictâ a notâ inventâ;

126. Por-

126. Porro in divisione adhibetur tantummodo $m x^{m-1}$, quia eo pacto residuum omnino sufficiet pro subtractione primi termini $m a x^{m-1}$. Is autem est multo major reliquis omnibus simul sumptis, potissimum ubi jam x constat pluribus notis, ac ex ipsa decadica numerorum natura pluribus vicibus superat ipsum a, ut in radice quadrata monuimus. Quamobrem plerunque, quod supererit primo termino, sufficiet pro reliquis; ac si forte non suffecerit, id ipsum indicabitur ab illa summa subtrahenda, quæ ipso residuo major obveniet, & remedium notæ minuendæ est admodum in promptu.

127. Ubi exponens radicis est numerus divisibilis in duos factores, satius est extrahere prius radicem expositam ab altero, tum ex ea radice jam extracta extrahere radicem ab altero expositam. Sic si radix quarta extrahenda sit, satius est extrahere prius radicem secundam, tum ex ea iterum secundam: si sextam oporteat extrahere, satius est extrahere prius tertiam, tum ex ea secundam.

128. Hæ quidem methodi ad radicem omnino perducunt vel accuratam si adsit, vel proximam: at quo plures notæ jam inventæ sunt, & quo altiores radices oportet extrahere, eo magis crescit labor in immensum. Multo expeditiores habentur methodi, & quæ multo citius convergunt, sed innituntur altioribus fundamentis. Unam hìc addemus, quæ profluit ex formula binomii $x + a$ elevati ad potentiam indefinitam, & translati ad potentias fractionarias, sive ad radices.

129. Por-

129. Formula erat $x^m + \frac{m}{1} a x^{m-1} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times a^2 x^{m-2} + \frac{m}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times a^3 x^{m-3}$ &c. In ea patet, quemvis terminum sequentem componi ex præcedenti, adjecto unciæ numericæ uno ex terminis seriei $\frac{m}{1}$, $\frac{m-1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ &c., adjecta exponenti a unitate, & ablata ab exponente x. Secundus terminus continet primum ductum in $\frac{m}{1} \times \frac{a}{x}$ tertius secundum ductum in $\frac{m-1}{2} \times \frac{a}{x}$, & ita porro.

130. Hinc si ponatur P pro x, PQ pro a, adeoque Q pro $\frac{a}{x}$ totus primus terminus dicatur A, secundus B, tertius C &c., habebitur sequens formula.

$$\overline{P+PQ}^m = P^m + \frac{m}{1} AQ + \frac{m-1}{2} BQ + \frac{m-2}{3} \times CQ \text{ \&c.}$$

Posito autem $\frac{1}{r}$ pro m habebitur $\overline{P+PQ}^{\frac{1}{r}}$

$$= P^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{r} AQ + \frac{1-r}{2r} BQ + \frac{1-2r}{3r} CQ \text{ \&c.}$$

131. Hæc formula applicabitur numeris ita, ut assumatur aliqua potentia accurata ejus exponentis, cujus radix quæritur, proxima numero proposito, quæ dicatur P: ea subtracta a numero proposito resi-

residuum dicatur PQ, quod erit positivum, vel negativum, prout potentia assumpta fuerit minor, vel major numero proposito: ipso autem residuo PQ diviso per potentiam assumptam P, habebitur valor Q pariter positivus, vel negativus, qui eo erit minor, quo potentia assumpta fuerit propior numero proposito. Jam vero in ipsa formula primus terminus $P^{\frac{1}{r}}$ erit cognitus, radix nimirum potentiæ assumptæ, adeoque dabitur A. Quare secundus terminus jam habebitur habito r, A, Q, qui terminus cum sit B, habebitur ejus ope tertius, & ita porro: & siquidem valor Q fuerit satis exiguus, series citissimè converget, terminis perpetuo plurimum decrescentibus.

132. Ad inveniendam autem potentiam proximam numero dato, satis est quærere aliquot radicis notas accuratas, & ad usus, qui solent occurrere, satis est invenire binas, quæ præcedenti methodo admodum facile inveniuntur, tum radicis ita inventæ efformare potentiam, quæ proposito numero erit satis proxima.

133. Quoniam autem valor Q vix unquam habebitur accuratus, & fractiones minores contemnendæ sunt, cavendum, ut in eo assumantur tot notæ decimalium, quot notæ accuratæ tum integrorum, tum decimalium requirantur in radice, ne in multiplicatione ipsius Q per A in termino seriei secundo error notarum contemptarum plus æquo ascendat multiplicatus & ipse per A, ac una nota addatur præterea, ne errores collecti ex fine singulorum terminorum seriei ad sedem adhuc superiorem

assurgant, quod satis erit ad id cavendum, ubi non plures, quam decem termini assumi debeant, qui semper assumendi erunt multo pauciores, si valor Q fuerit satis exiguus. In ipsis autem multiplicationibus labor contrahetur mirum in modum, si eæ decimalium notæ quæ deinde rejiciendæ sunt in producto, negligantur jam prius inter multiplicandum, quo pacto posteriores termini semper multo facilius definientur.

134. Methodus autem, multo magis manifesta fiet exemplis. Pro radice cubica substituendum est 3 pro r, ac ob $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, $\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$ series erit $\overline{P+PQ}^{\frac{1}{3}}$

$$=P^{\frac{1}{3}}+\frac{1}{3}AQ-\frac{1}{3}BQ-\frac{5}{9}CQ-\frac{2}{3}DQ$$

$$-\frac{11}{15}EQ \&c.$$

135. Proponatur numerus 74394516, cujus quæratur radix accurata per 6 notas. Primæ classis 74 radix cubica proximè minor est 4, cujus cubo 64 inde ablato, relinquitur 10, & adjecta sequenti classe 394, fit 10394. Numeri autem 4 aucti cyphra 0 quadratum est 1600, ejusque triplum 4800, per quod diviso 10394, habetur 2. Assumantur igitur 42 pro primis notis, & adjecta cyphra una ob sequentem classem, numeri 420 cubus 74088000 sit P, quo ablato a numero proposito 74394516, relinquetur 306516 pro PQ, eoque diviso per P, habebitur Q = 0.0041372, ubi assumendæ sunt notæ decimales septem, cum quærantur sex notæ accuratæ in radice.

136. Jam

136. Jam vero erit $A = P^{\frac{1}{3}} = 420$. $B = \frac{1}{3} AQ = \frac{1}{3} \times 420 \times 0.0041372 = 0.57921$, $C = -\frac{1}{3} BQ = -\frac{1}{3} \times 0.57921 \times 0.0041372 = -0.00080$; unde facile patet fore $D = 0.00000$; ac proinde radix quæsita $= A + B + C = 420. + 0.57921 - 0.00080 = 420.57841$, in qua tamen radice priores tantum sex notæ pro certo accuratis haberi possunt.

137. Si pro primo valore $P^{\frac{1}{3}}$ assumptus fuisset numerus 430. vero major, obvenisset valor Q negativus; quo casu omnes termini post primum negativi evadunt, ut patebit in hoc ipso exemplo, ubi tamen ob numerum 430. aliquanto remotiorem a vero, valor Q obvenit aliquanto major, & series convergit serius. Invenietur tamen radix quæsita post plures seriei terminos omnino congruens cum priore.

138. Erit autem $A = P^{\frac{1}{3}} = 430$, P cubus ejus numeri $= 79507000$, $PQ = 74394516 - 79507000 = -5112484$, $Q = \frac{-5112484}{79507000} = -0.0643023$, $B = \frac{1}{3} AQ = \frac{1}{3} \times 430 \times -0.0643023 = -9.21666$, $C = -\frac{1}{3} BQ = -\frac{1}{3}$

$x - 9.21666x - 0.0643023 = -0.19755$

$D = -\frac{5}{9} CQ = -\frac{5}{9} x - 0.19755 x -$

$0.0643023 = -0.00705$, $E = -\frac{2}{3} DQ = -$

$\frac{2}{3} x - 0.00706 x - 0.0643023 = -0.00030$,

$F = -\frac{11}{15} EQ = -\frac{11}{15} x - 0.00030 x -$

0.0643023 = —0.00001. Quare radix quæsita 430. — 9.21666 — 0.19755 — 0.00706 — 0.00030 — 0.00001 = 420.57842, quæ cum prius inventa 420.57841 usque ad priores quatuor decimalium notas prorsus convenit, & in quinta nota unitate tantum differt.

139. Quod si quis velit plures notas certas, satius esset invenire prius methodo indicata pauciorem notarum numerum certum, tum radicis jam satis approximatæ cubum iterum dicere P, & novo Q invento, qui esset admodum exiguus, haberetur series convergentissima, ac paulo diligentius ipsam seriei naturam contemplantibus patebit, si radix assumpta $P^{\frac{1}{3}}$ sit accurata per numerum notarum b, debere in valore Q post punctum prodire saltem numerum cyphrarum $b - 1$, & totidem saltem notas certas additur os singulos terminos seriei novos. Sic in priori exemplo, ubi pro radice assumptus fuerat numerus 420, in quo omnes tres notæ erant accuratæ, valor Q prodiit 0.0041 &c. habens post punctum binas cyphras; in posteriore, in quo radix assumpta

sumpta 430 solam primam accuratam habuit, & secundam accuratæ quam proximam, in valore Q = 0.06 &c. vix unica post punctum cyphra est habita.

140. Ut methodus restituti calculi exemplo illustretur, quæratur ejusdem numeri radix accurata per notas 20. Assumpto pro radice, sive pro valore $A = P^{\frac{1}{3}}$ numero jam invento 420 . 578, erit P = 74394298 . 738940552. Eo numero ablato a 74394516, relinquetur PQ = 217 . 261059448, & hoc diviso per P, evadit Q = 0.00000292039931998549 8, ubi post punctum obvenerunt cyphræ 5 iccirco, quod in radice assumpta 420 . 578 sex notæ accuratæ sunt; notæ verò decimalium assumptæ sunt 21, cum radix quæratur accurata per notas 20. Singulis autem terminis saltem quinas determinantibus notas, quatuor tantum termini quæsitam radicem exhibebunt. Erit enim $A = P^{\frac{1}{3}} = 420 . 578$, $B = \frac{1}{3} AQ =$ 0.000409418568400287, $C = -\frac{1}{3} BQ = -$ 0.00000000039855 5236, $D = -\frac{5}{9} CQ = +$ 0.000000000000000646, ubi cum pateat valorem sequentem debere addere saltem quinque alias cyphras, negligendus omnino est, & radix quæsita A+B+C+D erit = 420. 5784094181 6984440, omissa nimirum postrema minus certa, quæ esset 5, quæ omitti potest, vel ejus loco in præcedenti nota addi unitas, ut pro 40 fiat 41, quod semper fit, ubi prima e contemptis decimalium notis superat 5,

 cum

cum ea unitate addita, committatur error minor, quam si sequens major 5 penitus omittatur.

141. In sublimioribus potentiis methodus est prorsus eadem, dummodo in serie $\overline{P + PQ}^{\frac{1}{r}} = P^{\frac{1}{r}} + \frac{1}{r} AQ$ &c. ponatur pro r exponens radicis, nec quidquam operosior est methodus pro iis, quam pro inferioribus.

142. Hac methodo radix accurata, si qua sit, immediate non obtinetur. At indicabunt eam ipsi numeri radicis proximæ, vel enim in fine coibunt multæ cyphræ cum admodum exigua fractione, vel multæ notæ 999 &c., ac licebit efformare eam potentiam numeri, qui præcedit cyphras, vel qui præcedit notas illas novenarii, qui quidem numerus in postrema nota eas præcedente augendus est unitate, & siquidem ea fuerit accurata radix, potentia ipsa prodibit æqualis numero dato: ut si radix accurata esset 452, methodus exhiberet vel 451.000 &c. cum aliqua nota post plures cyphras, vel 451.9999 &c.

§. VII.

De generalibus æquationum proprietatibus.

143. ÆQuatio dicitur aggregatum terminorum habens interpositum signum æqualitatis, & ad æquationem devenitur exponendo conditiones problematum, ac ex solutione æquationum continentium quantitates incognitas mixtas cum cognitis, pendet solutio problematum ipsorum, e quibus profluxerunt. Si quæratur numerus cujus triplum cum

cum quarta ejus parte efficiat 26, posito numero quæsito $= x$, habebitur æquatio $3x + \frac{1}{4}x = 26$, vel si quærantur duo numeri, quorum summa 12, differentia 4, positis x & y pro binis numeris quæsitis, habebuntur binæ æquationes $x + y = 12$, $x - y = 4$. Sed etiam ubi nullæ incognitæ quantitates adsunt, æquatio haberi potest, ut $8 + 4 = 12$.

144. Bina æquationis membra dicuntur binæ ejus partes hinc inde a signo æquationis positæ. Potest autem esse membrum æquationis etiam cyphra o, cum nimirum in altero membro quantitates positivæ, & negativæ se mutuo destruunt. Sic $8 + 4 - 12 = 0$.

145. Ex natura æqualitatis patet, utrique membro addi, vel demi posse quantitatem eandem, vel binas quantitates æquales alteri alteram: itidem utrunque membrum multiplicari posse, vel dividi per eandem quantitatem, vel per binas æquales salva æqualitate. Inde autem eruuntur pro quavis æquatione sequentia theoremata.

146. Quicunque terminus ex altero æquationis membro transferri potest in alterum, mutato signo, salva æqualitate.

147. Si enim terminus erat in altero membro positivus, & utrinque auferatur, in illo priore elisus destruetur, in posteriore apparebit negativus: si autem sit negativus, & utrique addatur, ubi aderat, jam elisus evanescet, ubi non aderat, jam habebitur cum signo positivo.

148. Sit $8 + 4 = 12$; erit $8 = 12 - 4$; ablato enim utrinque 4, fit $8 + 4 - 4 = 12 - 4$.

149. Sit $8 = 12 - 4$; erit $8 + 4 = 12$; addito enim utrobique 4, fit $8 + 4 = 12 - 4 + 4$.

150. Ea translatio termini dicitur transpositio. In una e superioribus æquationibus erat $x + y = 12$, in altera $x - y = 4$: erit transponendo in illa $x = 12 - y$, in hac $x = 4 + y$.

151. Inde autem deducitur in quavis æquatione posse mutari omnia signa omnium terminorum, salva æqualitate. Si enim omnes termini ex altero membro transferantur in alterum, & viceversa, mutantur omnia terminorum omnium signa.

152. Si quis terminus per aliquam quantitatem multiplicatur, possunt omnes alii per eam dividi, & ea in illo termino omitti: & si erat divisus, possunt reliqui per eam multiplicari, & ea ibi pariter omitti.

153. Nam dividendo utrunque membrum per eam quantitatem in primo casu, & multiplicando in secundo, is terminus remanebit multiplicatus simul, & divisus per eandem, quæ proinde elidetur; reliqui autem termini, qui per eam non multiplicabantur, nec dividebantur, jam dividentur in primo casu, multiplicabuntur in secundo.

154. Sit $2 \times 3 + 8 = 14$: erit $3 + \frac{8}{2} = \frac{14}{2}$; quia erit $\frac{2 \times 3}{2} + \frac{8}{2} = \frac{14}{2}$.

155. Sit $\frac{8}{4} + 3 = 5$: erit $8 + 3 \times 4 = 5 \times 4$; quia erit $\frac{8 \times 4}{4} + 3 \times 4 = 5 \times 4$.

156. Utrun-

156. Utrunque membrum poterit ad quamvis potestatem elevari, vel ex utroque quævis radix erui salva æqualitate.

157. Patet ex eo, quod quantitatum æqualium, & potentiæ, & radices ejusdem exponentis æquales esse debent, cum illæ fiant per multiplicationem æqualium, hæ iterum ad eas potentias elevatæ illas restituant.

158. Sit $\sqrt{25} = 2 + 3$: erit $25 = \overline{2+3}^2$ & viceversa.

159. Ope horum theorematum potest quævis æquatio liberari ab omnibus fractionibus, multiplicando nimirum omnes terminos per productum ex omnibus denominatoribus.

160. In æquatione $\frac{8}{2} + \frac{25}{5} = 9$, multiplicando per 2×5, fit $5 \times 8 + 2 \times 25 = 2 \times 5 \times 9$, sive $40 + 50 = 90$.

161. Quod si aliqui e denominatoribus communes divisores habeant, ii possunt in ea multiplicatione non repeti, sed accipi semel tantum.

162. In æquatione $\frac{a}{bc} + \frac{d}{bf} = \frac{g}{fb}$, satis erit multiplicare per $bcfb$, & habebitur $afb + cdb = bcg$.

163. Si quævis quantitas, vel quantitatis cujusvis potentia quævis sit in aliquo termino æquationis, vel in pluribus, non vero in omnibus, utcunque multiplicata, vel divisa per alias quantitates, potest ea relinqui sola in altero membro sine ullo multiplicante, sive, quod idem est, potest haberi ejus valor per alios valores æquationis ipsius.

Libe-

Liberata enim a fractionibus quantitate, omnes termini, in quibus ea adest, possunt per transpositionem collocari in altero æquationis membro, reliquis omnibus collocatis in altero, tum hoc secundum membrum dividi per aggregatum omnium quantitatum eam multiplicantium in membro priore.

164. Sit æquatio $by^5 - \frac{c^5 x^2}{p} = \frac{mx^2 y^4}{q} + \frac{x^2 y^5}{r}$, in qua quæratur valor y^5 per alios ejus æquationis valores. Multiplicando per pqr, erit $bpqry^5 - c^5 qrx^2 = mprx^2 y^4 + pqx^2 y^5$, & transponendo $bpqry^5 - pqx^2 y^5 = mprx^2 y^4 + c^5 qrx^2$; ac dividendo per $bpqr - pqx^2$ fit demum $y^5 = \frac{mprx^2 y^4 + c^5 qrx^2}{bpqr - pqx^2}$

165. Hoc artificio potest semper solvi quodvis problema, quod exprimatur per unicam æquationem continentem unicam incognitam, eamque post demptas omnes fractiones, in quarum denominatore ea forte esset, elevatam ad eandem ubique potentiam: quod quamvis ad solutionem æquationum pertineat, tamen hic præmittimus, ut fructum aliquem laboris jam capiat Tyro, & ad ulteriora festinet alacrior.

166. In æquatione proposita num. 148. $3x + \frac{1}{4}x = 26$, multiplicando per 4, fit $12x + x = 104$; adeoque $x = \frac{104}{12+1} = \frac{104}{13} = 8$. Numerus autem

tem 8 problemati omnino satisfacit; nam ejus triplum 24 cum quarta ipsius parte 2 efficit 26.

167. Si quæratur numerus, cujus quadrans cum binis trientibus æquetur numero 132 per ipsum diviso, ep facto $= x$, erit $\frac{1}{4}x + \frac{2}{3}x = \frac{132}{x}$, & multiplicando per $3 \times 4 \times x$, fit $3x^2 + 8x^2 = 1584$; ac proinde $x^2 = \frac{1584}{3+8} = \frac{1584}{11} = 144$, adeoque extrahendo utrinque radicem $x = \pm\sqrt{144} = \pm 12$. Satisfacit igitur quæstioni tam $+ 12$, quam $- 12$. Et quidem est $\frac{1}{4} \times 12 + \frac{2}{3} \times 12 = 3 + 8$, & $\frac{132}{12} = 11$. Pariter $\frac{1}{4} \times -12 + \frac{2}{3} \times -12 = -3 -8$, ac $\frac{132}{-12} = -11$.

168. Eodem artificio e binis æquationibus continentibus quantitatem aliquam utcunque permixtam cum aliis, & elevatam ad quascunque potentias integrum exponentem habentes, potest ea quantitas eliminari, efformando tertiam æquationem, quæ ea prorsus careat.

169. Si in altera æquatione liberata a fractionibus eam quantitatem forte habentibus in denominatore, ipsa quantitas ad eandem, ubicunque adest, potentiam elevatur, id facile præstabitur capiendo ejus valorem in ea æquatione, & substituendo in alia.

170. In

170. In exemplo adducto num. 143 erat $x + y = 12$, $x - y = 4$. In priore capiendo valorem x erit $x = 12 - y$, quo substituto in posteriore erit $12 - y - y = 4$, sive $12 - 2y = 4$; unde etiam profluit ejus problematis solutio; jam enim valor y invenietur, cum transponendo debeat esse $12 - 4 = 2y$, sive $8 = 2y$, & dividendo per 2 fiat $4 = y$; unde ob $x = 12 - y$ fit $x = 12 - 4 = 8$. Ac proinde 8, & 4 sunt ii duo numeri, quorum summa 12, differentia 4.

171. Si sint æquationes $ax^2 + \frac{by^3}{x} = x^2 y$, & $mx^2 + nxy = a^3$ in priore multiplicando per x habetur $ax^3 + by^3 = x^3 y$; adeoque $ax^3 - x^3 y = -by^3$, & $x^3 = \frac{-by^3}{a-y}$, ac demum $x = y\sqrt[3]{\frac{-b}{a-y}}$. Hoc valore substituto in secunda æquatione fieret $my^2\sqrt[3]{\frac{b^2}{a^2 - 2ay + y^2}} + ny^2\sqrt[3]{\frac{-b}{a-y}} = a^3$.

172. Si autem ea quantitas ad plures dimensiones utrobique assurgit, eliminari poterit operosiore methodo, sed iisdem principiis innixo. Inveniatur in utraque valor maximæ potestatis illius incognitæ, qui in utraque fuerit ejusdem exponentis; bini ii valores erunt æquales inter se, & habebitur nova æquatio, quæ eandem quantitatem continebit minus elevatam. In hac autem nova æquatione inven-

invento pariter valore maximæ potentiæ, ea, & totum alterum membrum poterunt multiplicari per eandem illam quantitatem, & hoc pacto invenietur novus valor potentiæ illius prioris, qui æquatus alteri ex præcedentibus, reddet aliam æquationem continentem eandem quantitatem elevatam ad minorem potentiam: ut si binæ illæ æquationes habebant quartam potentiam quantitatis eliminandæ; jam habebuntur binæ æquationes, in quibus non assurget ultra tertiam. Si autem erant inæquales potentiæ, ut altera quarta, altera secunda, poterit hæc posterior multiplicari tota per illam quantitatem ita, ut evadat ejusdem quantitatis eadem potentia maxima in utraque æquatione. Eodem autem pacto e binis novis æquationibus potest deveniri ad alias binas continentes potentiam adhuc minorem, & ita porro, donec deveniatur ad duas continentes solam primam potentiam, cujus bini valores æquati inter se exhibebunt æquationem prorsus carentem illa quantitate.

173. Sint æquationes $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, $ex^3 + fx^2 + gxh = 0$, e quibus eliminare oporteat x. Quoniam utraque habet x^3 pro maxima potentia, capiatur in utraque ejus valor, eritque in prima $x^3 = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$, in secunda $x^3 = -\frac{fx^2 - gx - h}{e}$. Quare erit $-\frac{bx^2 - cx - d}{a} = -\frac{fx^2 - gx - h}{e}$, sive multiplicando per ae, & mu-

& mutando omnia signa, erit $ebx^2 + eex + ed = afx^2 + agx + ah$. In hac æquatione jam habetur tantum x^2, cujus valor haberi potest, cum transponendo fit $ebx^2 - afx^2 = agx - acx + ah - ed$, ac dividendo per $eb - af$, fiet $x^2 = \frac{agx - ecx + ab - ed}{eb - af}$.

Multiplicando autem per x utrobique, erit $x^3 = \frac{agx^2 - ecx^2 + abx - edx}{eb - af}$: erat $x^3 = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$.

Igitur erit $\frac{agx^2 - ecx^2 + abx - edx}{eb - af} = \frac{-bx^2 - cx - d}{a}$. Quare jam habentur binæ æquationes continentes potentiam x secunda non superiorem. Eadem methodo ex iis devenietur ad binas continentes primam tantum, ac demum ad æquationem ipsum x non continentem. Ac eodem pacto e binis continentibus potentiam decimam devenietur ad binas non excedentes nonam, tum ad alias binas non excedentes octavam, & ita porro usque ad binas continentes primam tantummodo, & ad unicam eo prorsus carentem.

174. Si autem fuissent æquationes $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$, & $fx^2 + gx + h = 0$, poterat hæc secunda multiplicari per x^2, & haberetur $fx^4 + gx^3 + hx^2 = 0$, ex quibus deveniretur ad

ad binas non excedentes potentiam tertiam, tum ad binas non excedentes secundam, & ita porro.

175. Methodus quidem est plerunque ita operosa, crescente terminorum numero, ut formulæ evadant penitus intractabiles; facile tamen patet generalem esse, & si debitus adhibeatur labor, debere semper omnino succedere. Patebit autem pluribus in locis, quanto usui id esse possit; interea alios ex illis iisdem theorematis colligamus fructus pertinentes ad expoliendam æquationem, nimirum ad methodos, quibus liberari ea possit ab irrationalitate, seu terminis radicalibus.

176. Potest aliquando æquatio liberari ab irrationalitate, sive a radicalibus per multiplicationem, & divisionem.

177. In æquatione $b\sqrt{ax}+\frac{c}{\sqrt{ax}}=d\sqrt{ax}$. Multiplicando per $\sqrt{ax}$ habetur $abx+c=adx$, vel dividendo per $\sqrt{ax}$ habetur $b+\frac{c}{ax}=d$.

178. In æquatione $b\sqrt[3]{ax^2}+\frac{c}{\sqrt[3]{a^5 x}}=d\sqrt[3]{a^7 x^5}$, multiplicando per $\sqrt[3]{a^5 x}$, habetur $b\sqrt[3]{a^6 x^3}+c=d\sqrt[3]{a^{12} x^6}$, sive $a^2 bx+c=a^4 dx^2$, vel dividendo per $\sqrt[3]{ax^2}$ fit $b+\frac{c}{\sqrt[3]{a^6 x^3}}=d\sqrt[3]{a^6 x^3}$, sive $b+\frac{c}{a^2 x}=a^2 x$:

179. Ele-

179. Elevando ad eandem potentiam idem membrum, id poteſt præſtari ſolum, quotieſcunque in æquatione bini tantum termini habebuntur cum ſuis radicalibus ſinguli, vel bini radicales cum quotcunque terminis rationalibus, dummodo alter e radicalibus ſit radicis quadratæ, vel tres tantum radicis quadratæ, cum quotcunque rationalibus, vel quatuor radicis quadratæ ſine ullis aliis terminis.

180. Sit enim $a\sqrt[m]{x}-b\sqrt[n]{y}=0$; erit tranſponendo $a\sqrt[m]{x}=b\sqrt[n]{y}$, & elevando ad potentiam m utrunque membrum erit $a^{m}x=b^{m}\sqrt[n]{y^{m}}$, ac elevando utrunque ad potentiam n, fiet $a^{mn}x^{n}=b^{mn}y^{m}$.

181. Sit $a\sqrt[m]{x}-b\sqrt{y}+c=0$ exprimente c ſummam terminorum quotcunque rationalium; relicto $a\sqrt[m]{x}$ ex altera parte, fiet $a\sqrt[m]{x}=b\sqrt{y}-c$, & elevando utrobique ad potentiam m, in ſecundo membro remanebit numerus terminorum $m+1$, in quibus tamen omnes potentiæ pares termini $b\sqrt{y}$ erunt liberæ ab irrationalitate, omnes autem potentiæ impares habebunt quantitates rationales multiplicatas per $\sqrt{y}$; ut ſi $m=5$, elevando ad quintam potentiam utrunque terminum, erit $a^{5}x$ $=b^{5}\sqrt{y^{5}}-5b^{4}c\sqrt{y^{4}}+10b^{3}c^{2}\sqrt{y^{3}}-10b^{2}c^{3}\sqrt{y^{2}}+5bc^{4}\sqrt{y}-c^{5}$, ſive $a^{5}x=$ $b^{5}y^{2}\sqrt{y}-5b^{4}cy^{2}+10b^{3}c^{2}\sqrt{y}-10b^{2}c^{3}y$

+ 5

$+ 5\,bc^4 \sqrt{y} - c^5$. Jam vero transpositis terminis omnibus, in quibus non adest $\sqrt{y}$, fiet $a^5\,x + 5\,b^4\,cy^2 + 10\,b^2\,cy + c^5 = b^5\,y\sqrt{y} + 10\,b^3\,c^2\,y\sqrt{y} + 5bc^4\sqrt{y} = (b^5\,y + 10\,b^3\,c^2\,y + 5\,bc^4)\sqrt{y}$, adeoque demum quadrando, evanescet irrationalitas.

182. Sit $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + d = 0$. Relinquantur bini radicales in uno membro, & habebitur $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = -c\sqrt{z} - d$, & quadrando $a^2\,x + b^2\,y + 2\,ab\sqrt{xy} = c^2\,z + d^2 + 2\,cd\sqrt{z}$, ac proinde casus redactus est ad præcedentem.

183. Sit $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} + c\sqrt{z} + d\sqrt{u} = 0$, erit $a\sqrt{x} + b\sqrt{y} = -c\sqrt{z} - d\sqrt{u}$, adeoque quadrando $a^2\,x + b^2\,y + ab\sqrt{x\,y} = c^2\,z + d^2\,u + 2\,cd\sqrt{uz}$, casu iterum ad binos radicales redacto.

184. Porro in his omnibus casibus valores illi a, b, c, d possunt exprimere quoscunque, & quotcunque terminos rationales, per quos multiplicentur illi radicales. In cæteris autem elevando ad potentias, numerus radicalium, vel manet idem, vel crescit. Quare ad liberandam æquationem ab ipsis radicalibus recurrendum ad aliam methodum generalem, quæ pendet a methodo jam exposita a num. 172, eliminandi quantitatem quamvis, e binis æquationibus, in quibus adsit. Nimirum quævis radix pona-

 tur

tur æqualis quantitati expressæ per novam litteram, qua substituta in illa æquatione, habebitur nova æquatio continens novas illas quantitates, sed carens radicalibus terminis. Porro habebuntur etiam tot aliæ æquationes, quot novi valores assumpti sunt, in quibus singulis per elevationem ad eandem potentiam vitabitur irrationalitas. Earum autem ope, & præcedentis æquationis, eliminari poterunt illi novi valores assumpti, alii post alios, reducendo numerum æquationum ad pauciores, donec unica tandem relinquatur æquatio continens illos valores solum, quos continebat prima æquatio proposita.

185. Sit $\sqrt[3]{x} + \sqrt{y} = \sqrt[4]{z} + b$ Ponatur $\sqrt[3]{x} = p$, $\sqrt{y} = q$, $\sqrt[4]{z} = r$, & habebuntur quatuor æquationes $p + q = r + b$, $x = p^3$, $y = q^2$, $z = r^4$ Ope primæ & secundæ potest eliminari p, & jam habebuntur tres æquationes, in quibus p non aderit. Ope hujus novæ, & illius tertiæ $y = q^2$ poterit eliminari q, & jam habebuntur duæ, in quibus nec aderit p, nec q. Ope hujus novæ, & illius quartæ $z = r^4$, poterit eliminari r, & jam habebitur æquatio, in qua nec aderit p, nec q, nec r, sed illæ solæ quantitates, quæ aderant in æquatione proposita: radicales autem termini penitus deerunt omnes. Hæc autem methodus admodum operosa est, sed satis patet esse generalissimam.

§. VIII.

§. VIII.

De variis æquationum generibus.

186. ÆQuatio dicitur indeterminata, quæ habet plures incognitas quantitates, determinata, quæ unicam; quia illa infinitas numero solutiones habet, hæc vel unicam, vel determinatum earum numerum. Nimirum infiniti numero valores sunt, qui pro incognitis illis quantitatibus substituti illas verificant, unicus vel determinatus eorum numerus has.

187. Æquatio $x+y=12$ dicitur indeterminata, æquatio $3x+\frac{1}{4}x=20$, vel æquatio $x^2+8=6x$ determinata. In illa enim prima, si ponatur $x=1$, $y=11$, vel $x=2$, $y=10$, vel $x=-1$, $y=+13$, & ita porro, semper verificatur $x+y=12$ ita, ut infiniti sint valores, qui pro x & y positi in ea æquatione verificent ipsam: in secunda autem solus ille numerus 8 inventus num. 166 æquationi satisfacit, in tertia vero tam numerus 2, quam 3, cum sit $2\times2+8=6\times2$, & $4\times4+8=6\times4$ sive $4+8=12$, & $16+8=24$, nec nullus alius numerus pro x positus eas æquationes verificabit.

188. Si alicujus problematis conditiones omnes exprimantur per plures æquationes, ita tamen, ut tot habeantur incognitæ, quot æquationes; poterit semper deveniri ad unicam æquationem, quæ unicam incognitam habeat. Nam si sint ex. gr. 10 æquationes, & totidem incognitæ, poterit conferendo primam cum secunda eliminari methodo ex-

 posita

posita num. 172 una ex iis incognitis, inveniendo novam æquationem, quæ illa careat, tum idem præstari poterit conferendo primam cum tertia, & ita porro, ac habebuntur jam novem æquationes cum novem incognitis: eæ eodem artificio poterunt reduci ad octo cum octo incognitis, & ita porro, donec deveniatur ad unicam cum unica incognita.

189. Hinc si habeantur tot æquationes, quot incognitæ, problema dicitur determinatum, & unicam, vel finitas numero solutiones habere potest. Si fuerint plures incognitæ quam æquationes, problema dicitur indeterminatum, & admittit infinitas. Si autem plures fuerint æquationes, quam incognitæ, dicitur plusquam determinatum, & nisi casu contingat, ut determinatis incognitis per totidem æquationes, reliquæ verificentur, problema ipsum erit impossibile.

190. Inventi sunt num. 170. bini numeri 8 & 4, quorum summa 12, differentia 4, ope binarum æquationum $x + y = 12$, $x - y = 4$ habentium binas incognitas. Unicam autem æquationem $x + y = 12$ cum binis incognitis habere infinitas solutiones vidimus num. 187. Si demum habeantur binæ æquationes $3x + \frac{1}{4}x = 26$, & $4x + \frac{1}{8}x = 33$, utraque verificatur facto $x = 8$. Sed si secunda æquatio esset $4x + \frac{1}{8}x = 66$, ambæ simul per eundem valorem x verificari non possent, cum ex prima eruatur $x = 8$ (per num. 166.), in secunda multiplicando per 8 fiat $32x + x = 528$, sive $x =$

$x = \frac{528}{32+1} = \frac{528}{33} = 16$; adeoque diversos incognitæ valores requirant.

191. Æquatio determinata dicitur ejus gradus, ad quem assurgit exponens maximæ potestatis quantitatis incognitæ, ubi ex æquatione ipsa tollitur irrationalitas, aut fractio continens sub signo radicali, vel in denominatore fractionis ipsam illam quantitatem incognitam. Æquatio $2x^2 + 4x^3 - 27 = \frac{5}{2}x$ est gradus tertii, quia maxima potentia quantitatis incognitæ x est illud x^3. Æquatio $x^2 + \frac{10}{x} = 27$ non est gradus secundi, licet videatur habere tantum x^2 & x, sed tertii, quia sublata fractione illa, in cujus denominatore erat x, fit $x^3 + 10 = 27x$. Pariter in æquatione $2x - 3 = \sqrt{3x}$, quæ videretur esse gradus primi, sublato radicali, habebitur, quadrando utrobique, $4x^2 - 12x + 9 = 3x$, ac proinde æquatio evadit gradus secundi.

192. Fractiones, quæ denominatorem cognitum habeant, nihil turbant æquationis gradum; si vero adsint quantitates radicales continentes sub signo radicali quantitates cognitas, pariter æquationis gradus, quod pertinet ad methodum, qua ipsa æquatio solvenda est, & valor incognitæ quantitatis inveniendus, nihil turbatur. At eo casu æquatio ipsa, si ejus natura spectetur, pertinet ad altiorem gradum, nec in sua sede esse dicitur. Æquatio $x^2 + \frac{2}{3}x - 12 = 0$ est secundi gradus: at æqua-

tio $x^2 - 2x\sqrt{3} + 4 = 0$, licet eodem tractetur modo, quo æquationes secundi gradus, adhuc tamen altiorem sedem habet, ad quam reducitur eliminato illo radicali. Transponendo nimirum fit $x^2 + 4 = 2x\sqrt{3}$, & quadrando $x^4 + 8x^2 + 16 = 12x^2$, quæ est æquatio gradus quarti.

193. Contra vero si æquatio quædam altior dividi possit in duas irrationalitate carentes, ex quarum multiplicatione ea constet, divisione ipsa deprimitur ad sedem inferiorem. Æquatio $x^3 - 10x^2 + 34x - 40 = 0$ dividi potest per $x - 4 = 0$, & prodit $x^2 - 6x + 10 = 0$. Illa igitur, quæ erat gradus tertii, ejusmodi divisione redacta est ad duas alteram gradus primi, alteram secundi; adeoque ad sedem inferiorem depressa est. Utrum autem aliqua æquatio deprimi possit ad sedem inferiorem, an in ea, quam præsefert, necessario maneat; id pendet a methodo inveniendi divisores omnes formulæ datæ, de qua egimus §.3, cum pendeat ab eo, utrum dividi possit æquatio ipsa per aliam gradus inferioris irrationalitate carentem.

194. Valor quantitatis incognitæ, qui positus pro ipsa incognita verificat æquationem, dicitur radix æquationis ipsius: ac proinde an aliqua quantitas sit radix æquationis cujuspiam, cognoscitur facile substituendo eum valorem pro incognita. Porro si radix est positivi valoris, dicitur radix vera, si negativi, appellari solet radix falsa, quanquam etiam ipsa sit verè ejus æquationis radix. In æquatione

tione $3x + \frac{1}{4}x = 26$, radix est 8, in æquatione $x^2 + 8 = 6x$ radices sunt tam 2, quam 4, omnes positivæ, quia iis numeris positis pro x verificatur æquatio, ut vidimus. In æquatione $x^2 - 3x = 10$ radices sunt $+5$, & -2, quæ positæ pro x ipsam verificant, cum sit $5 \times 5 - 3 \times 5 = 10$, & $-2 \times -2 - 3 \times -2 = 10$, sive $25 - 15 = 10$, & $4 + 6 = 10$.

195. Aliquando aliquot vel etiam omnes radices sunt impossibiles; ac eæ quæ possibiles sunt reales dicuntur, quæ impossibiles, dicuntur imaginariæ. Unum e casibus, in quibus omnes impossibiles sunt, patet fore eum, in quo æquatio nullam contineat potentiam incognitæ imparem, ac termini omnes ad alterum æquationis membrum transpositi positivi sint, ac unus ex iis incognita careat, ut $x^4 + 2x^2 + 6 = 0$. Quovis enim valore substituto pro x, omnes termini erunt positivi, adeoque se mutuo destruere non poterunt, & substituto etiam 0 pro x, reliqui evanescent, ac relinquetur ille cognitus, qui non potest esse $= 0$. In æquatione vero $x^3 - 2x + 4 = 0$ substituendo -2, $1 + \sqrt{-1}$, $+1 - \sqrt{-1}$ æquationi satisfit. Quare eæ sunt æquationis radices, & prima quidem realis est, reliquæ imaginariæ.

196. Æquatio vero per hujusmodi transpositionem ordinatur, & ad debitam formam redigitur, quam acquirit, cum omnes ejus termini in unum membrum conjiciuntur, & fiunt $= 0$, ac in eo ordinantur secundum potentias ipsius incognitæ ita, ut maxima potentia primum locum habeat, & sit

cum signo positivo, ac per nullam aliam quantitatem multiplicetur: potentiæ autem inferiores aliæ aliis succedant, & si eadem potentia per plures quantitates cognitas multiplicetur, omnia ejusmodi producta ad unicum terminum pertinere censeantur, scribanturque aliæ sub aliis; ac proinde forma æquationis ordinatæ est in æquatione ex.gr. gradus tertii $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, ubi p, q, r exprimunt quantitates quascunque cognitas *positivas*, vel negativas, vel quantitatum cognitarum aggregata quævis. Ac illæ quantitates p, q, quæ multiplicant potentias incognitæ, dicuntur coefficientes. In æquatione $x^3 + 2x^2 - 6x - 10 = 0$, coefficiens secundi termini est 2, tertii -6, ac in ea collata cum illa generali expressione est $p = 2$, $q = -6$, $r = -10$. In æquatione $x^3 - x^2 + 3x - 10 = 0$, est $p = -1$, $q = 3$, $r = -10$. In æquatione

$$\begin{array}{llll} x^3 + \dfrac{a^2}{2b}x^2 & + \dfrac{a^3}{4f}x & + c^3 & = 0 \\ \quad - \dfrac{3bc}{d}x^2 & & - \dfrac{2a^3d}{f} & \\ & & + 8abc & \end{array}$$

est $p = \dfrac{a^2}{2b} - \dfrac{3bc}{d}$, $q = \dfrac{a^3}{4f}$, $r = c^3 - \dfrac{2a^3d}{f} + 8abc$. Plurimum autem Tyroni proderit formulas generales contemplari, ac exerceri in comparatione homogeneorum, & substitutione valorum, quos casus particulares exhibent pro formularum generalium valoribus.

197. Si

197. Si desit aliqua incognitæ potentia post maximam, adhuc tamen in numerandis terminis consideratur tanquam si adesset, & ejus coefficiens esset $= 0$. In æquatione $x^3 - 3x - 3 = 0$, $-3x$ non est secundus terminus, sed tertius, ac secundus deest, & si ea conferatur cum generali illa, erit $p = 0$, $q = -3$, $r = -3$.

198. Æquatio ordinatur, & ad debitam formam reducitur ope theorematum expositorum superiore §. a num. 145. Fractiones nimirum tolluntur per multiplicationem; ac radicalia uno e pluribus methodis ibi expositis, collocantur termini omnes in eodem membro per transpositionem, liberatur primus terminus a coefficiente per divisionem. Æquatio $\frac{16}{x^2 + 2x} + 2x = 8$ ad debitam formam reducetur, multiplicando prius per $x^2 + 2x$, & habebitur $16 + 2x^3 + 4x^2 = 8x^2 + 16x$, tum transponendo, ac simul ordinando secundum potentias ipsius x, fiet $2x^3 \begin{matrix} + 4x^2 \\ - 8x^2 \end{matrix} - 16x + 16 = 0$, sive $2x^3 - 4x^2 - 16x + 16 = 0$, ac dividendo per 2, fiet $x^3 - 2x^2 - 8x + 8 = 0$.

199. Hoc autem pacto divisio adhibita ad liberandum a coefficiente primum terminum, sæpe fractiones inducet in coefficientes, quæ hac methodo evitari non poterunt. Si æquatio fuisset $\frac{7}{x^2 + 3x} + 2x = 5$, multiplicando per $x^2 + 3x$, fieret

$7 + 2x^3 + 6x^2 = 5x^2 + 15x$, ac transponendo, & ordinando $2x^3 + x^2 - 15x + 7 = 0$, & dividendo per 2 demum $x^3 + \frac{1}{2}x^2 - \frac{15}{2}x + \frac{7}{2} = 0$.

Eæ tamen fractiones tolli poterunt alia methodo quam trademus.

§. IX.

De solutione æquationum determinatarum primi, & secundi gradus.

200. ANtequam æquationum determinatarum naturam, & generales proprietates consideremus, trademus hic quæ pertinent ad solutionem æquationum primi, & secundi gradus, quæ nimirum ex iis, quæ hactenus vidimus abunde haberi potest, & ad ea ipsa, quæ deinde dicturi sumus, viam sternit.

201. Porro solutionem æquationum gradus primi vidimus etiam num. 166. Eæ solvuntur sola fermè æquationis ordinatione. Quævis enim æquatio primi gradus ordinata reducitur ad hanc forma $x + p = 0$, adeoque erit $x = -p$.

202. Æquatio $\frac{1}{4}x = 26 - 3x$ reducitur multiplicando per 4 ad hanc $x = 104 - 12x$, & transponendo ad hanc $13x - 104 = 0$, ac dividendo per 13 ad hanc $x - 8 = 0$, ubi $p = -8$, adeoque $-p = 8$, & proinde $x = 8$.

203. Patet radicem $-p$ æquationis primi gradus fore positivam, vel negativam, prout in formula

mula $x + p = 0$ terminus p fuerit negativus, vel positivus.

204. Patet etiam æquationem gradus cujusvis, in qua desint omnes termini præter primum, & ultimum, reduci posse ad æquationem primi gradus, & solvi eadem methodo, quod etiam præstitimus num. 167. Si enim fuerit $x^m + p = 0$, facto $x^m = y$, erit $y + p = 0$, $y = -p$, $x = \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{-p}$.

205. Æquationes secundi gradus ordinatæ solvuntur per extractionem radicis. Earum formula generalis est $x^2 + px + q = 0$. Si in ea fuerit $p = 0$, sive si careat secundo termino, & sit $x^2 + q = 0$, solvitur methodo jam exposita, reducendo prius ad formam æquationis primi gradus, vel immediatè transponendo fit $x^2 = -q$, & $x = \pm\sqrt{-q}$.

206. Patet autem ibi haberi binas radices alteram positivam, alteram negativam, reales ambas, vel ambas imaginarias, prout valor q fuerit negativus, vel positivus.

207. In æquatione $x^2 - 4 = 0$ est $x^2 = 4$, & $x = \pm 2$, ubi cum sit $q = -4$, ambæ radices sunt reales: & in æquatione $x^2 + 4 = 0$ fit $x^2 = -4$, & $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$ ambæ imaginariæ.

208. Si autem non sit $p = 0$, sed æquatio affe-

cta sit secundo termino, transponatur tertius terminus cognitus q, eritque $x^2 + px = -q$. Quoniam in primo membro habetur x^2 quadratum quantitatis incognitæ x, & px productum ex p, & x, adeoque duplum productum ex $\frac{1}{2}p$ & x; si addatur utrique membro quadratum dimidii coefficientis p, sive $\frac{1}{4}p^2$ complebitur in primo membro quadratum, ac habebitur $x^2 + px + \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2 - q$, ubi ipsum primum membrum erit necessario quadratum binomii $x + \frac{1}{2}p$, & secundum membrum erit totum cognitum. Extrahendo igitur utrobique radices, erit $x + \frac{1}{2}p = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ ac transponendo fiet $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$. Nimirum habebuntur binæ radices $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ & $-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$.

209. In æquatione illa $x^2 + 8 = 6x$, quæ ordinata evadit $x^2 - 6x + 8 = 0$, est $p = -6$, $q = 8$. Hinc $-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)} = +3 \pm \sqrt{(9 - 8)} = +3 \pm \sqrt{1} = 3 \pm 1$, nimirum binæ radices sunt $3 + 1 = 4$, & $3 - 1 = 2$.

210. Considerando autem illam formulam generalem $x = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ multa quæ ad radices hujusmodi pertinent, facile deprehendentur.

211. In primis si valor q fuerit negativus; valor $-q$ erit positivus, & $\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$ erit semper valor realis, & semper major quam $\frac{1}{2}p$, ac sive p fuerit valor positivus, sive negativus, erit $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$ valor positivus $-\frac{1}{2}p-(\sqrt{\frac{1}{4}pp-q})$ valor negativus. Quare quotiescumque tertius terminus fuerit positivus, semper habebuntur binæ radices reales, & quidem altera positiva, altera negativa. In æquatione $x^2 - 6x - 16$ binæ radices altera positiva, altera negativa erunt $+8$, & -2.

212. Si fuerit $q=0$, erit $\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)} = \sqrt{\frac{1}{4}pp} = \frac{1}{2}p$; nimirum altera radix $-\frac{1}{2}p - \frac{1}{2} = -p$, altera $-\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p = 0$. Quare si desit ultimus terminus, erit altera radix realis æqualis coefficienti secundi termini accepti cum signo contrario, altera $=0$. In æquatione $x^2 - 6x = 0$, erit $x = 6$, & $x = 0$.

213. Si valor q fuerit positivus, sed adhuc minor quam $\frac{1}{4}pp$, $\sqrt{(\frac{1}{4}pp-q)}$ adhuc erit valor realis, sed minor $\frac{1}{2}p$; nimirum binæ radices erunt ambæ reales, sed erunt positivæ, vel negativæ, prout $-\frac{1}{2}p$ fuerit valor positivus, vel negativus, nimirum prout valor p fuerit negativus, vel positivus. Quare si tertius terminus fuerit positivus, sed adhuc minor quadrato dimidii coefficientis secundi termini, ambæ radices erunt reales, & ambæ positivæ, vel

vel ambæ negativæ, prout coefficiens secundi termini fuerit contra negativus, vel positivus. In æquatione $x^2 - 6x + 5$, radices erunt 5 & 1, in æquatione $x^2 + 6x + 5 = 0$, erunt -5, & -1.

214. Si valor q fuerit positivus, & jam æqualis $\frac{1}{4}pp$, erit $\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)} = 0$, adeoque binæ radices $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ & $-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, ambæ reducentur ad $-\frac{1}{2}p$, eruntque inter se æquales. Quare si tertius terminus fuerit positivus, & æqualis quadrato coefficientis secundi termini, ambæ radices erunt reales, sed æquales erunt inter se, nimirum æquales dimidio coefficienti secundi termini accepto cum signo contrario. In æquatione $x^2 - 6x + 9 = 0$ radices erunt $+3$, & iterum $+3$.

215. Si demum valor q fuerit positivus, sed jam major quam $\frac{1}{4}pp$, erit $\frac{1}{4}pp - q$ valor negativus ac proinde $\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ valor imaginarius. Quare si tertius terminus fuerit positivus, & major quadrato coefficientis secundi termini, erunt ambæ radices imaginariæ, & problema impossibile. In æquatione $x^2 - 6x + 10 = 0$ radices erunt $+3 \pm \sqrt{-1}$.

216. Præterea conferendo hasce binas radices $-\frac{1}{2}p + \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, & $-\frac{1}{2}p - \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$ patet, earum summam fore $-p$, & earum productum fore

fore $\frac{1}{4}pp - \frac{1}{4}pp + q = q$. Quare ſumma binarum radicum erit ſemper æqualis coefficienti ſecundi termini accepto cum ſigno contrario, productum vero tertio termino; ac ſi radices accipiantur cum ſigno contrario ei, quod habent, earum ſumma erit jam æqualis illi coefficienti accepto cum ſuo ſigno, productum autem poſtremo termino adhuc æquale erit. Patebit id in omnibus ſuperiorum æquationum exemplis, ut in prima $x^2 - 6x - 16 = 0$, cujus radices $+8$, & -2, ac mutatis earum ſignis, habetur -8, $+2$, quarum ſumma -6, productum -16.

217. Diſcat Tyro e formulis generalibus ad omnes caſus particulares applicatis eruere theoremata, & ſolutionum generalium vim intimius perſpicere. Porro poſtremam hanc proprietatem, ut nimirum coefficiens ſecundi termini ſit ſumma radicum acceptarum cum ſigno contrario, ultimus autem terminus ſit earum productum, videbimus infra generalem eſſe omnibus omnium graduum æquationibus, quod ipſum etiam in ſuperiore ſolutione æquationum primi gradus patet, ubi in æquatione $x + p = 0$, adeoque $x = -p$ valor radicis $-p$ mutato ſigno fit $+p$ ac eſt coefficiens ſecundi termini, qui ibi eſt totus ſecundus, & ultimus terminus.

218. Ex iis, quæ demonſtrata ſunt, eruitur alia quoque proprietas, quæ quidem generalis eſt omnibus omnium graduum æquationibus, ſed inductione ſola patet, nec huc uſque, quod ſciamus, ab ullo eſt demonſtrata, quod nimirum tot habean-

tur

tur radices positivæ, quot habentur mutationes signorum in terminis sibi succedentibus, tot autem negativæ, quot habentur continuationes. Ex: gr: æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$, in qua primus terminus habet (per num.209) signum positivum, secundus signum negativum, tertius iterum positivum, adeoque signum bis mutatur, habet binas radices positivas $+2$, & $+4$, æquatio $x^2 + 6x + 8 = 0$, in qua signum bis continuatur, habet radices -2, & -4 ambas negativas, æquatio $x^2 - 6x - 16 = 0$, in qua prius transitur a signo positivo ad negativum, tum signum continuatur, habet (per num.216) radices $+8$, -2 alteram positivam alteram negativam. Porro ostensum est (num.211), quotiescunque tertius terminus est negativus, alteram radicem semper esse positivam, alteram negativam, quo quidem casu necessario habetur una mutatio, & una continuatio signi; nam si secundus terminus sit positivus, transitur a primo positivo ad secundum positivum continuando, tum ab eo positivo ad tertium negativum, mutando. Si autem sit negativus, primum habetur mutatio, tum continuatio. Quoties autem ultimus terminus est positivus, ostensum est num.213 ambas radices esse positivas, vel negativas, prout secundus terminus fuerit negativus, vel positivus, sive prout binæ habebuntur mutationes, vel binæ continuationes. Patet eadem regula & in primo gradu; nam in æquatione $x + p = 0$ valor $x = -p$ erit positivus, si p habet valorem negativum contrarium signo primi termi-

termini, contra negativus, si idem sit signum. Quare hæc regula in æquationibus primi, & secundi gradus hic demonstratur.

219. Patet etiam ex iis, quæ demonstrata sunt, num. 211, 212, 213, in æquatione secundi gradus radicem unicam imaginariam esse non posse, sed vel neutram esse, vel ambas. Hæc etiam est generalis proprietas æquationum omnium quorumcumque graduum, ut nimirum radicum imaginariarum numerus par tantum esse possit, ac ejus proprietatis ratio inferius patebit.

220. Ad formam æquationis secundi gradus reducuntur æquationes omnes, quæ habent tres tantum terminos, in quorum postremo deest incognita, in primo autem ea assurgit ad potentiam duplam ejus, quam habet in secundo, quæ nimirum habet hanc formam $x^{2m} + px^{m} + q = o$. Nam posito $y = x^{m}$, fiet $y^{2} + py + q = o$, adeoque $y = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{\frac{1}{4}pp - q}$, & $x = \sqrt[m]{y} = \sqrt[m]{-\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q.)}}$

221. Sit æquatio $x^{4} - 6x^{2} + 1 = o$. Erit $p = -6$, $q = 1$, $m = 2$, adeoque $x = \pm \sqrt{3 \pm \surd(9 - 1)} = \pm \sqrt{3 \pm \surd(8)}$. Quin immo quoniam binomium $3 \pm \surd 8$ est quadratum binomii $1 \pm \surd 2$, cujus nimirum quadratum est $1 \pm 2\surd 2 + 2 = 3 \pm 2\surd 2 = 3 \pm \surd 8$, erit $x = \pm 1 \pm \surd 2$, & æquatio proposita habebit hasce qua-

tuor radices $1+\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$, $-1+\sqrt{2}$, $-1-\sqrt{2}$:

222. Porro an ex binomio hujus formæ $m+\sqrt{n}$ extrahi possit radix quadrata, ut hìc ex binomio $3+\sqrt{8}$ extrahitur, id ipsùm deprehendi potest ope hujusmodi æquationum gradus quarti resolutarum more æquationum gradus secundi, eruendo nimirum earum ope formulas quasdam generales, quæ licet prima fronte videantur implicatiores ipso binomio proposito, adhuc tamen semper ad radicem quæsitam perducunt, quotiescunque ea habetur, sive constet binis terminis irrationalibus, sive altero rationali, altero irrationali; sunt autem satis aptæ ad indicandam Tyroni Algebraicarum solutionum vim multiplicitate radicum omnes problematis partes complectentium.

223. Capiatur formula binomii $x+y$ habentis pro quadrato $x^2+2yx+y^2$. Id quadratum ponatur æquale binomiò proposito $m+\sqrt{n}$ ita, ut pars illa x^2+y^2, quæ rationalis esse debet etiam in casu, quo x & y radicalem quantitatem contineant, ponatur æqualis parti rationali m, reliquum $2yx$ ponatur $=\sqrt{n}$. Habebuntur binæ æquationes $x^2+y^2=m$, $2yx=\sqrt{n}$, & in posteriore quadrando erit $4y^2x^2=n$, ac si libeat, eliminato valore y, quærere valorem x, dividendo per $4x^2$ erit $y^2=\frac{n}{4x^2}$, quo valore substituto in priore æquatione,

ne, fiet $x^2 + \frac{n}{4x^2} = m$, sive multiplicando per x^2 fiet $x^4 + \frac{1}{4}n = mx^2$, vel $x^4 - mx^2 + \frac{1}{4}n = 0$; unde methodo jam exposita infertur $x^2 = \frac{1}{2}m \pm \sqrt{\frac{1}{4}m^2 - \frac{1}{4}n} = \frac{1}{2}m \pm \frac{1}{2}\sqrt{m^2 - n} = \frac{m \pm \sqrt{m^2 - n}}{2}$. Hinc autem habentur demum quatuor valores $x = \pm\sqrt{\frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}}$, combinato utrolibet signo radicis includentis cum utrolibet radicis inclusæ.

224. Inde vero ope æquationis $x^2 + y^2 = m$, adeoque $y^2 = m - x^2$ infertur valor $y^2 = m - \frac{m \pm \sqrt{mm - n}}{2}$. Cumque sit $m = \frac{2m}{2}$, erit $y^2 = \frac{2m - m \mp \sqrt{mm - n}}{2} = \frac{m \mp \sqrt{mm - n}}{2}$ qui valor est idem prorsus cum valore $x^2 = \frac{m \pm \sqrt{(m^2 - n)}}{2}$ cum hoc solo discrimine, quod signum termini radicalis $\sqrt{(mm - n)}$ debet in valore y^2 sumi contrarium ei, quod habetur in valore x^2 ita, ut radix illa quæsita $x + y$ sit $\pm\sqrt{\frac{m \pm \sqrt{(mm - n)}}{2}} \pm$

 $\sqrt{m}$

$\sqrt{\frac{m \mp \sqrt{(mm - n)}}{2}}$, ac signa omnia radicum ambiguarum liceat combinare, ut libuerit, sed radicis inclusæ signum semper debeat in altero e binis terminis esse contrarium ei, quod habet in altero:

225. Sine hujusmodi conditione haberentur 16 diversi valores ejus binomii, nam primus terminus seorsum consideratus habet quatuor diversos valores, ut vidimus, ac secundus pariter quatuor, & liceret quemvis e prioribus quatuor combinare cum quovis e posterioribus, adeoque pro quolibet ex ipsis quatuor valoribus prioris haberentur quatuor diversæ radices. Sed octo ex iis haberent in utroque termino idem signum radicis inclusæ. Quoniam enim tam in primo termino, quam in secundo bini valores habent signum radicis inclusæ positivum, bini autem negativum, singuli ex primis quatuor combinati cum binis e quatuor posterioribus habebunt signum idem in radice inclusa, & bini contrarium, adeoque octo valores erunt cum eodem ejusmodi signo, & ad præsentis problematis solutionem non pertinebunt, octo autem alii erunt cum diverso, & radicem quæsitam exhibebunt, qui invenientur combinando quemvis e quatuor valoribus primi termini cum binis secundi, signo contrario affectis, eruntque

$$+\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm - n)}}{2}} + \sqrt{\frac{m - \sqrt{(mm - n)}}{2}},$$

$$+\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm - n)}}{2}} - \sqrt{\frac{m - \sqrt{(mm - n)}}{2}},$$

$-\sqrt{m}$

$$-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$+\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}+\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}},$$

$$-\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}-\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}.$$

226. Porro ex his ipsis octo radicibus prima est eadem prorsus, ac quinta cum hoc solo discrimine, quod qui terminus in altera ponitur primo loco, in altera ponitur secundo: secunda pariter est eadem, ac septima, tertia eadem, ac sexta, quarta eadem, ac octava. Quare jam reducuntur ad solas primas quatuor, & earum quævis exhibet radicem binomii $m+\sqrt{n}$ cum hoc discrimine, quod cum ob valorem ambiguum ipsius $\sqrt{n}$, id binomium binos valores habeat, $m+\sqrt{n}$, $m-\sqrt{n}$; prima & quarta exhibent radicem binomii $m+\sqrt{n}$, secunda, & tertia binomii $m-\sqrt{n}$; quarta autem est ipsa prima negativè accepta, & tertia ipsa secunda pariter negativè accepta. Hoc pacto e 16 valori-

 bus,

bus, quos contineret formula $\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm - n)}}{2}} + \sqrt{\frac{m - \sqrt{(mm - n)}}{2}}$. Habita ratione ambiguitatis signorum, octo excluduntur ab ipsa problematis natura, & pertinent ad aliud problema, reliqui octo reducuntur ad quatuor, quorum bini exhibent radicem positivam, & negativam binomi $m + \sqrt{n}$, bini alii radicem pariter positivam, & negativam binomii $m - \sqrt{n}$.

227. Reliqui octo valores pertinerent ad problema, cujus binæ æquationes essent $x^2 + \frac{n}{y^2} = m$, & $x^2 - y^2 = 0$, ex quarum posteriore haberetur $y^2 = x^2$, & $y = \pm x$, ac substituto valore y^2 in prima, fieret $x^2 + \frac{n}{x^2} = m$, & $x^4 - mx^2 + n = 0$, ut prius, cum iisdem quatuor valoribus pro x; valores verò y essent iidem, ac valores x ita, ut radicis inclusæ signum deberet in utroque idem assumi, ac variari posset signum radicis includentis, vel retineri idem: quod quidem si variaretur, fieret $x + y = 0$, si maneret, fieret $x + y = 2x$, adeoque ex iisdem octo valoribus quatuor evanescunt, ut $+\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm - n)}}{2}} - \sqrt{\frac{m - \sqrt{(mm - n)}}{2}}$, quatuor alii reducuntur ad unicum terminum, ut $+\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm - n)}}{2}} +$

$\sqrt{m}$

$\sqrt{\frac{m - \sqrt{(mm - n)}}{2}}$, quod reducitur ad

$2\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm-n)}}{2}}$ vel $\sqrt{2m + 2\sqrt{(mm - n)}}$.

Sed ea huc non pertinent :

228. Porro ut jam applicetur ejusmodi formula $\sqrt{\frac{m + \sqrt{(mm-n)}}{2}} + \sqrt{\frac{m - \sqrt{(mm - n)}}{2}}$ ad extractionem radicis ex binomio $m + \sqrt{n}$, substituantur pro m, & n valores sui, & quotiescunque binomium illud habebit radicem extrahibilem, $mm - n$ erit quadratum radicem pariter extrahibilem habens, qua extracta, reducetur formula ad binas radices simplices, & quidem si radix quæsita alterum terminum rationalem habuerit, ex earum altera radix extrahi poterit, secus ex neutra. In binis autem radicis inventæ terminis signum idem adhibendum erit, vel bina contraria, prout propositi binomii bini termini fuerint cum eodem signo, vel cum oppositis.

229. In casu proposito habebatur $3 + \sqrt{8}$. Est igitur $m = 3$, $n = 8$, $mm - n = 9 - 8 = 1$, unde radix extrahi potest. Erit radix quæsita $\sqrt{\frac{3 + \sqrt{(9-8)}}{2}}$ $+ \sqrt{\frac{3 - \sqrt{(9-8)}}{2}} = \sqrt{\frac{(3+1)}{2}} + \sqrt{\frac{(3-1)}{2}} =$ $\sqrt{2} + \sqrt{1} = \sqrt{2} \pm 1$, & ob ambiguitatem signi $\sqrt{2}$, habebuntur quatuor valores $+\sqrt{2}+1$, $-\sqrt{2}-1$, $+\sqrt{2}-1$, $-\sqrt{2}+1$, quarum priores duæ exhibent radicem binomii $3 + \sqrt{8}$, posteriores

riores radicem binomii $3 - \sqrt{8}$. In hoc autem casu alter terminus radicis quæsitæ est rationalis, alter irrationalis.

230. Si fuisset propositum $7 + \sqrt{40}$, haberetur $m = 7$, $n = 4$, $mm - n = 49 - 40 = 9$, unde pariter radix extrahi potest. Radix igitur quæsita esset $\sqrt{\frac{7+\sqrt{9}}{2}} + \sqrt{\frac{7-\sqrt{9}}{2}} = \sqrt{\frac{(7+3)}{2}} + \sqrt{\frac{(7-3)}{2}} = \sqrt{5} + \sqrt{2}$, neutro termino rationali. At ipsius $\sqrt{5} + \sqrt{2}$ quadratum est $5 + 2\sqrt{10} + 2$, sive $7 + \sqrt{40}$ ipsum illud binomium propositum.

231. Si vero fuisset propositum $5 + \sqrt{8}$, esset $m = 5$, $n = 8$, $mm - n = 25 - 8 = 17$, unde cum radix non possit extrahi, consequitur ex ipso illo binomio $5 + \sqrt{8}$ non posse radicem extrahi.

232. Poterit aliquando binomium hujus formæ radicem habere, quæ hac methodo non innotescat; sed ad aliam prius formam reducendum erit, & sub hac forma ipsa radicem non habebit. Id autem contingere poterit, cum radicalis terminus binomii propositi radicem habebit extrahibilem.

233. Si proponatur $6 + \sqrt{9}$, erit $m = 6$, $n = 9$, $mm - n = 36 - 9 = 27$, unde radix extrahi non potest. Et tamen $6 + \sqrt{9} = 6 \pm 3$, habet binos valores 9, & 3, ex quorum priore extrahitur radix rationalis ± 3, posterior habet radicem simplicem $\sqrt{3}$. At hæ radices extrahuntur ex illo binomio ad aliam formam redacto, & si binomium per extractionem radicis e secundo termino

ad

ad aliam formam reduci non poterit, ut nunquam revera poterit, cum secundus ipse terminus erit verè irrationalis, nunquam accidet, ut extrahi possit e binomio radix, & hac methodo radix ipsa non inveniatur.

234. Supereſt notandum poſtremo loco, utrunque radicis terminum, nimirum tam $\sqrt{\frac{m+\sqrt{(mm-n)}}{2}}$, quam $\sqrt{\frac{m-\sqrt{(mm-n)}}{2}}$ proveniſſe in ſolo illo valore $x = \frac{\sqrt{m \pm \sqrt{(mm-n)}}}{2}$. Id autem contigit, quia ad ipſum problema, & ad æquationes illas $x^2 + y^2 = m$, $2xy = \sqrt{n}$ prorſus indifferenter ſe habebant x, & y ita, ut ſi pro quærendo valore x, quæſitus fuiſſet valor y, eadem prorſus æquatio debuiſſet obvenire pro y, quæ obvenit pro x. Si enim facto $4x^2y^2 = n$, libuiſſet eliminare potius x, obveniſſet $x^2 = \frac{n}{4y^2}$, & $\frac{n}{4y^2} + y^2 = m$, ſive $y^4 - my^2 + \frac{1}{4}n = 0$ eadem prorſus æquatio, quæ prius pro x; ac proinde idem debet eſſe valor x, ac y. Sed quoniam ubi alter ex altero eruitur, mutatur ſignum radicis incluſæ; id ſi in altero aſſumitur poſitivum, in altero negativum aſſumendum erit. Semper autem in ejuſmodi caſibus æquatio ſimul exhibebit valorem utriuſque termini, ut hic exhibuit. Sic ſi quærantur bini numeri, quorum ſumma 5, productum 6, & alter dicatur x, alter y, erit $x+y = 6$, $xy = 8$, & patet, utrunque indif-

indifferenter se habere ad hasce æquationes ita, ut altero substituto alterius loco, eadem prorsus æquatio oriri debeat. Hinc si eliminetur y, erit $y = \frac{8}{x}$ adeoque $x + \frac{8}{x} = 6$, $x^2 + 8 = 6x$, $x^2 - 6x + 8 = 0$, $x = 3 \pm \sqrt{(9-8)} = 3 \pm 1$, adeoque $x = 4$, vel $x = 2$. E prima autem æquatione erat $y = 6 - x$; quare $y = 6 - 3 \mp \sqrt{(9-8)} = 3 \mp \sqrt{1} = 3 \mp 1$; nimirum $y = 2$, vel $= 4$. Numeri quæsiti sunt 4, & 2, quos simul in valore ipso x exhibuit æquatio ita, ut posito $x = 4$, fit $y = 2$, & viceversa.

§. X.

De natura, & variis proprietatibus æquationum determinatarum.

235. Æquationes determinatæ graduum superiorum oriuntur ex multiplicatione æquationum graduum inferiorum, ac si plures æquationes primi gradus inter se multiplicentur, patebit ipsa æquationum altiorum natura. Sint æquationes $x + a = 0$, $x + b = 0$, $x + c = 0$ &c., quarum radices (per num. 201) sunt $-a$, $-b$, $-c$ &c. Si eæ multiplicentur inter se, orietur ex binis æquatio secundi gradus $x^2 \begin{matrix} +ax \\ +bx \end{matrix} + ab = 0$, ex ternis tertii

$$x^3 \begin{matrix} +ax^2 \\ +bx^2 \\ +cx^2 \end{matrix} \begin{matrix} +abx \\ +acx \\ +bcx \end{matrix} + abc = 0,$$ & ita porro ex numero

mero m æquationum gradus primi orietur æquatio gradus m, quod patet in hujusmodi productis exhibitis num.84. Generaliter autem patet ex binis æquationibus gradus m, & n, provenire æquationem gradus $(m+n)$. Prima enim incipit per x^m, secunda per x^n, & in iis terminis multiplicatis, nova æquatio (per num.37) incipiet per x^{m+n}.

236. Si consideretur productum ex iis æquationibus simplicibus patebit; (per num.85) coefficientem secundi termini esse summam illorum valorum a, b, c, d &c., coefficientem tertii esse summam productorum e binis, coefficientem quarti summam productorum e ternis, & ita porro, ac demum coefficientem postremi, esse productum simul ex omnibus. Porro quivis ex iis valoribus acceptus cum signo contrario est radix æquationis compositæ. Nam tota æquatio evadit $(x+a) \times (x+b) \times (x+c) \times (x+d)$ &c. $=0$. Si autem pro x ponatur, exempli gratia, $-b$, erit profecto $x+b=0$, adeoque etiam $x+b$ ductum in $(x+a) \times (x+c) \times (x+d)$ &c. fiet $=0$, nimirum posito $-b$ pro x æquatio verificabitur, adeoque $-b$ est ejusdem æquationis radix (per num.194), & eadem est demonstratio pro reliquis.

237. Inde autem infertur primo loco æquationem habere tot radices, quot exprimit exponens gradus, ad quem assurgit, nimirum æquationem secundi gradus duas, tertii tres, & ita porro; quanquam aliquæ ex iis poterunt esse imaginariæ, sive impossibiles. Si enim in æquatione orta ex binis $x+a$ $=0$,

$= 0$, $x + b = 0$, nimirum $x^2 + ax + ab = 0$,
$\quad\quad + bx$

sit $a = h - g\sqrt{-1}$, $b = h + g\sqrt{-1}$, iis valoribus substitutis, æquatio erit $x^2 + 2hx + h^2 + g^2 = 0$, quæ nullum valorem imaginarium præsefert, & tamen habet binas radices prorsus imaginarias ob illud $\sqrt{-1}$.

238. Æquatio $x^2 - 6x + 8 = 0$ habet (per num. 209) binas radices $+2$, $+4$, reales, æquatio $x^2 - 6x + 10 = 0$ (per num. 215) binas imaginarias $+3 + \sqrt{-1}$, & $+3 - \sqrt{-1}$, æquatio $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ habet tres radices -1, $+1$, $+3$, ut constabit ponendo quamvis ex iis pro x.

239. Generaliter autem æquatio composita ex quibusvis, & quotcunque æquationibus habebit pro radicibus radices omnes easdem, quas habent componentes. Nam si quis valor positus pro x in una e componentibus efficit ut ea evanescat facta $= 0$, idem positus pro x in composita efficiet pariter, ut ea evadat $= 0$; quidquid enim ex ea positione proveniat in aliis factoribus, si unus ex iis evadit $= 0$, productum debet pariter esse $= 0$, cum nihilum multiplicatum per quancunque quantitatem adhuc remaneat nihilum.

240. Æquationis $x^2 - 6x + 8 = 0$ radices (per num. 209) sunt $+2$ & $+4$, æquationis $x^3 - 3x^2 - x$

$-x+3=0$ sunt (per num.238) $-1+1+3$.
Ex earum multiplicatione oritur æquatio $x^5-9x^4+25x^3-15x^2-26x+24=0$, atque hujus radices sunt $+2$, $+4$, -1, $+1+3$, ut patebit hos valores substituendo pro x.

241. Hinc autem, ut fructum aliquem jam capiat Tyro, facile est invenire problemata, quæ solvantur tantummodo per datas quasdam quantitates. Si quæratur problema aliquod, quod solvatur tantummodo per numeros 4, & 2, fiat $x=4$, adeoque $x-4=0$, & pariter $x=2$, adeoque $x-2=0$: multiplicentur æquationes $x-4=0$, $x-2=0$, & fiat æquatio $x^2-6x+8=0$, sive transponendo $x^2+8=6x$: Quæratur igitur, qui sit is numerus, cujus quadrato si addatur 8, fiet ejus sextuplum: & nullis aliis numeris id conveniet præter illos duos 4, & 2. Eodem autem pacto multiplicatis pluribus æquationibus simplicibus habentibus pro radice numeros quoscunque invenientur problemata solvenda per eosdem eruta ex æquationibus earum multiplicatione ortis.

242. Eruitur secundo loco, coefficientem secundi termini esse summam radicum omnium acceptarum cum signis contrariis, coefficientem tertii summam productorum omnium e binis, coefficientem quarti summam productorum e ternis, ac postremum terminum esse productum ex omnibus simul, ut patet ex iis, quæ dicta sunt. Inde autem consequitur, si radices omnes assumantur cum suis signis, summam omnium æquari coefficienti secundi termini

ni accepto cum signo contrario, summam productorum e binis coefficienti tertii accepto cum suo signo, summam productorum ex ternis coefficienti quarti accepto cum signo contrario, & ita porro; productum autem ex omnibus postremo accepto cum suo signo, vel cum contrario, prout æquatio fuerit gradus paris, vel imparis: quia nimirum mutato signorum producentium numero impari, mutatur signum producti, mutato numero signorum pari, manet (per num. 26).

243. Id locum habere in æquationibus secundi gradus ostendimus num 216. Æquationis tertii gradus $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ radices (per num. 238) sunt $-1 + 1 + 3$, eædem acceptæ cum signo contrario sunt $+1, -1, -3$: Harum summa $= -3$, summa productorum ex binis $(-1 \times +1) + (-1 \times -3) + (+1 \times -3) = -1 + 3 - 3 = -1$, productum ex omnibus $+1 \times -1 \times -3 = 3$, & $-3, -1, +3$ sunt coefficiens secundi termini, coefficiens tertii, ac ultimus terminus. Contra, vero $-1 + 1 + 3 = 3$, $(-1 \times +1) + (-1 \times +3) + (1 \times 3) = -1 - 3 + 3 = -1$, $-1 \times +1 \times +3 = -3$, quare $3, -1, -3$ respondent illis $-3, -1, +3$ ita, ut signum secundi maneat, reliquorum mutetur.

244. Hinc vero si radices æquationis aliæ sint positivæ, aliæ negativæ, & se mutuo destruant, deerit secundus terminus, & viceversa; ac idem dicendum de productis ex multiplicatione binarum, ternarum &c. acceptarum cum signis contrariis. Nam si ea summa evanescat, coefficiens fit $= 0$, & termi-

nus

nus deest, ac si terminus deest, coefficiens est $= 0$, & illa summa evanescit.

245. In æquatione $x^3 - 7x + 6 = 0$ radices sunt $+1$, $+2$, -3, ut substitutio ostendet: est autem $1 + 2 - 3 = 0$.

246. Si autem aliquot æquationis radices fuerint $= 0$, deerunt totidem termini ultimi æquationis, & si aliquot ultimi æquationis termini desint, totidem radices erunt $= 0$. Nam postremus terminus cum sit productum ex omnibus radicibus cum contrario signo acceptis, erit $= 0$, si aliqua e radicibus sit $= 0$; coefficiens penultimi termini debet esse summa productorum omnium, quæ habentur, ubi assumuntur omnes radices præter unam, antepenultimi, ubi omnes præter duas, & ita porro. Quare illa omnia producta habebunt aliquem factorem $= 0$, si plusquam una radix sit $= 0$, hæc, si plusquam duæ, & ita porro. Contra ultimus terminus non potest esse $= 0$, nisi aliquis e factoribus sit $= 0$; ac eo casu in productis pertinentibus ad coefficientem penultimi termini, ea, quæ habebunt illam radicem $= 0$, erunt omnia $= 0$, & remanebit productum ex omnibus radicibus præter illam, quod non poterit evanescere, nisi inter eas radices etiam aliqua alia sit $= 0$, & pariter in antepenultimo cum factis $= 0$ iis omnibus productis, quæ ingreditur utralibet ex iis binis radicibus, remaneat tantummodo productum ex reliquis; ut id ipsum desit, debet alia ex iis radicibus, præter priores duas, esse $= 0$, & ita porro.

247. In æquatione $x^5 - 3x^4 - x^3 + 3x^2 = 0$ caren-

carente binis postremis terminis radices sunt -1, $+1$, $+3$, 0, 0, ut patebit substituendo, & multiplicatis $x+1=0$, $x-1=0$, $x-3=0$, $x-0=0$, $x-0=0$, redit ea æquatio.

248. Quod si in æquatione quavis mutentur signa radicum omnium, mutabuntur tantummodo alterna terminorum signa. Nam summa earum cum signo contrario acceptarum erit eadem sed signum ejus tantummodo mutabitur; producta autem ex binis, ternis &c. manebunt pariter eadem, sed in productis ex numero pari earundem, mutato signo omnium, signum producti manet, in productis ex numero impari mutatur, ut patet, nam in quovis producto si mutetur signum unius factoris, mutatur signum producti, quare si mutetur etiam signum secundi, redit ad priorem valorem, si tertii iterum mutatur, & ita porro. Ac proinde signum secundi termini mutabitur, tertii manebit, quarti mutabitur, & ita porro.

249. Æquationis $x^3-3x^2-x+3=0$ radices sunt -1, $+1$, $+3$ (per num. 238) Mutentur signa alternorum terminorum, & fiet æquatio $x^3+3x^2-x+3=0$, cujus radices sunt $+1$, -1, -3, ut patebit substituendo. In æquatione $x^3-7x+6=0$ radices sunt $+1$, $+2$, -3: mutatis alternis signis fit æquatio x^3-7x-6, nam $-7x$ est terminus tertius non secundus, qui in ea deest ob coefficientem $=0$, & radices jam sunt $-1-2+3$, ut pariter patebit substituendo.

250. Præterea eruitur, si omnes radices sint negativæ,

gativæ, omnium terminorum signa fore positiva, si omnes sint positivæ, alterna fore positiva, & negativa. Nam in primo casu radices assumptæ cum signo contrario erunt omnes positivæ, adeoque omnia producta positiva, in secundo omnes negativæ, adeoque producta ex numero pari earundem positiva, producta ex numero impari negativa.

251. In æquatione $x^3 + 7x^2 + 14x + 8 = 0$ radices sunt -1, -2, -4; at in æquatione $x^3 - 7x^2$, $+ 14x - 8 = 0$ radices sunt $+1$, $+2$, $+4$, ut patebit substituendo.

252. Monuimus num. 218., generalem esse omnium æquationum proprietatem, ut tot habeantur radices negativæ, quot habentur in terminis se ordine suo excipientibus continuationes signorum, tot positivæ, quot habentur mutationes: sed id nondum generaliter demonstrari potuisse, quod sciamus, & sola inductione deprehendi. Porro illud hic addendum tantummodo, regulam generalem esse, ubi omnes radices reales sint; nam imaginariæ plerumque possunt haberi, ut libet, pro negativis, vel positivis, immo revera nec positivæ sunt, nec negativæ, sed impossibiles.

253. In æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ in qua sunt binæ mutationes signorum in transitu a primo termino ad secundum, & tertio ad quartum, ac una continuatio a secundo ad tertium, binæ radices $+1$, $+3$ sunt positivæ, & tertia -1 negativa.

254. Hæc ex illa genesi deducuntur pertinentia ad quamvis æquationem determinatam rite ordina-

tam, & redactam ad formam debitam, ut & alia multa deduci possent, quæ minoris sunt usus. At si præterea æquatio omni fractione careat, alias habet proprietates non omittendas.

255. In primis ejusmodi æquatio nullam habet radicem realem, & rationalem vere fractionariam, quod facile demonstratur, ope hujus theorematis satis manifesti: Fractio, in qua numerator per denominatorem dividi non potest, ut potest in fractione $\frac{8}{4}$, quæ reducitur ad 2, conjuncta cum alia quantitate non potest evadere quantitas integra, nisi etiam illa alia, cum qua conjungitur sit fractio eundem denominatorem habens. Sit fractio $\frac{8}{3}$, vel $2\frac{2}{3}$ ad hoc ut conjuncta cum alio numero contineat numerum integrum, debet in illo alio numero adesse $\frac{1}{3}$, quod cum priore fractione $\frac{2}{3}$ unitatem compleat, adeoque si conjungatur ex: gr: cum $5\frac{1}{3} = \frac{16}{3}$, fiet $\frac{8}{3} + \frac{16}{3} = 2\frac{2}{3} + 5\frac{1}{3} = 8$.

256. Multiplicetur jam æquatio $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c... $+ d = 0$ per æquationem $x + \frac{n}{r} = 0$; fiet æquatio $x^{m+1} + ax^m + bx^{m-1}$ &c...

$$+\frac{n}{r}x^m + \frac{an}{r}x^{m-1}$$

$+\frac{dn}{r} = 0$. Porro ut coefficiens secundi termini

a +

$a + \frac{n}{r}$ sit quantitas integra, debet a habere eundem denominatorem r. Erit igitur a æqualis cuipiam valori $\frac{p}{r}$. Quare $\frac{am}{r} = \frac{pm}{r^2}$. Hinc ad hoc, ut coefficiens tertii termini $b + \frac{am}{r}$, sive $b + \frac{mp}{rr}$ sit valor integer, oportebit b habeat denominatorem rr, & sit æqualis alicui valori $\frac{q}{r^2}$. Eodem pacto æquationis $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c.... $+ d$, coefficiens quarti termini debebit habere denominatorem r^3, quinti r^4, postremi r^m. Erit igitur d æqualis alicui valori $\frac{z}{r^m}$, & postremus terminus $\frac{dn}{r}$ novæ æquationis erit $\frac{nz}{r^{m+1}}$ fractionarius. Ac proinde si æquatio quævis multiplicetur per æquationem primi gradus habentem radicem fractionariam, non potest evitari in æquatione inde orta fractio, cum eo ipso, quod ita disponantur coefficientes, ut in præcedentibus evitetur fractio, in postremo termino evitari non possit. Quare si æquatio composita nullam fractionem continet, nulla ejus radix rationalis fractionaria erit.

257. Generaliter autem est verum, si qua fractio adest in altera ex binis æquationibus, semper aliquam fore etiam in æquatione composita, sed de-

 mon-

monstratio generalis est multo operosior. Hinc vero in æquationibus ab omni fractione liberis, si qua radix realis, & rationalis habetur, ea debet esse inter divisores integros ultimi termini, quorum si nullus æquationi satisfacit, tuto concludi potest, nullam radicem ejusmodi æquationis esse rationalem. Nam ultimus terminus coalescit ex multiplicatione omnium radicum cum signo contrario acceptarum, & quivis numerus, qui est divisor cum uno signo, est etiam cum opposito.

258. In æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, ultimus terminus 3 habet divisores tantummodo $+1$, -1 $+3$, -3, qui si substituantur pro x, satisfaciunt omnes præter ultimum. Quare omnes tres ejus radices facile eruuntur. In æquatione $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$, divisores ultimi termini sunt $+1$, -1, $+2$, -2, quibus substitutis, primus satisfacit, cum fiat $1 - 3 + 4 - 2 = 0$, reliquorum autem nullus. Quare ea æquatio habet radicem rationalem unicam $+1$.

259. Et hac quidem methodo radices rationales, si quæ sunt, admodum facile inveniuntur, ubi postremus terminus non ita multos divisores habet. Si autem plures habeat; adhuc non ita difficulter deprehendentur radices rationales, si quæ sint, inveniendo omnes divisores unius dimensionis, methodo exposita num. 74. Nam æquatio, quæ habeat pro radice valorem quemvis $-a$, debet posse dividi per æquationem primi gradus $x + a = 0$, cum ex ea componatur.

260. In

260. In æquatione $x^3 - 2x^2 - 13x + 20 = 0$, postremus terminus 20 nimis multos divisores habet $+1, -1, +2, -2, +4, -4, +5, -5, +10, -10, +20, -20$, quos omnes per substitutionem experiri infinitum esset. Ejus divisor ea methodo num. 75 invenitur unicus $x - 4 = 0$. Quare unica ejus radix rationalis est $+4$.

261. Et quidem si æquatio $x^3 - 3x^2 + 4x - 2 = 0$ dividatur per $x - 1 = 0$, habetur $x^2 - 2x + 2 = 0$, cujus radices methodo numeri 208 sunt $1 \pm \sqrt{-1}$ ambæ imaginariæ; si autem æquatio $x^3 - 2x^2 - 13x + 20 = 0$ dividatur per $x - 4 = 0$, oritur æquatio $x^2 + 2x - 5 = 0$, cujus radices eadem methodo sunt $-1 \pm \sqrt{6}$ ambæ irrationales.

262. Jam vero ad transformationes quasdam, quæ haberi possunt per substitutiones in omnibus æquationibus ordinatis, & ad debitam formam redactis, ac summo sæpe usui sunt, faciendus gradus.

§. XI.

De transformationibus quibusdam earundem æquationum.

263. IN quavis æquatione determinata radices adhuc incognitæ poterunt multiplicari, vel dividi, augeri, vel minui, ut libuerit.

264. Sit æquatio quævis $x^m + px^{m-1} +$

 qx^m

$qx^{m-2} + rx^{m-3}$ &c. ... $+ t = 0$, cujus radices multiplicare oporteat per a. Ponatur $ax = y$, adeoque $x = \frac{y}{a}$, & hoc valore substituto, erit $\frac{y^m}{a^m} + \frac{py^{m-1}}{a^{m-1}} + \frac{qy^{m-2}}{a^{m-2}}$ &c. ... $+ t = 0$, ac multiplicando per a^m, fiet $y^m + apy^{m-1} + a^2qy^{m-2}$ &c. ... $+ a^m t = 0$. Hæc æquatio habet eosdem prorsus coefficientes, quos prior, sed multiplicatos per terminos hujus progressionis geometricæ $1, a, a^2, a^3$ &c.; ejus autem radices omnes sunt æquales radicibus æquationis præcedentis multiplicatis per a. Quod si fiat $a = \frac{1}{b}$, radices dividentur per b, & singuli coefficientes erunt multiplicati per terminos progressionis $\frac{1}{b}, \frac{1}{b^2}, \frac{1}{b^3}$, sive divisi per terminos progressionis $1, b, b^2, b^3$ &c.

265. Inde eruitur hoc theorema. Si singuli termini æquationis ordinatæ multiplicentur, vel dividantur per singulos terminos cujusvis progressionis geometricæ incipientis ab unitate, omnes radices æquationis multiplicabuntur vel dividentur, per secundum ejusdem progressionis terminum.

266. Æquationis $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ radices (per num. 248) sunt $-1, +1, +3$. Ducatur in terminos progressionis $1, 3, 9, 27$, & fiet æqua-

æquatio $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$, cujus radices erunt illæ eædem multiplicatæ per 3, sive -3, $+3$, $+9$, ut patebit substituendo hos valores pro x. Contra æquationis $x^3 - 9x^2 - 9x + 81 = 0$ divisis singulis terminis per eosdem terminos 1, 3, 9, 27, redibit æquatio prior $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cujus radices æquabuntur radicibus ipsius divisis per 3.

267. Cavendum tamen, si desit aliquis terminus æquationis, ne perturbetur ordo terminorum progressionis geometricæ respondentium terminis ipsius æquationis, sed ii termini progressionis, qui respondent terminis æquationis vacantibus, omittantur.

268. Æquatio $x^3 - 7x + 6 = 0$ caret secundo termino, si eæ, quæ per num. 245 sunt ejus radices, $+1$, $+2$, -3 multiplicandæ sint per 2, oportet in progressione 1, 2, 4, 8, omittere secundum terminum & fiet $x^3 - 28x + 48 = 0$, æquatio habens pro radicibus $+2$, $+4$, -6, ut patebit substitutione.

269. Ope hujus theorematis facile æquatio quævis liberari potest ab omnibus coefficientium fractionibus. Nimirum multiplicentur singuli termini æquationis propositæ per progressionem geometricam, cujus secundus terminus sit productum ex omnibus omnium ejusmodi fractionum denominatoribus, & patet singulos coefficientium numeratores post ejusmodi multiplicationem debere posse dividi per suos illos denominatores.

270. Sit æquatio $x^3 + \frac{3}{4} x^2 - \frac{2}{5} x + 6 = 0$. Si assumatur progressio $1, 4 \times 5, 4 \times 4 \times 5 \times 5, 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5$, sive $1, 20, 400, 8000$, fiet $x^3 + \frac{3 \times 4 \times 5}{4} x^2 - \frac{2 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5}{5} x + 6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 0$, sive $x^3 + 3 \times 5 x^2 - 2 \times 4 \times 4 \times 5 x + 6 \times 4 \times 4 \times 4 \times 5 \times 5 \times 5 = 0$, sive $x^3 + 15 x^2 - 160 x + 48000 = 0$, æquatio libera ab omnibus coefficientium fractionibus.

271. Porro si denominatores illi aliquos communes divisores habeant, non erit necessarium eos repetere, sed satis est ut secundum assumendæ progressionis terminum ingrediantur omnes non communes e factoribus denominatorum omnium, communibus præterea semel tantum adjectis.

272. In æquatione $x^3 + \frac{3}{10} x^2 - \frac{7}{6} x + 8 = 0$; quoniam $10 = 2 \times 5$, & $6 = 2 \times 3$, satis est adhibere $2 \times 5 \times 3$, & fiet $x^3 + \frac{3 \times 2 \times 5 \times 3}{2 \times 5} x^2 - \frac{7 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3}{2 \times 3} x + 8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 0$, sive $x^3 + 3 \times 3 x^2 - 7 \times 2 \times 5 \times 5 \times 3 x + 8 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 \times 3 \times 3 \times 3 = 0$, nimirum $x^3 + 9 x^2 - 1050 x^2 + 216000 = 0$.

273. Cavendum tamen novæ æquationis radices, ubi inventæ fuerint, dividendas esse per illum secundum progressionis terminum, ut habeantur radices æquationis datæ. Possunt autem in his casibus tolli

tolli fractiones etiam methodo exposita num. 159, multiplicando omnes æquationis terminos per factum ex omnibus denominatoribus; sed eo pacto primus terminus haberet, ut notavimus num. 199. suum coefficientem, quo æquatio rite ordinata, & ad debitam formam redacta, carere debet.

274. In æquatione $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6 = 0$, multiplicando per $4 \times 5 = 20$, fit $4 \times 5\, x^3 + \frac{3 \times 4 \times 5}{4} x^2 - \frac{2 \times 4 \times 5}{5} x + 6 \times 4 \times 5 = 0$, sive $20x^3 + 15x^2 - 8x + 120 = 0$, ubi æquatio est libera a fractionibus, sed si liberetur primus terminus a coefficiente dividendo per 20, fit $x^3 + \frac{15}{20}x^2 - \frac{8}{20}x + \frac{120}{20} = 0$, sive iterum $x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{2}{5}x + 6 = 0$.

275. Hac methodo potest aliquando liberari æquatio a radicalibus occurrentibus inter coefficientium factores, cum nimirum assumpto quodam radicali pro primo progressionis termino, radicales æquationis multiplicatione, vel divisione eliduntur, vel complentur, ut radix extrahi possit.

276. In æquatione $x^3 + 4x^2\sqrt{2} - 6x - \frac{8}{\sqrt{2}} = 0$, assumpta progressione $1, \sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}$, fit multiplicando $x^3 + 4 \times 2x^2 - 12x - 16 = 0$, sive $x^3 + 8x^2 - 12x - 16 = 0$, & dividendo x^3 $+ 4$

$+4x^2 - 3x - \frac{8}{4} = 0$, sive $x^3 + 4x^2 - 3x - 2 = 0$.

277. Hac pariter methodo licet sæpe ultimum terminum minuere ita, ut pauciores habeat divisores, quorum ope methodo numeri 257 investigentur radices rationales. Dividendo nimirum terminos æquationis, per terminos progressionis geometricæ res succedet, quotiescunque dividi possint omnes, & non incurratur in fractiones.

278. Sit æquatio $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$, cujus postremus terminus 24, habet pro divisoribus numeros 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24, tam positive, quam negative sumptos. Dividantur singuli termini per terminos progressionis 1, 2, 4, 8, & fiet æquatio $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$ habens solos quatuor postremi termini divisores $+1$, -1, $+3$, -3, quorum priores tres æquationi satisfaciunt, ut notavimus num. 258. Quare etiam æquationis $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ radices habebuntur iis multiplicatis per 2, eruntque $+2$, -2, $+6$, qui soli inter tot illos divisores satisfacient quæstioni.

279. Potest etiam inverti tota æquatio ita, ut postremus terminus fiat primus, penultimus fiat secundus, & ita porro, dividendo unitatem per æquationis radicem, posito nimirum $x = \frac{1}{y}$, tum ablata fractione habente y pro denominatore.

280. In æquatione $x^3 - 6x^2 - 4x + 24 = 0$ cu-

cujus radices sunt $+2$, -2, $+6$ (per n.278) posito $x=\frac{1}{y}$, fit $\frac{1}{y^3}-\frac{6}{y^2}-\frac{4}{y}+24=0$, ac multiplicando per y^3 fit $1-6y-4y^2+24y^3=0$, sive ordinando, ac dividendo per 24, fit $y^3-\frac{4}{24}y^2-\frac{6}{24}y+\frac{1}{24}=0$, cujus æquationis radices sunt $+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}$, ut patebit substituendo.

281. Eo autem pacto radix maxima evadit minima, & viceversa, sed signum non mutant. Potest autem obtineri, ut maxima mutetur in minimam, & minima in maximam etiam augendo, vel minuendo radicem adhuc incognitam, idque ita, ut etiam mutetur signum e negativo in positivum, vel viceversa; atque alia etiam multa, & admodum utilia eodem incremento, vel decremento radicum obtinentur. Id autem præstatur ponendo $x=y+b$, ubi valor y evadit minor, vel major, quam x, prout b fuerit valoris positivi, vel negativi.

282. Sit æquatio $x^3+px^2+qx+r=0$, posito $x=y+b$, & substituto $\overline{y+b}^3$ pro x^3, $\overline{y+b}^2$ pro x^2, $y+b$ pro x, habebitur sequens æquatio.

$$\begin{array}{llll} y^3+3by^2 & +3b^2y & +b^3 & =0. \\ \quad +py^2 & +2bpy & +b^2p & \\ & +qy & +bq & \\ & & +r & \end{array}$$

283. Si

283. Si in æquatione $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$, cujus radices (per num. 258) sunt $-1 + 1, + 3$, libeat augere singulas radices per numerum 2, & ponatur -3 pro p, -1 pro q, $+3$ pro r, & -2 pro b, collecta singulorum coefficientium summa, habebitur æquatio $y^3 - 9y^2 + 23y - 15 = 0$; cujus radices erunt $-1 + 2, + 1 + 2, + 3 + 2$, sive $1, 3, 5$, ut patebit substituendo eos valores pro y.

284. Si autem ita magnus assumatur valor b, ut augendo radicem, omnia terminorum signa alternentur, jam omnes radices negativæ mutabuntur in positivas, ac maxima negativa jam evadet minima positiva, vel si minuendo, omnia signa evadant positiva, omnes radices positivæ mutabuntur in negativas, & maxima positiva evadet minima negativa; ac si omnibus signis continuatis omnes in primo casu fuissent negativæ, vel omnibus alternatis, omnes in secundo positivæ, minima etiam utrobique in maximam mutaretur, ut patet, & facile est exempla assumere, & rem experiri.

285. Licebit eo pacto, etiam limites, intra quos radix aliqua continetur deprehendere. Nam si substitutis diversis valoribus pro b, accedat una ex alternationibus signorum in primo casu, vel una e continuationibus in secundo; una e radicibus mutabitur ibi e negativa in positivam, hic e positiva in negativam. Quare inter binos ejusmodi valores b, inter quorum substitutiones illa mutatio facta est, debet consistere aliqua radix, quæ nimirum altero ex illis elisa non fuerat, altero eliditur, & signum contrarium accipit.

286. Si

286. In æquatione $x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$, habentur binæ alternationes signorum in transitu a secundo termino ad tertium, & a tertio ad quartum, & una continuatio in transitu a primo ad secundum: facto $x + 2 = y$, sive $x = y - 2$, habetur æquatio $y^3 - 4y^2 + 3y + 8 = 0$, in qua pariter binæ sunt alternationes, & una continuatio. Quare nulla radix adhuc e negativa migravit in positivam. Facto autem $x = y - 4$ habetur $y^3 - 10y^2 + 31y - 22 = 0$, ubi jam omnes sunt alternationes signorum; adeoque radix negativa migravit in positivam; quæ proinde, si realis est, debet consistere inter -2, & -4, cum $x + 2$ manserit negativi valoris, $x + 4$ migraverit in positivum. Et quidem patebit substitutione, ejus æquationis radicem esse -3.

287. Licebit præterea ex quavis æquatione admodum facile eliminare secundum terminum. Si enim ita assumatur valor ille arbitrarius b, ut sit $3b + p = 0$, sive $3b = -p$, & $b = -\frac{1}{3}p$, secundus terminus omnino evanescet; & quoniam generaliter in quavis æquatione $x^m + px^{m-1}$ &c. $= 0$ facto $y + b = x$, haberi debet post substitutionem

$$y^m \begin{array}{l} + mby^{m-1} \\ + py^{m-1} \end{array} \text{ \&c.} = 0,$$

patet generaliter eliminari secundum terminum, si fiat $mb + p = 0$, adeoque $b = -\frac{1}{m}p$; & habebitur hic canon generalis

ralis pro eliminando ſecundo termino æquationis ipſius. Aſſumatur nova incognita, cui addatur coefficiens ſecundi termini, diviſus per numerum, qui exprimit gradum æquationis, cum ſigno oppoſito ei, quem habebat ipſe coefficiens, & facta ſubſtitutione, evaneſcet ſecundus terminus.

288. Juxta hunc canonem in æquatione $x^3 - 3x^2 - 2x + 5 = 0$, facto $y + 1 = x$, evaneſcet ſecundus terminus, ut patebit ipſa ſubſtitutione.

$$
\begin{array}{rcl}
y^3 + 3y^2 + 3y + 1 & = & x^3 \\
- 3y^2 - 6y - 3 & = & -3x^2 \\
- 2y - 2 & = & -2x \\
+5 & = & +5 \\
\hline
y^3 \quad * \quad - 5y + 1 & = & 0
\end{array}
$$

289. Quod ſi coefficiens ſecundi termini dividi non poſſit per exponentem illum; adhuc tamen poſſunt fractiones evitari, multiplicando prius juxta num. 265 terminos æquationis ipſius, per terminos progreſſionis geometricæ incipientis ab unitate, cujus progreſſionis ſecundus terminus ſit ille exponens: ut ſi æquatio ſit $x^3 - 2x^2 + 4x - 8 = 0$, poteſt multiplicari per 1, 3, 9, 27, & habebitur $x^3 - 6x^2 + 36x - 216 = 0$, & jam 6 poterit dividi per 3, ac aſſumi $y + 2 = x$.

290. Ipſa

290. Ipsa secundi termini elisione potest resolvi quævis æquatio secundi gradus, & formula generalis provenit eadem prorsus, quam num.208 invenimus. Sit enim æquatio $x^2 + px + q = 0$, facto $y - \frac{1}{2}p = x$, & facta substitutione invenietur $y^2 - \frac{1}{4}pp + q = 0$.

$$\begin{array}{l} y^2 - py + \frac{1}{4}pp = x^2 \\ \quad + py - \frac{1}{4}pp = + px \\ \qquad\qquad + q = + q \\ \hline y^2 \; * \; - \frac{1}{4}pp = 0 \\ \qquad + q \\ \hline \end{array}$$

291. Ac proinde erit $y^2 = \frac{1}{4}pp - q$, & $y = \pm\sqrt{(\frac{1}{4}pp - q)}$, ac $x = y - \frac{1}{2}p = -\frac{1}{2}p \pm \sqrt{(\frac{1}{4}pp - q}$.

292 Ut autem positione $y + b = x$ in æquatione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ eliminavimus n.287. secundum æquationis terminum per æquationem primi gradus $3b + p = 0$, adeoque $b = -\frac{1}{3}p$, sic posset eliminari tertius, ponendo in formula numeri 282, $b^2 + \frac{2}{3}pb + \frac{1}{3}q = 0$, sed resolvenda esset æquatio secundi gradus ad inveniendum valorem b, qui esset $= -\frac{1}{3}p \pm \sqrt{(\frac{1}{9}p^2 - \frac{1}{3}q)}$ & res succederet, quoties vel valor q non esset positivus, vel ejus triens non esset major quam $\frac{1}{9}p^2$, ne nimirum radix evaderet imaginaria, juxta num.215.

293. Ge-

293. Generaliter autem in omni æquationum genere facile demonstratur, quartum terminum eliminari posse per æquationem gradus tertii, quintum per æquationem quarti, & ita porro. Postremi vero termini eliminatio restituit æquationem non solum ejusdem gradus cum ea, e qua eliminari debet quod indè consequitur, sed eandem prorsus cum ipsa. Sic in casu præsenti ad eliminandum postremum terminum oporteret in ipsa formula numeri 282 ponere $b^3 + pb^2 + qb + r = 0$, quæ æquatio ab æquàtione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ differt solo nomine incognitæ, quæ ibi dicitur b, hìc x.

294. Potest quidem tolli penultimus terminus per solam æquationem primi gradus, antepenultimus per æquationem secundi, & ita porro, invertendo prius æquationis terminos methodo tradita hoc ipso §. ita, ut primus terminus evaderet ultimus, & viceversa. In æquatione $x^3 + px^2 + qx + r = 0$, posito $x = \frac{1}{y}$, fit $\frac{1}{y^3} + \frac{p}{y^2} + \frac{q}{y} + r = 0$, sive multiplicando per y^3, $1 + py + qy^2 + ry^3 = 0$, & ordinando, ac dividendo per r fit $y^3 + \frac{q}{r}y^2 + \frac{p}{r}y + \frac{1}{r} = 0$. In hac æquatione posito $\frac{2q}{3r} = y$ tollitur secundus terminus, qui prius fuerat penultimus: & eodem artificio tolluntur postremi per easdem æquationes, per quas tolluntur primi.

295. Ca-

295. Cæterum si liceret postremum terminum eliminare, dividendo deinde totam æquationem per x, ea deprimeretur ad gradum inferiorem, ac sensim liceret æquationes quorumcumque graduum reducere ad primum gradum, ac resolvere. Pariter si liceret terminos simul omnes intermedios tollere ope æquationum inferiorum, resolverentur æquationes utcunque altæ. Nam ablatis terminis omnibus intermediis, relinqueretur $x^m + q = 0$, adeoque $x^m = -q$, & $x = \sqrt[m]{-q}$; illa autem inferior resolveretur per aliam inferiorem eodem pacto, donec deveniretur ad æquationem gradus primi. Sed methodus tollendi omnes terminos intermedios simul per æquationes inferiores æquatione proposita huc usque non est inventa, ac methodus, quam tradidimus, unicum tantummodo eliminat, & si nova ejusmodi substitutione tentetur eliminatio novi termini, redit statim is, qui eliminatus fuerat, nec nisi in casu aliquo particulari quorundam coefficientium determinatorum potest hujusmodi methodis eliminari plusquam unicus terminus manente eodem æquationis gradu.

296. Potest tamen iterata hac substitutione in æquationibus tertii gradus post eliminatum secundum terminum, factis positionibus aliis quibusdam, deveniri ad æquationem quandam, quæ licet sit gradus sexti, æquivaleat æquationi gradus secundi, ac resolvatur ipsa, & ejus ope resolvatur æquatio proposita gradus tertii. Sed de his in sequenti §.

§. XII.

De æquationibus tertii gradus.

297. Æquationum tertii gradus investigationem proponemus fusiorem aliquanto, profundioremque, quod eam Tyroni jam aliquanto provectiori ad exercendam analysim utilissimam esse arbitremur. Agemus autem primum de generalibus quibusdam ejus proprietatibus, tum de depressione quarundam æquationum ad gradum inferiorem, ac deinde de radicum adhuc incognitarum proprietatibus quibusdam in æquatione a secundo termino liberata, & relatione radicis maximæ, vel, ubi binæ imaginariæ sunt, radicis unicæ ad quantitates cognitas æquationem ingredientes, ubi se sponte offerent solutio æquationum habentium binas radices æquales, limites radicum æquationum omnium habentium radices inæquales, & indicium, quo nosse liceat, an omnes radices sint reales, an binæ imaginariæ. Tum progrediemur ad solutionem æquationis carentis etiam tertio termino, deinde ad solutionem æquationis eodem affectæ, ubi inventa generali trium radicum expressione proponemus varios methodos liberandi eandem ab imaginarietate, quæ se realium etiam radicum expressioni immiscet, ac inveniendi per approximationem radices ipsas, quibus expositis, proponemus reductionem æquationum quarundam gradus noni ad tertium, ac ea utemur ad inveniendam radicem cubicam binomii constantis parte rationali, & parte irrationali.

298. In primis æquatio tertii gradus potest habere

bere omnes tres radices reales, vel unam realem, & duas imaginarias. Componi enim potest e binis, altera gradus primi, quæ semper radicem realem habet, altera gradus secundi, quæ binas vel reales habere potest, vel imaginarias.

299. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 3x + 20 = 0$ componitur ex multiplicatione æquationis primi $x - 4 = 0$ habentis radicem realem 4, & æquationis secundi $x^2 - 2x - 5 = 0$ habentis binas radices reales $1 + \surd 6$, $1 - \surd 6$. Quare habet etiam ipsa tres radices reales, 4, $1 + \surd 6$, $1 - \surd 6$. At æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ componitur ex eadem primi $x - 4 = 0$, & ex alia secundi $x^2 - 2x + 5 = 0$ habente binas radices imaginarias $1 + \surd - 4$, $1 - \surd - 4$. Quare & ipsa habet binas radices imaginarias $1 + \surd - 4$, $1 - \surd - 4$, & unam realem 4.

300. Quotiescunque autem binæ radices erunt imaginariæ, radix realis habebit signum contrarium signo postremi termini. Nam æquatio secundi gradus, ut habeat binas radices imaginarias, debet habere postremum suum terminum positivum. Productum igitur omnium trium radicum habebit signum conforme signo radicis realis, cui producto cum æquetur postremus terminus æquationis tertii gradus acceptus cum signo contrario juxta §.10, habebit is postremus terminus signum contrarium signo radicis realis.

301. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 13x - 20 = 0$ composita (per num.299) ex binis $x - 4 = 0$,

$x^2 - 2x + 5 = 0$ habet, ut ibi vidimus, radicem unicam realem 4 positivam, & ejus postremus terminus -20 habet signum negativum. Æquatio $x^3 + 2x^2 - 3x + 20 = 0$ composita ex binis $x + 4 = 0$, $x^2 - 2x + 5 = 0$ habet unicam radicem realem illius prioris -4 negativam, & ejus postremus terminus $+20$ habet signum positivum.

302. Quod pertinet ad *depressionem* æquationum tertii gradus, eæ, quæ componuntur ex inferioribus irrationalitate carentibus, in hoc, ut in quovis alio gradu, per divisionem deprimi possunt ad gradum inferiorem, ut monuimus num. 193. Sed cum superiores æquationes deprimi possint etiam per divisores plurium dimensionum; æquationes gradus tertii, si possunt deprimi, debent habere etiam divisorem dimensionis simplicis ejus formæ $x + a$, de cujus inventione egimus §.3. Nam æquationes quarti gradus componi possunt ex binis secundi; at æquationes gradus tertii vel componuntur ex tribus æquationibus gradus primi, vel ex binis altera primi, altera secundi. Quare si nullus divisor invenitur in æquationibus numericis gradus tertii carentibus irrationalitate, & fractione methodo numeri 75, sive si nullam habent rationalem radicem inventam methodo numeri 259, in propria sede omnino sunt, & deprimi non possunt.

303. Æquatio $x^3 - 6x^2 + 3x + 20 = 0$ dividi potest per $x - 4$ (per num. 299) prodeunte quoto $x^2 - 2x - 5 = 0$. Quare resolvitur in duas $x - 4 = 0$,

$= 0$, $x^2 - 2x - 5 = 0$, & habet ex prima radicem $x = 4$, e ſecunda binas radices $x = 1 + \sqrt{6}$, $x = 1 - \sqrt{6}$. At æquatio $x^3 - 6x^2 + 3x + 3 = 0$ deprimi non poteſt; cum e quatuor diviſoribus poſtremi termini $1, -1, 3, -3$ nullus æquationi ſatisfaciat.

304. Ad æquationes, quæ per diviſionem deprimi poſſunt, pertinet caſus, in quo ultimus terminus deſit: tunc enim (per num. 246) una e radicibus debet eſſe $= 0$, & æquatio deprimitur ad ſecundum gradum, dividendo per x.

305. Si ſit $x^3 + px^2 + qx = 0$, dividendo per x erit $x^2 + px + q = 0$, ut ſi ſit $x^3 - 2x^2 - 5x = 0$, erit $x^2 - 2x - 5 = 0$, cujus æquationis radices cum ſint $x = 1 \pm \sqrt{6}$, æquatio propoſita habebit tres radices $x = 0$, $x = 1 + \sqrt{6}$, $x = 1 - \sqrt{6}$.

306. Ut autem progrediamur ad methodos generales reſolvendi æquationes tertii gradus, ſive eæ deprimi poſſint, ſive non poſſint; in primis methodo numeri 287. auferatur ſecundus terminus, ſi eo æquatio propoſita non careat, & reducetur ad hanc formam $x^3 + qx + r = 0$, in qua contemplanda nonnihil immorabimur.

307. In æquatione ejus formæ quævis e tribus radicibus debet æquari reliquarum ſummæ cum ſigno contrario acceptæ, quod eſt commune æquationibus omnibus ſecundo termino carentibus, in quibus nimirum ſumma omnium radicum $= 0$ juxta

I 3 num. 244.

num. 244. Quare binæ ex iis debent esse negativæ, & una positiva, vel binæ positivæ, & una negativa, cum sine signorum oppositione illa elisio haberi non possit, & bina signa per tres radices distribui non possint, nisi ita, ut una habeat alterum, alterum autem reliquæ binæ. Illa autem, quæ habebit signum contrarium signo reliquarum, debebit esse major singulis, a quibus nimirum cum eodem signo in unam summam coalescentibus eliditur, adeoque erit omnium maxima. Quamobrem ipsa maxima radix habebit signum contrarium signo postremi termini r, cum nimirum reliquarum productum signum conforme habentium debeat semper esse positivum, adeoque productum omnium, sive postremus terminus r cum signo contrario acceptus debeat sequi signum radicis maximæ. Quod si binæ radices fuerint imaginariæ, radix illa unica realis habenda erit pro maxima, cum productum positivum imaginariarum ostendat, eas habendas esse pro simul negativis, vel simul positivis, & argumento inde deducto ostensum sit num. 300, radicem realem habere signum contrarium signo postremi termini.

308. Æquatio $x^3 - 28x + 48 = 0$ habet pro radicibus $+2$, $+4$, -6, ut patebit substituendo. Est autem $2 + 4 = 6$, $2 - 6 = -4$, $4 - 6 = -2$; nimirum summa binarum quarumcunque cum signo contrario accepta æquatur tertiæ. Sunt vero binæ positivæ $+2$, $+4$, & una negativa -6, atque hæc solitaria est omnium maxima, & habet signum contrarium signo postremi termini $+48$. Exemplum æquationis habentis binas radices

ces imaginarias, & signum radicis realis contrarium signo postremi termini dedimus num. 301.

309. Quod si in æquatione tertii gradus carente secundo termino binæ radices habentes signum conforme fuerint æquales inter se; singulæ æquabuntur dimidio radicis maximæ cum signo contrario acceptæ, cum nimirum ambæ simul ipsi toti æquales esse debeant. Et quoniam illa tertia radix debet esse realis, ac radicis realis dimidium reale est; patet, binas radices imaginarias in hujusmodi æquationibus nunquam fore inter se æquales.

310. In casu autem binarum radicum æqualium coefficiens tertii termini debet continere tres quadrantes quadrati radicis maximæ, & habere signum negativum, postremus autem terminus continebit quadrantem cubi radicis maximæ. Si enim radix maxima dicatur $2a$, erit ejus quadratum $4aa$, & cubus $8aa$. Porro singulæ e radicibus minoribus erunt $= -a$. Productum earum erit aa, quod ob signa earum conformia erit semper positivum, productum autem maximæ cum utralibet erit $-2aa$, quod ob contrarietatem signorum habebit semper signum negativum. Quare summa productorum, quæ æquatur coefficienti tertii termini, erit $-2aa$, $-2aa$, $+aa = -3aa$, semper negativa, & æqualis tribus quadrantibus quadrati $4aa$ radicis maximæ. Productum autem omnium simul erit $aa \times 2a = 2a^3$ quadrans cubi $8a^3$.

311. In eodem casu binarum radicum æqualium erit cubus tertiæ partis coefficientis tertii termini acceptus cum signo contrario æqualis quadrato di-

midii postremi termini, sive $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}rr$. Est enim (per num. 311) ille coefficiens $-3aa$; ac postremus terminus $2a^3$. Quare $\frac{1}{3}q = -aa$, $\frac{1}{2}r = a^3$, ac proinde illius cubus $= -a^6$, hujus quadratum $= a^6$.

312. Quare si in æquatione tertii gradus carente secundo termino, fuerit $-\frac{1}{27}q^3 = \frac{1}{4}rr$, sive $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 0$, æquatio habebit binas radices minores inter se æquales, & invenietur radix maxima sumendo vel $\sqrt{(-\frac{4}{3}q} = 2\sqrt{(-\frac{1}{3}q}$, vel $\sqrt[3]{(-4r)}$, ac præmittendo signum contrarium signo postremi termini r; minores vero radices invenientur sumendo dimidium maximæ cum signo contrario.

313. In æquatione $x^3 - 12x + 16 = 0$ est $q = -12$, $r = 16$. Quare $\frac{1}{3}q = -4$, $\frac{1}{2}r = 8$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 64 - 64 = 0$. Ea igitur æquatio habet binas radices minores æquales. Radix maxima eruta e formula $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)} = 2\sqrt{4} = 2 \times \pm 2$, erit -4 præfixo signo negativo, quod est contrarium signo postremi termini $+16$, & eadem eruitur ex formula $\sqrt[3]{(-4r)} = \sqrt[3]{(-4 \times 16)} = \sqrt[3]{(-64)} = -4$. Reliquæ autem erunt $+2$, $+2$.

$+2$. Eas vero esse ejus æquationis radices, patebit substituendo, vel multiplicando per se invicem $x+4=0$, $x-2=0$, $x-2=0$. Patent igitur in hac æquatione quæcunque diximus de casu binarum radicum æqualium, & usus eorundem ad inveniendas ejusmodi æquationum radices.

314. Quod si binæ radices signum conforme habentes fuerint inæquales, sed reales; adhuc coefficiens tertii termini semper erit negativus, postremus terminus opponetur signo radicis maximæ, & quadratum radicis maximæ erit minus quatuor trientibus illius, majus autem ipso accepto cum signo contrario, cubus vero major quadruplo postremo termino, sive erit radix maxima minor quam $\sqrt{(-\frac{4}{3}q)}$, major tamen, quam $\sqrt{-q}$, & major quam $\sqrt[3]{(-4r)}$.

315. Si enim sint radices minores $-a+b$, $-a-b$, quarum summa cum sit $-2a$, erit radix maxima $2a$, illarum productum erit $aa-bb$; producta maximæ cum singulis $-2aa+2ab$, $-2aa-2ab$, ac proinde productorum summa $aa-bb-4aa=-3aa-bb$, productum autem omnium $2a(aa-bb)=2a^3-2abb$. Quare erit $q=-3aa-bb$, qui ob quadrata aa, bb realium quantitatum semper positiva, erit valor semper negativus, at $r=-2a(aa-bb)$, erit valor semper contrarius valori a; nam ob radicem $-a-b$ minorem maxima $2a$ negative accepta, debet esse b minor quam a, adeoque $aa-bb$ valor semper positivus, & $2a(aa-bb)$ ejusdem signi

cum

cum a, ac $-2a(aa-bb)$ signi oppositi, quod quidem etiam num. 307 demonstratum fuerat, nimirum postremum terminum sequi signum oppositum signo radicis maximæ. Cum vero sit $-\frac{1}{3}q = aa + \frac{1}{3}bb$, erit $-\frac{4}{3}q = 4aa + \frac{4}{3}bb$, quo valore est minus quadratum radicis maximæ $4aa$. Sed ob bb minorem aa, erit $3aa + bb$, sive $-q$ minus, quam $4aa$, nimirum quadratum idem $4aa$ majus coefficiente q accepto cum signo contrario. Demum valor $r = -2a(aa-bb)$ erit minor, quam $2a^3$, ob $aa-bb$ minorem, quam aa, adeoque $4r$ minus, quam $8a^3$ cubus radicis maximæ.

316. Quod si binæ illæ radices fuerint imaginariæ, coefficiens tertii termini poterit esse, vel positivus, vel negativus; & si negativus fuerit, quadratum radicis realis erit majus quatuor ejus trientibus, cubus vero ejusdem minor quadruplo postremi termini accepti cum signo contrario.

317. Nam in casu radicum imaginariarum erit b radix quantitatis negativæ, adeoque bb quantitas negativa, & $-bb$ positiva: ac proinde tertii termini coefficiens $q = -3aa - bb$ vel reducetur ad quantitatem positivam, si terminus positivus $-bb$ eliserit negativum $-3aa$, vel eo existente minore, manebit quantitas negativa, minor tamen, quam $3aa$, sive minor, quam tres quadrantes quadrati $4aa$ radicis maximæ. At $aa-bb$ erit quantitas positiva ob aa semper positivum, & $-bb$ pariter positivum in hoc casu, ac erit major, quam aa, adeoque $2a \times (aa-bb)$ sive $-r$ erit quantitas major, quam

$2a^3$,

$2a^3$, sive major, quam quadrans cubi $8a^3$ radicis ejusdem.

318. Porro hinc infertur quantitatem illam $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ quæ in casu binarum radicum æqualium num. 312 fuerat $= 0$, in casu binarum radicum imaginariarum fore semper positivam, in casu omnium realium negativam. Nam demonstratum est n. 315 in casu radicum omnium realium facta radice maxima $= 2a$ fore $4a^2$ minorem, quam $-\frac{4}{3}q$, & $8a^3$ majorem quam $4r$. Quare erit a^2 minor quam $-\frac{1}{3}q$, & a^3 major, quam $\frac{1}{2}r$, ac proinde ibi cubando, hic quadrando, erit a^6 minor, quam $-\frac{1}{27}q^3$ & idem a^6 major, quam $\frac{1}{4}rr$, ac proinde $-\frac{1}{27}q^3$ major, quam $\frac{1}{4}rr$, & existente q in eo casu semper negativo, erit $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$, quantitas negativa. In casu autem binarum radicum imaginariarum, si q est valoris negativi prorsus contrarium accidet, cum demonstratum sit num. 317, esse $4a^2$ majorem quam $-\frac{4}{3}q$, & $8a^3$ minorem, quam $4r$. Quod si q fuerit valoris positivi, patet $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ fore quantitatem penitus positivam.

319. Hoc theorema magno deinde futurum usui, sic etiam immediate demonstratur. Capiatur æquatio secundi gradus $x^2 + 2ax + aa = 0$, cujus ra-
$-3c$
dices cum sint $-a + \sqrt{-3c}$, $-a - \sqrt{-3c}$, ea

ea continebit binas radices reales, vel binas imaginarias, prout c fuerit valoris negativi, vel positivi, nimirum prout $-3c$ fuerit e contrario valoris positivi, vel negativi. Ea, ut efficiat æquationem tertii gradus carentem secundo termino, debet duci in æquationem $x - 2a = 0$, ac exurget æquatio tertii gradus
$$x^3 \begin{matrix} -3aax \\ -3cx \end{matrix} \begin{matrix} -2a^3 \\ +6ac \end{matrix} = 0.$$
In hac æquatione erit $q = -3aa - 3c$, $r = -2a^3 + 6ac$; ac proinde $\frac{1}{3}q = -aa - c$, $\frac{1}{2}r = -a^3 + 3ac$, $\frac{1}{27}q^3 = -a^6 - 3a^4c - 3a^2c^2 - c^3$, & $\frac{1}{4}rr = a^6 - 6a^4c + 9a^2c^2$. Quare $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = -9a^4c + 6a^2c^2 - c^3 = -c \times (9a^4 - 6a^2c + c^2) = -c(3a^2 - c)^2$, qui valor, ob quadratum $(3a^2 - c^2)^2$ semper positivum, erit positivus, vel negativus, prout e contrario valor c fuerit negativus, vel positivus, sive prout binæ æquationis radices imaginariæ fuerint, vel omnes reales.

320. Ut in exemplis numericis ab hoc postremo sumamus exordium, in æquatione $x^3 - 30x + 36 = 0$, quæratur, an omnes radices sint reales, an binæ imaginariæ. In ea est $r = 36$, $\frac{1}{2}r = 18$, $q = -30$, $\frac{1}{3}q = -10$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{17}q^3 = 324 - 1000 = -676$. Cum igitur ea quantitas sit negativa, omnes ejus æquationis radices reales sunt. At in æquatione $x^3 + 3x - 14 = 0$ ex eo ipso, quod ter-

tertius terminus sit positivus, constat, binas radices esse imaginarias. Quod si esset $x^3 - 3x - 14 = 0$, esset $\frac{1}{2}r = -7$, $\frac{1}{3}q = -1$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 49 - 1 = 48$, quæ quantitas cum sit positiva, infertur, adhuc binas ejus radices esse imaginarias.

321. Jam vero primæ æquationis $x^3 - 30x + 36 = 0$ radix maxima debet esse minor quam $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)}$ & major, quam $\sqrt{-q}$, ut etiam major, quam $\sqrt[3]{4r}$: nimirum debet esse minor, quam $2\sqrt{10}$, sive, quam $\sqrt{40}$, & major, quam $\sqrt{30}$, qui sunt limites satis arcti, ut pariter debet esse major, quam $\sqrt[3]{36}$. Hinc cum reliquæ radices debeant esse minores ipsa maxima, quævis ejus æquationis radix debet esse minor, quam $\sqrt{40}$, quod, ubi ope divisorum postremi termini 36 quæritur an ulla habeatur radix rationalis, excluderet 36, 12, 9, & relinqueret tentandos tantum 6, 4, 3, 2, 1. Sed si radix ipsa maxima forte sit rationalis, ea conclusa inter limites $\sqrt{40}$, $\sqrt{30}$, alia esse non potest nisi 6, & ea ipsa cum signo negativo ob postremum terminum $+36$ positivum. Et quidem substituto -6 æquationi satisfit, ac ea divisa per $x + 6$ relinquit $x^2 - 6x + 6 = 0$, cujus radices $3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$. Quare propositæ æquationis radices omnes reales sunt -6, $3 + \sqrt{3}$, $3 - \sqrt{3}$, quarum prima illa maxima est. Ejus autem quadratum 36 & est minus, quam $-\frac{4}{3}q$ sive quam 40, & est ma-

jus,

jus, quam $-q$, sive quam 30, ac pariter ejus cubus 216 major, quam $4r$, sive quam 144.

322. Secundæ autem æquationis $x^3 + 3x - 14 = 0$ radix realis unica debet esse minor, quam $\sqrt[3]{4r}$, nimirum minor, quam $\sqrt[3]{-56}$, adeoque adhuc minor, quam $\sqrt[3]{64}$, nimirum minor, quam 4. Quare cum ea, si rationalis est, debeat esse inter divisores postremi termini 14, & ob -14 negativum, debeat esse positiva, vel erit 1, vel 2. Hæc secunda satisfacit æquationi, ac instituta divisione per $x-2$, invenitur $x^2 + 2x + 7 = 0$, cujus radices imaginariæ $-1 \pm \sqrt{-6}$: radicis autem 2 cubus 8 minor est, quam $4r = 56$.

323. Demum in tertia æquatione $x^3 - 3x - 14 = 0$ radix unica realis debet non solum esse minor, quam $\sqrt[3]{4r}$, sive quam $\sqrt[3]{56}$, sed etiam major, quam $2\sqrt{(-\frac{1}{3}q)}$, sive quam $2\sqrt{1}$, vel quam 2. Quare debet esse minor, quam 4, major quam 2, adeoque non potest esse nisi ± 3, qui numerus cum non habeatur inter divisores postremi termini 14, ea æquatio rationalem radicem non habet, nec potest deprimi per divisionem.

324. His perspectis progrediamur ad casum, in quo in formula generali $x^3 + qx + r = 0$, elimito secundo termino, desit etiam tertius, ac existente $q = 0$ reducatur ad formam $x^3 + r = 0$. Hujusmo-

jusmodi æquatio resolvetur methodo exposita n. 165 vel 204; erit enim $x^3 = -r$, & $x = \sqrt[3]{-r}$. Hæc autem expressio continebit tres valores, unum realem, cum (per num. 31) unica sit radix realis cubica, & binas imaginarias ejus formæ, quam invenimus num. 97, nimirum si ponatur $r = -a^3$, erit $x^3 = a^3$, & tres valores erunt $x = a$; $x = a \times \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$; $x = a \times \left(\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}\right)$.

325. Hujusmodi autem binæ radices imaginariæ ex ipsa æquatione $x^3 - a^3 = 0$ facile deducuntur; ac simul colligitur nullas alias haberi præter eas tres tertias radices. Cum enim ex ea æquatione eruatur $x^3 = a^3$, & $x = a$, si ea ipsa dividatur per $x - a$, prodit æquatio $x^2 + ax + a^2 = 0$, qua resoluta (per num. 228) habetur $x = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(\frac{1}{4}aa - aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \sqrt{(-\frac{3}{4}aa)} = -\frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}a\sqrt{-3} = a \times \left(\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\right)$. Quare si est $x^3 = a^3$, adeoque, $x^3 - a^3 = 0$, debet x habere unum ex iis tribus valoribus.

326. Si sit $a = 1$, erunt tres unitatis radices tertiæ 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{1}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, ac quantitatis cujusvis radices tertiæ habebuntur, si ejus radix realis ducatur in hosce tres valores. Numeri

ri 64 radices tertiæ erunt 4×1, $4 \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $4 \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$.

327. Porro harum etiam imaginariarum radicum usus nobis jam occurret in resolutione æquationum affectarum tertio termino, ac proinde non erit abs re eas considerare diligentius.

328. In primis singularum e radicibus 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ cubus erit 1, ut de prima patet, de reliquis vidimus §. 4: Deinde binarum imaginariarum summa est -1, cum sit $\frac{-2}{2}$, productum autem est 1, cum sit $\frac{1+\sqrt{-3}-\sqrt{-3}+3}{4} = \frac{1+3}{4} = \frac{4}{4}$. Id autem patet etiam ex eo, quod eæ radices oriantur ex æquatione $x^2 + ax + aa = 0$, sive posito 1 pro a, $x^2 + x + 1 = 0$, cujus coefficiens secundi termini, sive summa radicum cum contrario signo acceptarum est 1, & postremus terminus, sive earum productum pariter 1.

329. Hinc consequitur binas illas radices imaginarias non esse habendas pro æqualibus illi reali 1, cum earum summa sit ipsi æqualis, quæ quidem nec haberi debent pro æqualibus inter se, cum earum altera sit summa quantitatum $-\frac{1}{2}$, $+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, altera earundem differentia, ut supra etiam generaliter demon-

monstravimus num. 309, in aequatione tertii gradus carente secundo termino binas radices imaginarias non posse esse inter se aequales. Ambae autem habendae erunt pro negativis; cum earum productum positivum 1 ostendat, utranque habere idem signum, & summa earum negativa — 1 oriri non possit e binis quantitatibus positivis. Ac ea pariter omnia cum antea demonstratis apprime congruunt.

330. Jam vero ut exhibeamus generalem solutionem in formula $x^3 + qx + r = 0$, ponatur $z + u = x$, & facta substitutione habebitur.

$$\begin{array}{l} z^3 + 3uz^2 + 3u^2z + u^3 = x^3 \\ + qz \quad + qu \quad\quad = qx \\ \quad\quad\quad\quad + r = r \end{array}$$

331. Ibi cum binae novae quantitates z, & u introductae sint, ut summa omnis sit $= 0$, licebit in binas partes summam dividere, & positis singulis $= 0$ derivare binas aequationes, quae illas novas incognitas determinent. Ponatur igitur $z^3 + r + u^3 = 0$, & $3uz^2 + 3u^2z + qz + qu = 0$. In hac secunda aequatione dividendo per $z + u$, habebitur $3uz + q = 0$, ac $u = -\frac{q}{3z}$ adeoque $u^3 = -\frac{q^3}{27z^3}$. Eo autem valore substituto in prima aequatione, fiet $z^3 + r - \frac{q^3}{27z^3} = 0$, sive $z^6 +$

$rz^3 - \frac{1}{27} q^3 = 0$, qua æquatione resoluta ob z^6 & z^3 more æquationum gradus secundi methodo numeri 220, erit $z^3 = -\frac{1}{2} r \pm \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$, adeoque $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r \pm \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$.

332. Invento valore z, invenire licet valorem u, vel ope æquationis $z^3 + r + u^3 = 0$, vel ope æquationis $3uz + q = 0$. Ex prima fit $u^3 = -r - z^3 = -r + \frac{1}{2} r \mp \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)} = -\frac{1}{2} r \mp \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$, ac $u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r \mp \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$ ita, ut si pro z assumatur valor positivus in radice inclusa, & $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r + \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$ pro u debeat idem assumi negativus, & $u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r - \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$, contra vero si pro z assumatur $\sqrt[3]{-\frac{1}{2} r - \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$ obveniat $u = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r + \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$. Quamobrem valor $x = z + u$ erit $\sqrt[3]{-\frac{1}{2} r + \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r - \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$, vel $\sqrt[3]{-\frac{1}{2} r - \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r + \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}}$ quod eodem redit, cum solum binorum terminorum mute-

mutetur ordo, & summa sit prorsus eadem, ipsis terminis iisdem existentibus utrobique.

333. Ope æquationis $3uz + q = o$ obvenisset valor $u = \frac{-q}{3z} = \frac{-q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}}$, qui magis implexus est, sed eodem reducitur. Nam si multiplicentur invicem $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ & $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$, habetur $\sqrt[3]{(\frac{1}{4}rr - \frac{1}{4}rr - \frac{1}{27}q^3)} = \sqrt[3]{(-\frac{1}{27}q^3)} = -\frac{1}{3}q$: ac proinde si $-\frac{1}{3}q$ dividatur per eorum valorum alterum, prodit alter, & $\frac{-q}{3\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}}$ est idem, ac $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$.

334. Potuisset ope æquationum $z^3 + r + u^3 = o$, & $3uz + q = o$ erui prius valor u, tum ex eo deduci valor z; & quoniam eas æquationes ii bini valores u, & z prorsus eodem modo ingrediuntur, idem valor prodiisset pro u, qui prodiit pro z, & viceversa. Fuisset nimirum e secunda æquatione $z^3 = \frac{-q^3}{27u^3}$, ac inde in prima $\frac{-q^3}{27u^3} + r + u^3 = o$, sive $u^6 + ru^3 - \frac{1}{27}q^3 = o$, $u = \sqrt[3]{-}$

$\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$, & eadem prorſus methodo $z = \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r \mp \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$. Iccirco autem, uterlibet valorum z, & u quæratur, provenit ſimul valor utriuſque., & ſi alter deinde cum ſigno poſitivo aſſumitur, alter negativum habebit, ac viceverſa, quod etiam ſupra notavimus num. 234. in caſu prorſus ſimili.

335. Jam vero formula $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}} + \sqrt[3]{-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}}$ in illâ radice inclusâ $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ imaginarietatem involvet, quotieſcunque valor q fuerit negativus, & $\frac{1}{27}q^3$ majus quam $\frac{1}{4}r^2$ nimirum quotieſcunque tertius terminus æquationis fuerit negativus, & cubus ejus trientis major quadrato dimidii poſtremi termini: in cæteris autem caſibus omnibus formula ab imaginarietate libera erit. Nam $\frac{1}{4}rr$ cum ſit quadratum quantitatis realis, erit ſemper valoris poſitivi, ac proinde $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ non poteſt eſſe valoris negativi, niſi ſit valoris negativi q, & $\frac{1}{27}q^3$ ſuperet $\frac{1}{4}rr$.

336. Poro imaginarietas illa habebitur, quotieſcunque omnes tres æquationis radices reales erunt, & eadem excludetur, quotieſcunque una radix erit realis, & binæ imaginariæ. Nam num. 318 oſten-

ostendimus, quantitatem $\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3$ fore negativam, quotiescunque omnes æquationis radices reales erunt, positivam, quotiescunque binæ fuerint imaginariæ.

337. Considerando autem eamdem formulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ ea, quæ quidem prima fronte videtur continere valorem unicum, potest habere valores 9 diversos. Si enim $-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$ dicatur c, $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ habebit (per n. 326) hosce tres diversos valores, c, sive $c\times 1$, $c\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $c\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, & pariter si $-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$ dicatur e, secundus formulæ terminus habebit quemvis ex hisce tribus valoribus, e, $e\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $e\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Quare si singuli e prioribus tribus valoribus conjungantur cum quovis e tribus posterioribus, orientur 9 diversæ combinationes. Sed tres tantum ex iis 9 valoribus formulæ ad præsentem quæstionem pertinent, & exhibent ternas æquationis radices, nimirum $c+e$, $c\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}+e\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$, $c\times\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}+e\times\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. Nam ex vi

æquationis $3uz+q=0$, sive $uz=-\frac{1}{3}q$, binarum radicis partium u, & z productum debet esse $-\frac{1}{3}q$, adeoque semper idem. Assumptis igitur valoribus c & e habentibus formam realem, e cæteris ii solum una conjungi possunt, qui invicem multiplicati exhibeant ce. Porro cum ex tribus radicibus 1, $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, $\frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$ solum prima in se ducta, & secunda, ac tertia invicem multiplicatæ efficiant 1, ut patebit multiplicanti, eæ solum conjungi possunt ita, ut vel adhibeatur unitas cum utroque valore c & e, vel ponatur prima e binis imaginariis cum c, & secunda cum e, vel viceversa secunda cum c, & prima cum e.

338. Porro binomii hujus formæ $m \pm \sqrt{n}$, quam nimirum formam habet $-\frac{1}{2}r \pm \sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$; radix cubica extrahi quandoque potest habens formam eandem ita, ut radicalis termini signum in radice sit idem, ac in cubo. Nam si fiat cubus quantitatis $a \pm \sqrt{b}$ habebitur (per n.99) $\overline{a^3 \pm 3a^2\sqrt{b}}$ $+3ab \pm b\sqrt{b} = a^3 + 3ab \pm \sqrt{(3a^2+b)^2 b}$, ubi si a^3+3ab dicatur m, $(3a^2+b)^2 b$ dicatur n, habebitur $m \pm \sqrt{n}$, formæ ejusdem cum $a \pm \sqrt{b}$. Sic binomii $1+\sqrt{2}$ cubus est $1+3\sqrt{2}$ $+3\times 2+2\sqrt{2}=7+5\sqrt{2}=7+\sqrt{50}$, binomii $1-\sqrt{2}$ cubus $1-3\sqrt{2}+3\times 2-2\sqrt{2}=7-5\sqrt{2}=7-\sqrt{50}$. Quare si radix

cubi-

cubica valoris $-\frac{1}{2}r + \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ dicatur $m + \sqrt{n}$, adeoque radix cubica valoris $-\frac{1}{2}r - \sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)} = m - \sqrt{n}$, tres illæ radices æquationis propositæ reducentur ad simpliciorem expressionem, erit enim $c = m + \sqrt{n}$, $e = m - \sqrt{n}$. Quare $c + e = 2m$. Deinde $c \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = (m+\sqrt{n}) \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-m + m\sqrt{-3} - \sqrt{n} + \sqrt{-3n}}{2}$ & $e \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = (m-\sqrt{n}) \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{-m - m\sqrt{-3} + \sqrt{n} + \sqrt{-3n}}{2}$, quorum summa evadit $\frac{-2m + 2\sqrt{-3n}}{2} = -m + \sqrt{-3n}$.

Demum eodem pacto $c \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = (m+\sqrt{n}) \times \frac{-1-\sqrt{-3}}{2} = \frac{-m - m\sqrt{-3} - \sqrt{n} - \sqrt{-3n}}{2}$: & $e \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = (m-\sqrt{n}) \times \frac{-1+\sqrt{-3}}{2} = \frac{-m + m\sqrt{-3} + \sqrt{n} - \sqrt{3n}}{2}$, quorum summa $\frac{-2m - 2\sqrt{-3n}}{2} = m - \sqrt{-3n}$.

339. Igitur tres radices æquationis propositæ erunt $2m$, $-m + \sqrt{-3n}$, $-m - \sqrt{-3n}$, ubi

ubi patet, primam radicem fore semper realem elisa imaginarietate, quæ forte involveretur in illo $\sqrt{u}$, reliquas fore imaginarias, ubi u fuerit valoris positivi, reales, ubi negativi, & cum valor u debeat habere idem signum, ac illud $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$; unde ortum ducit, patet tres radices fore reales, vel unam realem, & binas imaginarias, prout in valore $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ involvetur imaginarietas, vel excludetur, quod supra alia methodo generaliter demonstravimus.

340. Quod si $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ fuerit $= 0$, in eo casu etiam $\sqrt{u}$ erit $= 0$, nam binomii $a + \sqrt{0}$ cubus est $a^3 + \sqrt{0}$ & binomii $a - \sqrt{0}$ pariter $a^3 - \sqrt{0}$. Quare in eo casu tres radices sunt $2m$, $-m$, $-m$, nimirum is casus pertinet ad binas radices minores æquales ut supra demonstravimus.

341. Porro ex iis omnibus, quæ demonstrata sunt consequitur, imaginarietatem illam valoris $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ non indicare impossibilitatem radicis, cum in eo ipso casu, in quo ejusmodi imaginarietas habetur, omnes tres radices reales sint, & ipsa imaginarietas binorum terminorum elidatur, ac se mutuo destruat, sed impossibilem esse suppositionem illam, quæ num. 331 fit ad formulam inveniendam. Nimirum in illa æquatione $z^6 + rz^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0$ impossibilitas latet. Nam in casu, in quo q est quantitas negativa, & $\frac{1}{27}q^3$ major, quam $\frac{1}{4}rr$, nulla

nulla quantitas est possibilis, cujus quadratum una cum ipsa ducta in r æquetur $\frac{1}{27}q^3$, quod ad illam æquationem requiritur. Ac proinde licet x habeat valorem realem, fieri non potest ut dividatur in duas partes z, & u cum iis conditionibus, ex quibus oriatur æquatio $z^6 + rz^3 - \frac{1}{27}q^3 = 0$.

342. Impossibilitas autem, ac imaginarietas in methodo, qua radicis formula invenitur, omnino involvi debet, quotiescunque omnes tres radices æquales sunt; & id quidem continget omnino, quotiescunque investigatur formula exprimens radicem cujuscunque æquationis habentis exponentem imparem, & plusquam unam radicem realem. Cum enim, ubi plures radices habet æquatio, quævis radix eodem prorsus pacto respiciat æquationem, & ejus conditiones impleat, nulla formula eruta ex solis iis, quæ æquatio ipsa suppeditat, poterit exhibere potius unam, quam aliam. Nam ex ipsis Logicæ elementis, immo ex rectæ rationis usu constat, ex antecedenti prorsus indifferenti ad plures conclusiones, non posse unam potius deduci, quam aliam. Quare si fieri potest, ut aliquam radicem formula exprimat, debet omnes simul exprimere.

343. Jam vero cum in quavis æquatione imaginariarum radicum numerus par esse debeat, ut monuimus num. 219, & in æquatione gradus imparis numerus omnium radicum impar (per num. 237); omnino consequitur in æquatione gradus imparis realium radicum numerum non posse non esse imparem.

344. At

345. At nulla formula algebraica realibus terminis constans potest exprimere numerum radicum imparem unitate majorem. Nam si nullos radicales terminos involvat, valorem unicum præbebit, si habeat radicales exponentis imparis, ipsi unicum valorem realem habere possunt (per num.26), licet habere possint plures imaginarios juxta n.97. Quare ipsi etiam algebraicam formulam ad unicum valorem determinant. Radicales autem exponentis paris semper vel binos habebunt valores reales singuli, vel nullos, quod ex num.40. facile deducitur. Quamobrem hujusmodi radicales termini possunt exhibere parem numerum valorum realium formulæ imparem omnino non possunt. Ac proinde si qua formula impossibilitate carens exhiberet radicem realem æquationis imparis habentis plures radices reales, id præstaret, quod fieri non potest; adeoque, qui æquatione tertii gradus habente omnes radices reales formulam imaginarietate carentem quærit, is profecto oleum, & operam perdit.

346. Ut tota resolutionis ratio in numericis æquationibus evadat multo magis manifesta, sit æquatio $y^3 - 6y^2 + 3y + 10 = 0$. Posito $x + 2 = y$ ad eliminandum secundum terminum, & facta substitutione erit $x^3 - 9x + 10 = 0$. Ea æquatione comparata cum generali $x^3 + qx + r = 0$, erit $q = -9$, $r = 10$, $-\frac{1}{2}r = -5$; $\frac{1}{3}q = -3$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 25 - 27 = -2$. Quare $x = \sqrt[3]{(-5 + \sqrt{-2})} + \sqrt[3]{(-5 - \sqrt{-2})}$, ubi cum in

in $\sqrt{-2}$ involvatur imaginarietas, omnes tres æquationis radices reales sunt. Porro binomii $-5 + \sqrt{-2}$ radix cubica est $1 + \sqrt{-2}$, cum hujus cubus sit $1 + 3\sqrt{-2} + 3 \times -2 - 2 \times \sqrt{-2} = -5 + \sqrt{-2}$, adeoque binomii $-5 - \sqrt{-2}$ radix cubica $1 - \sqrt{-2}$. Erit igitur $m = 1$, $n = -2$, & proinde $2m = 2$, $-m + \sqrt{-3n} = -1 + \sqrt{6}$, $-m - \sqrt{-3n} = -1 - \sqrt{6}$.

347. Quare tres radices æquationis $x^3 - 9x + 10 = 0$ omnes reales sunt $+2$, $-1 + \sqrt{6}$, $-1 - \sqrt{6}$. Et quidem si ea ipsa dividatur per $x - 2$, habebitur $x^2 + 2x - 5 = 0$, cujus radices sunt $-1 \pm \sqrt{6}$. Cum vero sit $x + 2 = y$, tres radices æquationis propositæ $y^3 - 6y^2 + 3y + 20 = 0$ erunt 4, $1 + \sqrt{6}$, $1 - \sqrt{6}$, quæ quidem si dividatur per $y - 4$, habetur $y^2 - 2y - 5 = 0$, cujus radices sunt $y = -1 \pm \sqrt{6}$.

348. Quod si proponatur æquatio $x^3 + 3x - 14 = 0$, erit $q = 3$, $r = -14$, ac proinde $\frac{1}{3}q = 1$, $-\frac{1}{2}r = 7$, $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3 = 49 + 1 = 50$. Quare $x = \sqrt[3]{(7 + \sqrt{50})} + \sqrt[3]{(7 - \sqrt{50})}$, ubi cum $\sqrt{50}$ imaginarietatem non involvat, una erit radix realis, & binæ imaginariæ. Porro cum $7 + \sqrt{50}$ sit cubus binomii $1 + \sqrt{2}$, & $7 - \sqrt{50}$ binomii $1 - \sqrt{2}$, ut vidimus, erit $m = 1$, $n = 2$; adeoque $2m = 2$, $-m + \sqrt{-3n} = -1 + \sqrt{-6}$, $-m - \sqrt{-3n} = 1 - \sqrt{-6}$. Quare tres radices æquationis $x^3 + 3x - 14 = 0$ erunt 2,

$-1+\sqrt{-6}$, $-1-\sqrt{-6}$ prima realis, reliquæ binæ imaginariæ. Et quidem si ipsa æquatio dividatur per $x-2$, habetur $x^2+2x+7=0$, cujus radices sunt $x=-1\pm\sqrt{-6}$.

348. Atque hoc solum pacto generalis haberi posset solutio æquationum gradus tertii, quæ nimirum radicales cubicos semper involvunt, & in iis ipsis valores imaginarios; si nimirum imaginarietas ipsa in realium radicum expressionibus elidatur imaginarietate alia; quod quidem contingeret, si liceret semper quantitatis $-\frac{1}{2}r\pm\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}$ invenire radicem cubicam formæ $m\pm\sqrt{n}$. Verum id quidem raro admodum licebit. Et quidem quotiescunque æquatio tertii gradus in propria sede fuerit ita, ut per divisionem deprimi non possit ad inferiorem gradum, licebit nunquam. Nam quotiescunque illius formæ radix cubica invenietur, erit m quantitas rationalis, adeoque prima e radicibus $2m$ pariter rationalis, & divisio instituta per $x-2m$ debebit succedere. Sæpe autem illa radicis cubicæ extractio haberi non poterit, licet æquatio proposita rationales radices habuerit, & deprimi possit. Quare ad alias methodos recurrendum in ejusmodi casibus.

349. Potest autem semper imaginarietas tolli, & radix cubica, quæ ad illam formam reducatur, extrahi per series infinitas ope formulæ binomii ad potentiam indefinitam elevati, quam tradidimus num. 91, & ad radicum extractionem applicavimus num. 130. Formula radicis cubicæ binomii $x+a$ erat

erat num. 91 hujusmodi $(x+a)^{\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{3} a x^{\frac{-2}{3}} +$

$\frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} a^2 x^{\frac{-5}{3}} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} a^3 x^{\frac{-8}{3}} +$

$\frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} \times a^4 x^{\frac{-11}{3}}$ &c. binomia autem, ex quibus radix cubica extrahenda erat, sunt $-\frac{1}{2} r + \surd(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)$, $-\frac{1}{2} r - \surd(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)$. Ponatur $-\frac{1}{2} r = f^3$, $\surd(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q)^3 = g$, eritque $g^2 = \frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3$ quantitas semper realis, ac patet, ipsius g potentias pares fore semper reales, licet in casu trium radicum realium potentiæ impares imaginariæ sint. Jam vero posito f^3 pro x, & primo quidem g, tum $-g$ pro a, habebuntur sequentes binæ series,

$$(f^3+g)^{\frac{1}{3}} = f + \frac{1}{3} g f^{-2} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} g^2 f^{-5}$$

$$+ \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} g^3 f^{-8} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9}$$

$$\times \frac{-8}{12} g^4 f^{-11} \text{ \&c.}$$

$\overline{f^3}$

$$(f^3 - g)^{\frac{1}{3}} = f - \frac{1}{3} g f^{-2} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} g^2 f^{-5} - \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} g^3 f^{-8} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} g^4 f^{-11} \ \&c.$$

351. In hisce seriebus primus terminus, tertius, quintus &c., qui continebunt potentias pares valoris g, carebunt & irrationalitate, & imaginarietate, eruntque utrobique cum iisdem signis; at termini secundus, quartus, sextus &c., qui continebunt potentias ejusdem impares habebunt & irrationalitatem, & in casu trium radicum realium imaginarietatem, ac erunt in altera cum uno signo in altera cum opposito. Continebit autem quivis ex iis terminis quantitatem rationalem, & realem ductam in prima serie in g, in secunda in $-g$, sive in illa in $\sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$, in hac in $-\sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^3)}$. Nam quævis potentia impar quantitatis g, est potentia ejus par, adeoque rationalis, & realis, ducta in ipsam, ut $g^7 = g^6 \times g$. Quare & summa horum terminorum continebit quantitatem realem, & rationalem ductam in eandem radicem g cum signo ibi positivo, hic negativo. Igitur prior summa poterit fieri $= m$, & posterior $= \sqrt{n}$, ac $\sqrt{-3n} = \sqrt{-3} \times \sqrt{n}$, erit posterior summa ducta in $\sqrt{-3}$. Erit igitur.

$m = f + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} g^2 f^{-5} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} g^4 f^{-11}$ &c.

$\sqrt{-3}\,n = \frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-3} + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} \times g^3 f^{-8} \sqrt{-3}$ &c.

352. Porro in utraque serie patet terminum sequentem semper superaddere præcedenti binos terminos seriei $\frac{1}{3}, \frac{-2}{6}, \frac{-5}{9}, \frac{-8}{12}$ &, ac $g^2 f^{-6} = \frac{g^2}{f^6}$. Quare si primus terminus dicatur A, secundus B, tertius C, &c., ac $\frac{g^2}{f^6}$ dicatur Q; habebitur $m = f + \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} AQ + \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} BQ + \frac{-11}{15} \times \frac{-14}{18} CQ$ &c.

$\sqrt{-3}\,n = \frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-3} + \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} AQ + \frac{-8}{12} \times \frac{-11}{15} \times BQ + \frac{-14}{18} \times \frac{-17}{21} CQ$ &c.

353. Est autem $f = \sqrt[3]{-\frac{1}{2} r}$, $\frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-3}$

$= \frac{\sqrt{-3g^2}}{3f^2} = \frac{\sqrt{(\frac{-3}{4} rr + \frac{-3}{27} q^3)}}{3\sqrt[3]{\frac{1}{4} rr}}$, $\frac{g^6}{f^6} =$

$\frac{1}{4} rr$

$\frac{\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3}{\frac{1}{4}rr} = 1 + \frac{4q^3}{27rr}$. Igitur datis r, & q, datur primus utriusque seriei terminus, & per eum reliqui omnes, ac prima quidem series carebit semper omni imaginarietate, secunda autem carebit, si $\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3$ fuerit quantitas negativa, quæ nimirum ducta in -3 evadet positiva, at eam involvet, si ea fuerit quantitas positiva; nimirum carebit in casu trium radicum realium, eam involvet in casu binarum imaginariarum.

353. Quare habebuntur tres radices $2m$, $-m + \sqrt{-3n}$, $-m - \sqrt{-3n}$ per series infinitas, quarum prima semper carebit imaginarietate, reliquæ duæ ea carebunt, vel eam involvent, prout illæ ipsæ radices reales erunt, vel imaginariæ.

354. Hæ series erunt convergentes, & poterunt exhibere valores radicum veris proximos, quotiescunque Q fuerit quantitas unitate minor; sed ut usui esse possint, & series satis convergant, debebit esse multo minor. Cum vero sit $Q = 1 + \frac{4q^3}{27rr}$, debebit esse q quantitas negativa; nam si positiva sit, addetur unitati terminus positivus. Præterea $\frac{1}{27}q^3$ debebit esse, vel minor, quam $\frac{1}{4}rr$, vel non duplo major; nam si fuerit duplo major, vel plusquam duplo, fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ erit æqualis, vel

major

major binario; adeoque, ablatâ positivâ unitate, erit Q æqualis unitati, vel major ipsâ. Quo autem magis ad æqualitatem accedent $\frac{1}{27}q^3$, & $\frac{1}{4}rr$, eo citius converget series, quia ejus fractionis valor eo magis ad unitatem accedet, & vel ipsâ ablatâ ab unitate, vel unitate ab ipsa, relinquetur pro Q quantitas positiva, vel negativa tanto minor.

355. Quod si ea fractio $-\frac{4q^3}{27\,rr}$ fuerit æqualis unitati, & valor q negativus, erit $1+\frac{4q^3}{27\,rr}$, sive Q $=0$. Eo casu erit $\frac{1}{4}rr=\frac{1}{27}q^3$, adeoque $\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3=0$, nimirum valor $g=0$. Quare omnes termini secundæ seriei, & omnes termini primæ, præter unicum f erunt $=0$. Erit igitur $m=f=\sqrt[3]{-2r}$, & $\sqrt{(-3n)}=0$. Quare tres radices erunt $2f$, $-f$, $-f$; nimirum binæ radices minores erunt inter se æquales, quod per num. 312 debet contingere, ubi $\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3=0$.

356. Sit æquatio $x^3-9x+10=0$, eadem quæ num. 345. Erit Q unitate minor, & series satis converget: erat enim $\frac{1}{27}q^3=-27$, $\frac{1}{4}r^2=25$. Quare $\frac{4q^3}{27\,rr}=\frac{-27}{25}$, & $Q=1-\frac{27}{25}=\frac{-2}{25}=-0.08$. Primus autem primæ seriei terminus erit $f=\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r}=\sqrt[3]{-5}=-1{,}709975947$, primus

secundæ $\frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-3}$, ob $g = \sqrt{(\frac{1}{4} rr + \frac{1}{27} q^{3})} = \sqrt{-2}$, & $f^{2} = \sqrt[3]{25}$, erit $= \frac{\sqrt{-2} \times \sqrt{-3}}{3 \sqrt[3]{25}}$ $= \frac{\sqrt{6}}{3 \sqrt[3]{25}} = \frac{2.44948974278}{3 \times 2.92401773821} = 0.27923790279.$

Ex his autem termini reliqui, & ipsarum serierum valores inveniuntur, quos hic apponimus usque ad nonam decimalium notam.

Pro prima serie m.

$$A = f = -1.709975947$$

$$B = \frac{1}{3} \times \frac{-2}{6} AQ = -0{,}015199786$$

$$C = \frac{-5}{9} \times \frac{-8}{12} BQ = +0{.}000450365$$

$$D = \frac{-11}{15} \times \frac{-14}{18} CQ = -0{.}000020550$$

$$E = \frac{-17}{21} \times \frac{-20}{24} DQ = +0{.}000001109$$

$$F = \frac{-23}{27} \times \frac{-26}{30} EQ = -0{.}000000066$$

$$G = \frac{-29}{33} \times \frac{-32}{36} FQ = +0{,}000000004$$

Summa negativorum $= -1.725196349$

Summa positivorum $= +0.000451478$

Valor seriei m $= -1.724744871$

Pro

Pro secunda serie $\sqrt{-3n}$;

$$A = \frac{1}{3} g f^{-2} \sqrt{-3} = +0.279237903$$

$$B = \frac{-2}{6} \times \frac{-5}{9} AQ = -0.004136858$$

$$C = \frac{-8}{12} \times \frac{-11}{15} BQ = +0.000161797$$

$$D = \frac{-14}{18} \times \frac{-17}{20} CQ = -0.000008150$$

$$E = \frac{-20}{24} \times \frac{-23}{27} DQ = +0.000000463$$

$$F = \frac{-26}{30} \times \frac{-29}{33} EQ = -0.000000028$$

$$G = \frac{-32}{36} \times \frac{-35}{39} FQ = +0.000000002$$

Summa positivorum $= +0.279400165$

Summa negativorum $= -0.004145036$

Valor seriei $\sqrt{-3n} = +0.275255129$

357. Inde autem valores eruuntur trium æquationis radicum, $2m = -3.449489742$, $-m + \sqrt{-3n} = +1.724744871 + 0.275255129 = +2.000000000$, $-m - \sqrt{-3n} = +1.724744871 - 0.275255129 = +1.449489732$. Porro inveneramus num. 346 tres radices 2, $-1 + \sqrt{6}$,

$-1-\sqrt{6}$, sive cum sit $\sqrt{6}=2.449489743$, tres radices erant 2, 1.449489743, -3.449489743, quæ cum hic inventis ita conveniunt, ut solum habeatur discrimen unius unitatis in postrema decimalium sede radicum irrationalium ortum ex contemptu decimalium inferiorum in multiplicationibus, divisionibus, ac summis tot terminorum.

358. Notandum autem, radicem illam 2, quæ prius obvenerat sub forma $2m$ primo loco, hic obvenisse sub forma $-m+\sqrt{-3n}$ secundo loco, ob diversam nimirum rationem extrahendi radicem cubicam ex illo binomio.

359. Notandum præterea, quod supra etiam innuimus, & hic exemplo hoc ostendisse, & monuisse sit satis, illam cyphrarum multitudinem post 2 satis indicare, haberi hic radicem accuratam rationalem 2, quo numero substituto pro x, cum æquatio verificetur, patet deinde, revera eam ipsam esse accuratam æquationis radicem. Idem indicium haberetur, si post tot cyphras obvenisset 1, vel si series exhibuisset valorem 1.9999 &c. Posset enim discrimen unitatis in postrema nota provenire ex ulterioribus decimalibus contemptis, immo & plurium unitatum defectus post plures notas 9, vel excessus post plures cyphras 0, indicium nequaquam turbaret ob eandem causam. Et hoc sane pacto omne serierum genus verum valorem approximantium, indicat ipsum valorem verum, ubi accuratus habetur, ut monuimus num. 142.

360. Si assumeremus exemplum æquationis $x^3+3x-14=0$, in qua $q=3$, quantitas positiva,

va, haberemus $\frac{1}{27}q^3 = +1$, cumque sit $\frac{1}{2}r = -7$, esset $\frac{1}{4}rr = 49$, & $Q = 1 + \frac{4q^3}{27rr} = 1 + \frac{1}{49}$, qui valor cum sit unitate major, series divergit. Si esset $x^3 - 3x - 14 = 0$, esset $\frac{1}{27}q^3 = -1$, adeoque $Q = 1 - \frac{1}{49} = \frac{48}{49}$. Eo casu series convergeret, sed ita lentè, ut immensus terminorum numerus requiratur ad valorem aliquantisper approximandum. Quamobrem hæc methodus paucos admodum casus complectitur, cum excludat omnino eos omnes, in quibus tertius terminus est positivus: tum ex iis, qui negativum habent, excludat eos omnes, in quibus $\frac{1}{27}q^3$ duplo, vel plusquam duplo excedit valorem $\frac{1}{4}rr$. Inter eos autem casus, qui relinquuntur, & seriem convergentem exhibent, nulli usui esse potest, nisi $\frac{1}{27}q^3$ ad $\frac{1}{4}rr$ ita accedat, ut fractio $\frac{4q^3}{27rr}$ ab unitate parum admodum discrepet, ut nimirum ejus differentia ab unitate, quæ exhibet valorem Q, saltem ad decimam unitatis partem deprimatur.

361. Et quidem in casu unicæ radicis realis, in quo $\sqrt{(\frac{1}{4}rr + \frac{1}{27}q^3)}$ imaginarietatem non involvit, potest illa unica radix inveniri per for-

mulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}+\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r-\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$ substitutis numeris, & extracta una radice quadrata, ac binis cubicis. Ita in æquatione illa ipsa $x^3+3x-14=0$, cujus radicem realem num. 347 invenimus $=2$, liceret eandem invenire substitutis *in ea formula* numeris nimirum 7 pro $-\frac{1}{2}r$, 49 pro $\frac{1}{4}rr$, 1 pro $\frac{1}{27}q^3$: Haberetur enim $x=\sqrt[3]{7+\sqrt{50}}+\sqrt[3]{7-\sqrt{50}}$ $=\sqrt[3]{7+7.07106781 2}+\sqrt[3]{7-7.07106781 2}=$ $\sqrt[3]{14.07106781 2}+\sqrt[3]{-0.07106781 2}=$ $2.41421356 3-0.41421356 3=2$.

362. Cum vero casus trium radicum realium nec solvi possit hac formula imaginarietatem involvente, nec saltem generaliter illa radicis extractione vel per finitum binomium, vel per infinitam seriem, quæ imaginarietatem elidat; iccirco appellari solet casus irreducibilis. At non desunt methodi, quibus ipse etiam irreducibilis casus reducatur, & inveniantur æquationis radices. Proferemus unam, quæ quidem semper immediate maximam exhibet, ac ope ipsius maximæ reliquas duas, & valoris limites statim præbet, ac satis convergit, eoque magis, quo q respectu r est major.

363. In formula generali $x^3+qx+r=0$, fiat transponendo $x^3=-qx-r$, tum dividendo per x, erit

erit $x^2 = -q - \frac{r}{x}$, adeoque $x = \sqrt{(-q - \frac{r}{x})}$. Assumatur jam pro x quivis numerus, cum signo contrario signo ipsius r, & fractio $\frac{r}{x}$ erit negativa, adeoque $-\frac{r}{x}$ positiva; cumque etiam $-q$ in casu irreducibili sit (per num. 314) quantitas positiva; erit $-q - \frac{r}{x}$ valoris positivi. Extracta radice ex $-q - \frac{r}{x}$ habebitur novus valor x, qui erit major vero, si assumptus ille fuerit minor, & viceversa. Si enim pro x assumatur valor minor vero, obveniet fractio $-\frac{r}{x}$ major vero, adeoque summa $-q - \frac{r}{x}$ major vero, & ejus radix vero minor, & eadem esset demonstratio oppositi. Porro novus hic valor obveniet adhuc vero propior, errore in extractione radicis decrescente, & hoc novo valore adhibito, invenietur valor tertius adhuc propior, & ita porro.

364. In æquatione $x^3 - 9x + 10 = 0$, qua toties usi sumus, & quæ habet tres radices reales, erit $x = \sqrt{(9 - \frac{10}{x})}$.

Ponatur 1.° $x = -1$, erit $\frac{-10}{x} = 10$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{9 + 10} = \sqrt{19} = -4.4$

 Po-

Ponatur 2.° $x = -4.4$, erit $\frac{-10}{x} = 2.27$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{11,27} = -3.35$

Ponatur 3.° $x = -3.35$, erit $\frac{-10}{x} = 2.985$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.985)} = -3.462$

Ponatur 4.° $x = -3.462$, erit $\frac{-10}{x} = 2.8885$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.8885)} = -3.4479$

Ponatur 5.° $x = -3.4479$, erit $\frac{-10}{x} = 2.9003$, $\sqrt{(9 - \frac{10}{x})} = \sqrt{(11.9003)} = -3.44968$

365. Hoc pacto liceret progredi, & cum radicem maximam hujus æquationis invenerimus n.266 -3.44949, jam post quintam operationem ab ea recedimus tantum per $\frac{19}{100000}$. Porro in prima operatione habemus limites -1, & -4.4, in secunda multo arctiores -4.4, & -3.35, in tertia adhuc multo arctiores -3.35, & -3.462, in quarta adhuc etiam arctiores -3.462, & -3.4479, in quinta pariter arctiores -3.4479, -3.44968. In singulis autem operationibus augendus est notarum decimalium numerus, ut binæ vel ternæ habeantur notæ, ultra eas, in quibus jam præcedentes limites consentiunt; nam plures initio assumere, cum valor assumptus adhuc a vera radice nimis distat, res esset laboris irriti.

366. Radix hoc pacto inventa erit semper radix maxima (per num. 314); erit enim ea, quæ habebit

bit signum contrarium signo postremi termini. Poterit autem eadem methodus adhiberi, etiam in casu reducibili quotiescunque q est valoris negativi; & poterit quandoque si sit valoris positivi, dummodo $\frac{r}{x}$ ipsum superet, & $\sqrt{(-q-\frac{r}{x})}$ non evadat valor negativus. Possent pariter & minores radices æquationis irreducibilis hoc pacto aliquando inveniri assumendo pro x signum conforme ipsi r, dummodo valor $-\frac{r}{x}$, qui tum erit negativus, non superet positivum $-q$. Sed in casu æquationis reducibilis, radix illa unica realis facilius invenitur per formulam $\sqrt[3]{-\frac{1}{2}r+\sqrt{(\frac{1}{4}rr+\frac{1}{27}q^3)}}$, & binæ radices minores æquationis irreducibilis facilius, inventa maxima, invenientur sequenti methodo, quæ, inventa quavis e tribus radicibus, semper exhibebit tertiam admodum facile.

367. Sit nimirum radix inventa $=a$, & reliquarum summa (per num. 307) debebit esse $-a$, cum omnium summa sit $=0$; cumque omnium productum (per num. 242) sit $-r$, erit reliquarum productum $\frac{-r}{a}$. Quare æquatio secundi gradus illas continens erit $x^2+ax-\frac{r}{a}=0$; adeoque $x=-\frac{1}{2}a+\sqrt{(\frac{1}{4}aa+\frac{r}{a})}$.

368. In æquatione $x^3-9x+10=0$, invenimus radicem maximam $a=-3{,}44968$, hinc erit

erit $-\frac{1}{2}a = 1.72484$, erat autem $r = 10$, ac proinde $\sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{r}{a})} = \sqrt{(2.97507}$ &c. $- 2.89882) = \sqrt{(0.07625)} = 0.2761$. Quare reliquæ binæ radices 1.7248 ± 0.2753, erunt 2.0009, & 1.4487, quæ a veris 2., & 1.449489 &c., sive 1.4495 inventis n.357, in quarta aut tertia decimalium nota differunt, quia nempe in quarta differebat a vera radix illa a ad eas inveniendas assumpta. Nam si æquatio habuisset radices accuratas, & accurata radix assumeretur pro a, reliquæ etiam binæ necessario accuratæ obvenirent.

369. Si vero liberet e postrema methodo, qua radicem maximam invenimus, derivare seriem infinitam alterius formæ, exprimentem valorem radicis x, satis esset perpetuo pro x substituere valorem $\sqrt{(-q - \frac{r}{x})}$. Haberetur enim $x = \sqrt{(-q - \frac{r}{x})} =$

$$\sqrt{-q - \frac{r}{\sqrt{-q - \frac{r}{x}}}} = \sqrt{-q - \frac{r}{\sqrt{-q - \frac{r}{\sqrt{-q - \frac{r}{\sqrt{-q - r \text{ \&c.}}}}}}}}$$

370. Posset & alia series derivari, in qua per extractionem radicis cubicæ sine periculo imaginarietatis deveniretur ad valorem vero proximum, ponendo nimirum $x^3 = -r - qx$, adeoque $x = \sqrt[3]{(-r - qx)} = \sqrt[3]{-r - q\sqrt[3]{-r - q\sqrt[3]{-r - q \text{ \&c.}}}}$

Sed

Sed extractio illa radicis cubicæ est nimis operosa. Habentur autem aliæ methodi multo magis convergentes inveniendi in quovis æquationum genere radices veris proximas, ubi eæ semel innotescant a veris discrepantes minus, quam decima sui parte, de quibus infra. Quare satius est methodo, quam postremo loco adhibuimus invenire radicis maximæ limites satis arctos, iterata bis, vel ter operatione, quod ob paucitatem notarum fit admodum facile, tum iis methodis ad verum valorem propius accedere. Præterea æquationis tertii gradus irreducibilis radices admodum facile inveniuntur ope tabulæ sinuum trigonometricæ, cum pertineat is casus ad anguli trisectionem, de quo in applicatione algebræ ad Geometriam.

371. Fusè expositis iis, quæ pertinent ad æquationem gradus tertii, facile patet earum ope haberi etiam resolutionem æquationum altiorum, in quibus adsint soli quatuor termini, ac postremus incognita careat, primus habeat ejus potentiam triplam tertii, secundus duplam ejusdem; quæ proinde habeat hanc formam $x^{3m} + px^{2m} + qx^{m} + r = 0$. Posito enim $x^{m} = y$, habebitur $y^3 + py^2 + qy + r = 0$, ubi inventis valoribus y, erit $x = \sqrt[m]{y}$.

372. Hujusmodi æquationis noni gradus redactæ ad tertium ut aliquis habeatur usus, ea utemur ad investigandam radicem cubicam binomii illius formæ $m + \sqrt{n}$, qua prius usi sumus. Investigatio autem erit similis illi, quam num. 222 adhibuimus ad inveniendam similis binomii radicem quadra-

dratam, ubi obvenit æquatio gradus quarti, deprimenda ad fecundum.

373. Affumatur formula cubi binomii $x+z$, nimirum (per num. 99) $x^3+3x^2z+3z^2x+z^3$, quæ ponatur $=m+\sqrt{n}$. Si autem in binomio quæfito fuerit x pars rationalis, & z irrationalis, primus, & tertius cubi terminus carebunt irrationalitate, quam fecundus, & quartus involvent. Ponatur igitur $x^3+3z^2x=m$, & $3x^2z+z^3=\sqrt{n}$.

374. Ut ope harum æquationum eliminetur z, capiatur in fecunda valor $z^3=-3x^2z+\sqrt{n}$, in prima vero $z^2=\frac{m-x^3}{3x}$ quo ducto in z erit iterum $z^3=\frac{mz-x^3z}{3x}$. Quare æquatis hifce binis valoribus, erit $-3x^2z+\sqrt{n}=\frac{mz-x^3z}{3x}$, five $-9x^3z+3x\sqrt{n}=mz-x^3z$, vel $3x\sqrt{n}=mz+8x^3z$; ac proinde $\frac{3x\sqrt{n}}{m+8x^3}=z$. Quoniam habebatur $z^2=\frac{m-x^3}{3x}$, & hic quadrando habetur $\frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2}=z^2$, æquatis hifce valoribus jam habebitur $\frac{m-x^3}{3x}=\frac{9nx^2}{(m+8x^3)^2}$, five $(m-x^3)\times(m+8x^3)^2=27nx^3$, quæ æquatio facta mul-

multiplicatione, & ordinatis terminis, evadit

$$64x^9 - 48mx^6 - 15m^2x^3 - m^3 = 0.$$
$$+27nx^3$$

375. Porro ea reducitur ad tertium gradum, & liberatur simul a coefficiente primi termini, si ponatur $x^3 = \frac{1}{8}y$, erit enim $\frac{1}{8}y^3 - \frac{3}{4}my^2 + \frac{27n - 15m^2}{8}y - m^3 = 0$, & multiplicando per 8 fiet $y^3 - 6my^2 + (27n - 15m^2)y - 8m^3 = 0$. Qua æquatione resoluta habebitur y; & proinde $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y}$, cumque inventum fuerit $z^2 = \frac{m - x^3}{3x}$, invenietur $z = \sqrt{(\frac{m - x^3}{3x})}$.

376. Sed admodum facile hujus æquationis ope obtinebitur intentum, si consideretur, valorem x debere esse rationalem; ac proinde & $y = 8x^3$ rationalis esse debebit. Quamobrem satis erit quærere, an ea æquatio habeat radicem rationalem; & quidem ejusmodi investigatio facilior evadet, cum, ut x sit valor rationalis, debeat y habere præterea radicem cubicam rationalem, adeoque inter divisores postremi termini $8m^3$ quærendi erunt ii soli, qui habere possint radicem cubicam. Radix igitur cubica divisorum tentandorum debet inveniri inter divisores radicis cubicæ postremi termini $8m^3$, nimirum debet esse divisor quantitatis $2m$. Quin immo quo-

quoniam si binomium fractione careat, etiam x carere debet fractione, adeoque x^3, sive $\frac{1}{8}y$, fractione carere debet; divisor, qui quæstioni possit satisfacere, debet posse dividi per 8, adeoque ejus radix cubica per 2. Quare soli divisores valoris m considerandi sunt, & radix illa rationalis æquationis inventæ quærenda inter cubos divisorum m ductos in 8, quorum si nullus satisfaciat, illa radix cubica ex proposito binomio extrahi non poterit.

377. Atque eo pacto divisorum postremi termini numerus in immensum minuitur, qui adhuc etiam dimidiari potest si $\sqrt{n}$ fuerit valor realis. Eo enim casu erit realis etiam valor z, qui inde nascitur. Quare z^2 erit valor positivus, ac proinde in æquatione $x^3 + 3z^2x = m$ primum membrum erit positivum, vel negativum, prout x fuerit positivum, vel negativum. Debet autem id membrum habere idem signum, ac secundum m. Igitur erit x ejusdem signi cum m, & ii divisores adhibendi sunt tantum cum signo conformi ipsi m.

378. Sit binomium, quo num. 338 usi sumus, $7 + \sqrt{50}$. Erit $m = 7$, $n = 50$, quibus valoribus substitutis æquatio numeri 375 evadit $y^3 - 42y^2 + 615y - 2744 = 0$. Porro m habet solos divisores 1, & 7, quorum cubi 1, & 343 ducti in 8 exhibent 8, & 2744, qui soli cum signo positivo conformi ipsi m, adhibendi sunt inter tam multos postremi termini divisores. Et quidem substituto 8 æquationi satisfit, quæ dividitur per $y - 8$. Erit igi-

igitur $y = 8$, $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} = 1$, $z = \sqrt{(\frac{m - x^3}{3x})} = \sqrt{(\frac{7-1}{3})} = \sqrt{2}$. Radix igitur quæsita $1 + \sqrt{2}$, ut ibidem inveneramus.

379. Si autem sit alterum binomium ibidem adhibitum $-5 + \sqrt{-2}$, erit $m = -5$, $n = -2$. Quare eadem æquatio evadit $y^3 + 30y^2 - 429y + 1000 = 0$. Porro m habet solos divisores 1, & 5, quorum cubi 1, & 125 multiplicati per 8 exhibent 8, & 1000. Quare hi tantum inter tot divisores numeri 1000 adhibendi sunt, sed cum utroque signo ob valorem n negativum. Satisfacit autem æquationi hic pariter 8, & ea dividi potest per $y - 8$. Igitur hic etiam est $y = 8$, $x = \frac{1}{2}\sqrt[3]{y} = \frac{2}{2} = 1$. At $z = \sqrt{(\frac{m - x^3}{3x})} = \sqrt{(\frac{-5-1}{3})} = \sqrt{-2}$. Radix igitur quæsita erit $1 + \sqrt{-2}$, ut pariter ibidem inveneramus.

380. At si proponatur $2 + \sqrt{3}$, erit $m = 2$, $n = 3$. Quare æquatio erit $y^3 - 12y^2 - 21y - 64 = 0$. Porro m habet tantum divisores 1, & 2, quorum cubi 1, & 8 ducti in 7, exhibent 8, & 64 adhibendos cum signo positivo, conformi valori m. Neuter autem ex hisce divisoribus satisfacit. Quare binomium illud $2 + \sqrt{3}$ radicem cubicam extrahibilem non habet,

381. Cæterum quod valor x debeat esse inter divisores valoris m, patet etiam ex eo, quod positum

tum fuerit num.373. $x^3 + 3xz^2 = m$, adeoque est $m = x \times (x^2 + 3z^2)$, & proinde debet posse dividi per x.

382. Atque hoc quidem pacto ea omnia, quæ initio hujus §. proposueramus, abunde præstitimus. Jam æquationes quarti gradus aggrediemur, quæ pendent ab æquationibus tertii, in quibus tamen minus immorabimur.

§. XIII.

De resolutione æquationum gradus quarti.

383. ÆQuationes quarti gradus posse componi ex quatuor æquationibus primi, vel ex binis secundi, vel ex una tertii, & una primi patet ex num.235. Quare poterunt habere omnes radices reales, vel binas reales, & binas imaginarias, quas nimirum habeat illa æquatio tertii, vel altera ex iis secundi, vel etiam omnes imaginarias, quas nimirum habeant ambæ æquationes secundi. Hinc etiam, eas posse aliquando deprimi per divisionem, ut ceteras omnes patet ex num.193. Easdem, si careant postremo termino, habere unam radicem $= 0$, & deprimi divisione per x, patet ex num.247. Si careant terminis omnibus intermediis, & reducantur ad formam $x^4 + t = 0$, resolvi mere æquationum primi gradus, patet ex num.204 ubi ostendimus fore $x^4 = -t$, $x = \sqrt[4]{-t}$; sive (per num.40) $\pm\sqrt{\pm\sqrt{-t}}$, ubi habebuntur quatuor valores bini semper imaginarii, & bini

alii

alii reales, vel imaginarii, prout valor t fuerit negativus, vel positivus, & proinde $-t$ positivus, vel negativus. Si careat & secundo, & quarto termino simul, ac reducatur ad formam $x^4 + qx^2 + t = 0$, resolvi more æquationum secundi gradus, patet ex num. 220. Demum posse semper liberari a secundo termino, assumendo $y - \frac{1}{4}p = x$ patet ex num. 287. Reliquum igitur est, ut agamus de resolutione æquationis ad hanc formam redactæ $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$.

384. Porro ut eam resolvamus, licebit concipere, eandem componi ex binis æquationibus secundi gradus, quarum tamen altera habere debet coefficientem secundi termini æqualem coefficienti alterius; cum enim desit secundus terminus æquationis propositæ, summa ejus radicum est $= 0$ (per num. 244). Coefficientes autem secundorum terminorum in æquationibus assumendis continebunt (per num. 242) summas binarum. Quare cum altera ex iis summis debeat alteram elidere, alter ex iis coefficientibus debebit æquari alteri accepto cum signo contrario.

385. Sint igitur binæ æquationes assumendæ $x^2 + ux + m = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, in quibus oportet determinare valores u, m, n.

386. Multiplicatis iis inter se oritur æquatio

$$\begin{array}{l} x^4 - u^2 x^2 - mux + mn = 0, \\ \quad\;\; + m x^2 + nux \\ \quad\;\; + n x^2 \end{array}$$

quæ comparata

cum illa generali $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$ exhibebit sequentes tres æquationes $-u^2 + m + n = q$, $-mu + nu = r$, $mn = t$, quarum ope eliminatis m, & n invenietur æquatio pro u.

387. In tertia enim erit $n = \frac{t}{m}$, quo valore substituto, prima mutatur in hanc quartam $-u^2 + m + \frac{t}{m} = q$, sive in hanc quintam $-u^2 m + m^2 + t = qm$: secunda vero in hanc sextam $-mu + \frac{tu}{m} = r$, vel in hanc septimam $-m^2 u + tu = rm$. Ex hac eruitur $tu - rm = m^2 u$, sive $\frac{tu - rm}{u} = m^2$, quo valore substituto in quinta, habetur $-u^2 m + \frac{tu - rm}{u} + t = qm$, ubi multiplicando per u, ac transponendo, ut erui possit valor m, fiet $2tu = u^3 m + qum + rm$, ac ex ea hæc octava $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$. Hoc demum valore m substituto in quarta, habetur æquatio nona continens solam incognitam u: $-u^2 + \frac{2tu}{u^3 + qu + r} + \frac{u^3 + qu + r}{2u} = q$. Ea vero, multiplicando per $2u(u^3 + qu + r)$, transponendo terminos primi membri, ac inter ordinandum elidendo eos, qui se mutuo destruunt, obtinebitur æquatio sexti gradus, $u^6 + 2qu^4$
$+ q^2$

$$\begin{aligned}+q^2 & u^2 - r^2 = 0,\\ -4t & u^2\end{aligned}$$ quæ facto $u^2 = y$, reducitur ad hanc tertii $$\begin{aligned}y^3 + 2qy^2 + q^2 & y - r^2 = 0:\\ -4t & y\end{aligned}$$

388. In hac æquatione invenientur methodo §. præcedentis tres valores y, quorum saltem unus erit realis (per num. 298, 219). Cumque sit $u = \pm \sqrt{y}$, invenientur sex valores u; quorum saltem bini reales erunt; tum ope ipsius u, & octavæ æquationis $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$ invenientur totidem valores m; ac demum ope hujus, & æquationis $n = \frac{t}{m}$ erutæ ex tertia invenientur totidem valores n, qui tamen nec erunt necessarii. Nam sex illi valores u, & m exhibebunt sex æquationes $x^2 + ux + m = 0$, quæ continebunt omnes æquationes secundi gradus, quæ possunt fieri assumendo binas ex 4 radicibus æquationis propositæ quarti gradus, quæ nimirum sunt sex, cum (per num. 92) sex binaria haberi possint in quatuor quantitatibus; ac proinde assumptis omnibus valoribus u, & m, eædem illæ 6 æquationes orientur ex æquatione $x^2 + ux + m = 0$, quæ orirentur assumptis omnibus valoribus u, & n ex æquatione $x^2 - ux + n = 0$. Quin immo bini tantum valores u prodeuntes ex unico valore y exhibebunt binas æquationes continentes illas omnes quatuor radices, ad quas inveniendas resolvendæ erunt binæ æquationes secundi gradus prodeuntes ex substitu-

ſtitutione binorum valorum u, & m reſpondentium eidem valori y in æquatione $x^2 + ux + m = 0$.

389. Porro cum æquatio tertii gradus neceſſario exhibeat ſaltem unum valorem y realem; patet ſemper binas æquationes ſecundi gradus inveniri debere, nec methodum ad eas inveniendas adhibitam quidquam impoſſibile aſſumere, ut methodus, qua tertii gradus æquatio reſolvebatur, aſſumpſit juxta num.341, & ſi forte radices imaginarias habuerit æquatio quarti gradus, eæ continebuntur in illis æquationibus ſecundi gradus, nec poterunt eſſe niſi vel binæ, vel omnes quatuor.

390. Quod ſi æquatio quarti gradus poterit deprimi ad ſedem inferiorem per diviſionem in duas ſecundi gradus irrationalitate carentes, debebunt haberi ſaltem bini valores u rationales, adeoque ſaltem unus valor y ita rationalis, ut & radicem habeat. Quare cum æquationis tertii gradus inventæ poſtremus terminus ſit r^2, oportebit (per num.242) ejuſmodi valorem y eſſe inter diviſores ipſius r^2 habentes radicem, & proinde valorem u inter diviſores ipſius r, quorum ſi nullus ad ſecundam potentiam elevatus exhibeat radicem rationalem æquationis tertii gradus, æquatio illa gradus quarti dividi non poterit in duas ſecundi irrationalitate carentes. An autem deprimi poſſit per æquationem primi ope diviſoris hujus formæ $x + a$, id patebit methodo numeri 75. Quare jam habemus methodum agnoſcendi ſemper an æquatio quarti gradus in propria ſede ſit, an poſſit deprimi.

391. Sit

391. Sit æquatio $z^4 - 8z^3 + 9z^2 + 38z - 40 = 0$. Posito $x + 2 = z$ juxta num. 287, & facta substitutione, erit $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$ æquatio carens secundo termino. In ea $q = -15$, $r = 10$, $t = 24$. Quare æquatio illa gradus tertii $y^3 + 2qy^2 + q^2y - r^2 = 0$ reducitur ad hanc
$$\begin{array}{l} \phantom{y^3 + 2qy^2 +{}} -4ty \end{array}$$
$y^3 - 30y^2 + 129y - 100 = 0$. Si hæc habeat radices rationales, quæ usui esse possint, quærendæ sunt inter divisores quadratos numeri $100 = r^2$, nimirum inter quadrata divisorum numeri $10 = r$ nulla habita signorum ratione, cum quadrata debeant esse semper positiva. Porro numerus 10 habet divisores 1, 2, 5, 10, quorum quadrata 1, 4, 25, 100. Ex his satisfaciunt æquationi priores tres 1, 4, 25. Habet igitur y tres valores 1, 4, 25, adeoque x sex: 1, −1, 2, −2, 5, −5.

392. Et quidem invento primo valore $y = 1$ æquationis tertii gradus, reliqui inveniuntur etiam divisa eadem per $x - 1$, unde provenit $y^2 - 29y + 100 = 0$, & $y = \frac{29}{2} \pm \sqrt{(\frac{741}{4} - 100)} = \frac{29}{2} \pm \sqrt{\frac{(841 - 400)}{4}} = \frac{29}{2} \pm \frac{\sqrt{441}}{4} = \frac{29}{2} \pm \frac{21}{2}$: inde vero eruuntur bini valores $y = \frac{50}{2} = 25$, & $y = \frac{8}{2} = 4$.

393. Habitis 6 valoribus u, inveniuntur sex valores m per formulam $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$, & sex valores n per formulam $n = \frac{t}{m}$, in quibus $t = 24$, $q = -15$, $r = 10$, ut vidimus.

Sit $u = 1$, erit $m = \frac{48}{-4} = -12$; $n = \frac{24}{-12} = -2$

Sit $u = -1$, erit $m = \frac{-48}{24} = -2$; $n = \frac{24}{-2} = -12$

Sit $u = 2$, erit $m = \frac{96}{-12} = -8$; $n = \frac{24}{-8} = -3$

Sit $u = -2$, erit $m = \frac{-96}{32} = -3$; $n = \frac{24}{-3} = -8$

Sit $u = 5$, erit $m = \frac{240}{60} = 4$; $n = \frac{24}{4} = 6$

Sit $u = -5$, erit $m = \frac{-240}{-40} = 6$; $n = \frac{24}{6} = 4$

394. Sex igitur æquationes eruentur e formula $x^2 + ux + m = 0$, & sex e formula $x^2 - ux + n = 0$. Eas hic apponemus cum radicibus inde erutis.

E for-

E formula $x^2 + ux + m = 0$

$$\text{Posito } u = 1;\ x^2 + x - 12 = 0;\ x = \begin{cases} +3 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = -1;\ x^2 - x - 2 = 0;\ x = \begin{cases} +2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = 2;\ x^2 + 2x - 8 = 0;\ x = \begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = -2;\ x^2 - 2x - 3 = 0;\ x = \begin{cases} +3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = 5;\ x^2 + 5x + 4 = 0;\ x = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = -5;\ x^2 - 5x + 6 = 0;\ x = \begin{cases} +3 \\ +2 \end{cases}$$

E formula $x^2 - ux + n = 0$

$$\text{Posito } u = 1;\ x^2 - x - 2 = 0;\ x = \begin{cases} +2 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = -1;\ x^2 + x - 12 = 0;\ x = \begin{cases} +3 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = 2;\ x^2 - 2x - 3 = 0;\ x = \begin{cases} +3 \\ -1 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = -2;\ x^2 + 2x - 8 = 0;\ x = \begin{cases} +2 \\ -4 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = 5;\ x^2 - 5x + 6 = 0;\ x = \begin{cases} +3 \\ +2 \end{cases}$$

$$\text{Posito } u = -5;\ x^2 + 5x + 4 = 0;\ x = \begin{cases} -1 \\ -4 \end{cases}$$

395. Atque hic in primis patet illud, quod supra monuimus num. 388, æquationes provenientes e

ſecunda formula, eſſe prorſus eaſdem, ac provenientes e prima ita, ut, quam exhibet prima, adhibito altero e binis valoribus u ortis ab eodem valore y, exhibeat ſecunda adhibito altero.

396. Deinde patet, quodvis æquationum binarium, ſive earum, quas exhibent binæ formulæ adhibito uno e valoribus u, ſive earum, quas exhibet eadem formula adhibitis binis ejuſmodi valoribus derivatis ab eodem valore y, exhibere eaſdem quatuor radices $3, -4, 2, -1$, quas eſſe radices æquationis propoſitæ $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, patebit ſubſtituenti. Atque iccirco quodvis binarium pariet ope multiplicationis hanc æquationem eandem, quod pariter patebit multiplicanti.

397. Inde vero facile invenientur radices æquationis propoſitæ $z^4 - 8z^3 + 9z^2 + 38z - 40 = 0$. Cum enim ſit $z = x + 2$ illæ quatuor radices ſeu quatuor valores z habebuntur, ſi radicibus $3, -4, 2, -1$ addatur 2, eruntque $5, -2, 4, 1$, quod ſubſtitutione patebit.

398. Sed immorandum nonnihil in contemplanda reſolutione illius æquationis $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$. In ſex æquationibus inventis, patet, haberi omnes ſex combinationes illarum quatuor radicum $3, -4, 2, -1$. Nam in prima proveniente ex prima formula habetur prima, & ſecunda, prima & tertia habetur in ſexta, prima & quarta in quarta, ſecunda & tertia in tertia, tertia & quarta in ſecunda. Id autem neceſſario debuit contingere. Nam valores s, m, n determinati ſunt ex

hac

hac conditione tantummodo quod æquatio $x^2 + ux + m$ contineat binas e quatuor radicibus æquationis $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$, ac æquatio $x^2 - ux + n = 0$ alias binas. Cum igitur quodcunque binarium eandem prorsus relationem habeat ad æquationem illam gradus quarti; non potest unum potius utravis ex iis æquationibus secundi gradus exhibere, quam aliud, sed utralibet debet necessario exhibere quodvis binarium; cumque in quaternario contineantur sex binaria, patet, in utravis ex iis æquationibus debere contineri sex æquationes, & easdem sex in altera, quod aliter fieri non potest nisi ope sex valorum singularum e quantitatibus assumptis u, m, n.

399. Inde autem consequitur æquationem, qua ex sola notitia æquationis illius quarti gradus comparata cum ea, quam binæ assumptæ generant, determinari possit quævis ex iis tribus quantitatibus assumptis, debere assurgere ad sextum gradum, ut ad eum pertigit æquatio eruta pro u. Atque hinc etiam patebit, quanti usus fuerit eliminare prius secundum terminum, tum quærere valorem u potius quam m, vel n. Eliminato secundo termino assumendæ fuerunt æquationes, in quarum altera valor u esset æqualis alterius valori accepto cum signo contrario; nam is cum exprimat coefficientem secundi termini, exprimit summam binarum radicum cum signo contrario acceptarum; cumque ob eliminatum secundum terminum summa omnium debeat esse $= 0$; binarum quarumque summa debet esse æqualis summæ reliquarum cum signo contrario

ac-

acceptæ. Quare e sex valoribus u, terni debent esse replicati cum sola signorum differentia, & valores u^2 debent proinde esse tres tantum. Icciro in æquatione eruta pro u debent alterni termini deesse, relictis solis potentiis u paribus ita, ut posito $y = u^2$, æquatio deprimatur ad tertium gradum, quod quidem contigit. At si non eliminato secundo termino tentetur determinatio æquationum secundi gradus componentium æquationem quarti, eæ debebunt habere coefficientem diversum secundi termini, & esse $x^2 + ux + m = 0$, $x^2 + zx + n = 0$, ac si æquatio inde orta comparetur cum æquatione $x^4 + px^3 + qx + r = 0$, debebit pro u exhibere sex diversos valores ita, ut etiam u^2 sex diversos valores habeat, & proinde æquatio inde orta non careret omnibus terminis potestatum imparium, nec ad tertium gradum reduci posset, nisi ejusmodi novis substitutionibus, quæ sex diversos valores redigerent ad tres. Pariter si eliminato secundo termino quæratur æquatio pro m, vel n invenietur æquatio gradus sexti non deprimibilis sine novis admodum molestis substitutionibus, quæ demum eo reciderent, ut valor u^2 immediatè determinaretur.

400. Patebit facile oriri ejusmodi æquationem sexti gradus pro m; si ex illis tribus æquationibus numeri 386, nimirum $-u^2 + m + n = q$, $-mu + nu = r$, $mn = t$, eliminentur potius u, & n. Facto

cto enim in tertia $n = \frac{t}{m}$, secunda evaderet $-mu + \frac{tu}{m} = r$, sive $-mmu + tu = mr$, & $u = \frac{mr}{-mm+t}$ Hisce valoribus n, & u substitutis in prima, esset $\frac{-m^2 r^2}{(-mm+t)^2} + m + \frac{t}{m} = q$, in qua multiplicando per $m(-mm+t)^2$, sive per $m(m^4 - 2m^2 t + t^2)$; ordinatis terminis haberetur æquatio

$$m^6 - qm^5 - tm^4 - r^2 m^3 - t^2 m^2 - qt^2 m + t^3 = 0$$
$$-2tqm^3$$

, ac simili prorsus modo erueretur æquatio pro n, quin eadem prorsus evaderet, sex valoribus existentibus utrobique prorsus iisdem, ut eruitur etiam ex n. 388, & 395.

401. Hujusmodi autem æquatio reduceretur ad priorem formam, substituto pro m valore illo $\frac{2tu}{u^3 + qu + r}$ numeri 387, ut æquatio quoque prodiens ante eliminationem secundi termini substitutione alia, quæ eidem eliminationi æquivaleret, eodem reduci posset, sed ista fusius persequi infinitum esset, ac Tyroni harum meditationum cupidiori, & vividioris ingenii facile insinuabit Præceptor. Illud tantum notabimus determinato valore u, valorem m admodum facile determinari per æquationem $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r}$, cum contra valore m determinato, valor u inde erui non possit, nisi per æquationem

tertii

tertii gradus hujusmodi $mu^3 + mqu + mr = 2tu$, sive $u^3 + \frac{mq - 2t}{m} u + r = 0$, quod iterum demonstrat æquationem pro u potius, quam pro m, vel n investigandam fuisse.

402. Præterea illud etiam non omittendum, nullam adesse spem, ut ejusmodi methodo altiorum graduum radices inveniantur; ut nec pro tertio gradu potuit adhiberi. Si enim ad resolutionem tertii gradus assumerentur æquationes $x^2 + ux + m = 0$, & $x - u = 0$, valor u exprimeret quamvis e tribus radicibus cum signo contrario acceptis in posteriore, vel binarum quarumvis summam in præcedenti, & valor m productum pariter e binis quibusvis. Quamobrem cum tres diversæ radices sint, & tria diversa trium radicum binaria (per num. 92); debet tam pro valore u, quam pro m deveniri iterum ad æquationem gradus tertii; atque id ipsum constabit comparanti æquationem inde ortam cum æquatione $x^3 + qx + r = 0$. Si autem quinti gradus æquatio reducatur per binas $x^3 + ux^2 + mx + l = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, quoniam continet u binaria radicum cum signis contrariis acceptarum in secunda, ternaria in prima (per num. 242), & quinque radicum tam binaria, quam ternaria sunt decem (per num. 92) ad decimum saltem gradum assurgeret æquatio pro u: in sexto autem gradu per æquationes $x^3 + ux^2 + mx + l = 0$, $x^3 - ux^2 + nx + b = 0$, continente u sex radicum ternaria,

ria, quæ ſunt 20, ad vigeſimum gradum aſcenderetur, licet is ob ternaria poſitiva aliis totidem negativis cum ſigno contrario acceptis æqualia reduceretur ad decimum, deficientibus potentiis imparibus, ut ſupra in gradu quarto; per æquationes vero $x^4 + ux^3 + mx^2 + lx + b = 0$, $x^2 - ux + n = 0$, continente u binaria in poſteriore, quaternaria in priore, quæ in 6 radicibus ſunt 15, haberetur gradus decimus quintus. Ac eodem pacto in ſuperioribus multo altius aſcenderetur, ac gradus ille, qui reſolvendus erat tranſcenderetur.

403. Cæterum, ut ad æquationes quarti gradus regrediamur, adhibuimus exemplum, in quo omnes quatuor radices erant reales, & rationales, & iccirco etiam æquatio illa ſubſidiaria gradus tertii habuit omnes tres radices reales, & rationales. At plures alii caſus, haberi poſſunt, qui reducuntur ad ſequentes. In primis quotieſcunque omnes quatuor radices fuerint reales in æquatione quarti gradus; omnes tres radices in æquatione tertii erunt pariter reales. Et ſi illæ contineantur binis æquationibus ſecundi gradus irrationalitate carentibus, quarum altera contineat binas radices irrationales, altera vero vel rationales, vel irrationales, æquatio tertii gradus habebit unicam tantum radicem rationalem quæ ſit quadratum. Quod ſi illa æquatio quarti gradus componetur e binis ſecundi irrationalitate carentibus, quarum altera contineat radices imaginarias, utcunque altera vel imaginarias contineat, vel reales, atque has vel rationales, vel irrationales, æquatio tertii gradus habebit unam e radi-

radicibus realem, & rationalem, quæ sit quadratum, reliquas imaginarias vel negativas quarum deinde radices quadratæ imaginariæ sint. In omnibus casibus huc usque expositis æquatio quarti deprimi potest divisione facta per æquationem secundi. Quod si ea vel deprimi possit solum per divisionem primi gradus, vel nullo modo; æquatio tertii gradus nullam habebit radicem rationalem, saltem, quæ sit quadratum, habebit autem reales omnes, & positivas, si omnes æquationis quarti gradus reales fuerint, quarum si binæ fuerint reales, & binæ imaginariæ, habebit saltem unam realem, & positivam.

404. Fundamentum horum omnium theorematum in eo est situm, quod bini valores x, sive unicus valor y debent continere summas binarum radicum cum signis contrariis acceptarum, seu coefficientes secundorum terminorum binarum æquationum secundi gradus, in quas illa quarti resolvitur. Porro summæ radicum realium semper reales sunt, & rationalium rationales. Irrationalium, & imaginariarum quæ oriuntur ab iisdem æquationibus secundi gradus irrationalitate carentibus reales sunt, & rationales, sed si irrationalis orta ex una conjungatur cum rationali, vel cum irrationali orta ex alia, summa erit irrationalis, si vero imaginaria orta ex una conjungatur, cum reali, vel cum imaginaria orta ex alia, summa pariter est imaginaria. Quod si æquatio proposita deprimi non possit ad duas secundi gradus irrationalitate carentes; valor x & y rationalis nequaquam erit. Infinitum esset singula exemplis illustrare. Facile erit exempla desumere

sumere multiplicando per se invicem æquationes plures secundi, vel primi gradus; & in his, ac in superioribus illis, quæ ad altiorum æquationum reductionem pertinent, habet Præceptor uberem sane campum, in quo Tyronem cupidum, & satis otii nactum exercere possit. Pauca delibabimus.

405. Sit æquatio $x^4 - 8x^2 + 4x + 3 = 0$. Conferendo eam cum æquatione $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$. Erit $q = -8$, $r = 4$, $t = 3$. Quare

$$y^3 + 2qy^2 + q^2 y - rr = 0, \quad\text{quæ erat æquatio ter-}$$
$$\qquad\quad - 4ty$$

tii gradus num. 287, erit $y^3 - 16y^2 + 52y - 16 = 0$, in qua divisores, qui usui esse possint, sunt quadrata divisorum numeri $4 = r$. Is habet divisores 1, 2, 4, quorum quadrata 1, 4, 16. Horum secundum tantum nimirum 4 satisfacit, ac divisa ea æquatione per $y - 4$, habetur $y^2 - 12y + 4 = 0$, cujus binæ radices $6 \pm \sqrt{32}$ ambæ reales, sed irrationales. Quare tres valores y sunt $4, 6 + \sqrt{32}, 6 - \sqrt{32}$, & sex valores x sunt $2, -2, \sqrt{6 + \sqrt{32}}, -\sqrt{6 + \sqrt{32}}, \sqrt{6 - \sqrt{32}}, -\sqrt{6 - \sqrt{32}}$, vel quoniam methodo exposita num. 223 extrahitur radix ex binomio $6 \pm \sqrt{32}$, & est $2 \pm \sqrt{2}$, sex valores x erunt $2, -2, 2 + \sqrt{2}, -2 - \sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}, -2 + \sqrt{2}$.

406. Adhibito primo tantum valore y, ex $x = 2$ fiet $m = \frac{2tx}{x^3 + qx + r} = \frac{12}{8 - 16 + 4} = \frac{12}{-4} = -3$,

$= -3$, ex $u = -2$ erit $m = \frac{-12}{-8+16+4} = \frac{-12}{12} = -1$. Quare binæ æquationes, in quas resolvitur æquatio proposita, sunt $x^2 + 2x - 3 = 0$, $x^2 - 2x - 1 = 0$, quæ quidem multiplicatæ per se invicem illam pariunt. Porro prioris radices sunt 1, & -3, posterioris $1 + \sqrt{2}$, $1 - \sqrt{2}$. Si cum signis contrariis accipiantur prima cum secunda prima cum tertia, prima cum quarta, secunda cum tertia, secunda cum quarta, tertia cum quarta, habentur 2, $-2 - \sqrt{2}$, $-2 + \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$, $2 + \sqrt{2}$, -2, ubi redeunt illi ipsi sex valores u, licet diverso ordine. Primus autem, & postremus sunt rationales, & pertinent ad illas binas æquationes irrationalitate carentes; reliqui cum irrationalitatem contineant, eandem inducunt in valorem u, & y. Cæterum si quatuor æquationes primi gradus $x + 2 = 0$, $x - 2 = 0$, $x - 2 - \sqrt{2} = 0$, $x - 2 + \sqrt{2} = 0$, $x + 2 - \sqrt{2} = 0$, $x + 2 + \sqrt{2} = 0$, quocunque ordine multiplicentur inter se, semper parient illam gradus quarti, & si ad sex binaria reducantur, singula parient æquationes singulas gradus secundi, & in singulis continebuntur singuli ex illis 6 valoribus u, ac ex valoribus m inveniendis per u.

407. In sequenti exemplo assumemus æquationem resolubilem in binas irrationalitate carentes, quarum utraque contineat radices imaginarias, & tamen unus e valoribus y erit realis rationalis, ac qua-

quadratus, habens binos valores u reales, & rationales. Sit æquatio $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$. Erit $q = 1$, $r = 2$, $t = 6$. Quare æquatio $y^3 + 2qy^2 + q^2 y - rr = 0$, erit $y^3 + 2y^2 - 23y - 4 = 0$, in qua divisores, qui usui esse possint,
$- 4ty$
sunt quadrata divisorum numeri $2 = r$. Is habet divisores 1, 2, quorum quadrata 1, 4: Horum secundum tantum satisfacit nimirum 4. & divisa ea æquatione per $y - 4$, habetur $y^2 + 6y + 1 = 0$, cujus binæ radices $-3 \pm \sqrt{8}$, ambæ negativæ, licet reales, ex quibus nimirum valores u proveniunt imaginarii $\pm \sqrt{(-3 \pm \sqrt{8})}$, vel quoniam ex $-3 \pm \sqrt{8}$ potest extrahi radix, quæ est $\sqrt{-2} \pm \sqrt{-1}$, sex valores u erunt 2, -2, $\sqrt{-2} + \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-2} + \sqrt{-1}$, $\sqrt{-2} - \sqrt{-1}$, $-\sqrt{-2} - \sqrt{-1}$.

408. Adhibito primo tantum valore y, ex $u = 2$ erit $m = \frac{2tu}{u^3 + qu + r} = \frac{24}{8 + 2 + 2} = \frac{24}{12} = 2$, ex $u = -2$ erit $m = \frac{-24}{-8 - 2 + 2} = \frac{-24}{-8} = 3$. Quare binæ æquationes, in quas resolvitur æquatio proposita sunt $x^2 + 2x + 2 = 0$, $x^2 - 2x + 3 = 0$, quæ quidem multiplicatæ per se invicem illam pariunt. Porro prioris radices sunt $-1 + \sqrt{-1}$, $-1 - \sqrt{-1}$, posterioris $1 + \sqrt{-2}$,

$1 - \sqrt{-2}$. Si cum ſignis contrariis accipiantur binaria eodem ordine, quo ſupra num.406, habentur $2, -\sqrt{-1} - \sqrt{-2}, -\sqrt{-1} + \sqrt{-2}, \sqrt{-1} - \sqrt{-2}, \sqrt{-1} + \sqrt{-2}, -2$, ubi redeunt illi ipſi ſex valores u, licet diverſo ordine. Primus autem, & poſtremus ſunt reales, & rationales, & pertinent ad illas binas æquationes imaginarietate carentes, & irrationalitate. Reliqui cum imaginarietatem contineant, eandem inducunt in valorem u, licet in valorem y non inducant. Cæterum ſi quatuor æquationes primi gradus ortæ ex hiſce radicibus utcunque multiplicentur, reddent eandem illam æquationem gradus quarti, & diſtributæ in binaria exhibentia ſex æquationes gradus ſecundi, habebuntur in ſingulis ſinguli valores u, & ſinguli m derivandi ex u.

409. Atque ut ſpecimen aliquod habeatur binarum æquationum ſecundi gradus, quæ oriantur ex aliis binariis continentibus quantitates imaginarias, ductis in ſe invicem $x + 1 - \sqrt{-1} = 0$, $x - 1 - \sqrt{-2} = 0$, oritur æquatio

$$\begin{array}{llll} x^2 & - x\sqrt{-1} & - 1 & = 0 \\ & - x\sqrt{-2} & + \sqrt{-1} & \\ & & - \sqrt{-2} & \\ & & + \sqrt{-2} & \end{array}$$

ductis autem $x + 1 + \sqrt{-1} = 0$, $x - 1 + \sqrt{-2} = 0$, oritur æquatio

$$\begin{array}{lll} x^2 & + x\sqrt{-1} - 1 & = 0. \\ & + x\sqrt{-2} - \sqrt{-1} & \\ & + \sqrt{-2} & \\ & + \sqrt{-1} & \end{array}$$

His autem invicem multiplicatis, & eliſis terminis, qui

qui se destruunt, redit illa ipsa æquatio proposita gradus quarti $x^4 + x^2 + 2x + 6 = 0$.

410. Notari autem potest generaliter illud; æquationem quarti gradus, quæ postremum terminum negativum habeat, non posse habere omnes radices imaginarias. Nam æquationes secundi gradus, quæ imaginarias quantitates contineant, debent habere postremum terminum positivum (per num.215); ac proinde si ambæ eæ, ex quibus oritur æquatio quarti, habeant radices imaginarias; habebunt ambæ postremos terminos positivos, ex quorum multiplicatione postremus terminus quartæ orietur positivus etiam ipse. Quamobrem si æquatio quarti gradus negativum habeat postremum terminum, jam statim constabit, saltem binas haberi radices reales, quod sequenti §. generaliter demonstrabimus de omnibus æquationibus gradus paris, ut & de gradu impare ostendimus semper saltem unam haberi radicem realem.

411. Contra vero si æquatio illa tertii gradus, quæ exhibet valorem y, non alternet omnia signa terminorum; manifestum erit (per num.250), haberi radices imaginarias in æquatione gradus quarti; & si omnia signa continuet, nullo alternato, constabit omnes radices imaginarias esse. Nam ibi demonstravimus omnia signa alternari, ubi omnes radices reales, & positivæ sunt, omnia continuari, ubi omnes negativæ. Quare si non omnia alternantur, non omnes valores y, erunt reales, & positivi, quod requiritur ad hoc, ut omnes valores u reales sint. Si autem omnes continuantur, nullus

habebitur realis, & positivus valor y, adeoque nullus realis u; quanquam poterunt omnes radices esse imaginariæ alternatis etiam signis, cum possint valores u, & m esse reales, & adhuc æquationes secundi gradus continere valores imaginarios.

412. In primo exemplo, in quo num.391 omnes radices æquationis quarti gradus reales erant, invenimus $y^3 - 30y^2 + 129y - 1000 = 0$, ubi omnia signa alternantur. Idem in secundo contigit eadem de causa num.405, ubi pariter & radices omnes æquationis quarti gradus reales fuerunt, & æquatio $y^3 - 16y^2 + 52y - 16 = 0$ omnia signa alternavit. In postremo demum exemplo, num.407 omnes radices imaginariæ erant, & æquatio tertii gradus $y^3 + 2y^2 - 23y - 4 = 0$ habuit unam alternationem signorum, & binas continuationes, quia binos invenimus valores u, & m reales, qui binas dederunt secundi gradus æquationes imaginarietate carentes, in quas æquatio quarti resoluta est, licet illæ ipsæ æquationes secundi gradus continuerint radices imaginarias.

413. In exemplis huc usque adhibitis semper æquatio quarti gradus per divisionem deprimi potuit ad binas secundi. Addemus exemplum unicum, in quo ea depressio haberi non potest, ubi proinde per approximationem eruendus erit valor saltem unicus radicis æquationis gradus tertii, quæ per approximationem exhibeat coefficientes secundorum terminorum, & binos postremos terminos æquationum gradus secundi. Ejusmodi æquatio erit

erit $x^4 + 3x^2 - 2x - 3 = 0$. In ea erit $q = 3$, $r = -2$, $t = -3$. Quare æquatio $y^3 + 2qy^2 + q^2 y - rr = 0$ erit $y^3 + 6y^2 + 21y - 4 = 0$.
$- 4ty$

In hac cum non omnia signa alternentur, jam constat (per num. 412), non omnes propositæ æquationis quarti gradus radices reales esse, ut ex termino postremo -3 negativo constat (per num. 410), saltem binas esse reales; ac proinde binæ reales erunt, & binæ imaginariæ.

414. Jam vero si æquatio illa tertii gradus habet radices, quæ usui esse possint ad resolvendam æquationem quarti accurate in duas secundi, eæ debent esse inter quadrata divisorum numeri $2 = r$. Is numerus habet divisores tantum 1, & 2, quorum quadrata 1, & 4, ac neutrum satisfacit. Proposita igitur æquatio quarti gradus deprimi non potest per divisorem duarum dimensionum, sive secundi gradus. Cumque ejusdem æquationis quarti gradus postremus terminus 3 habeat divisores tantum 1, -1, 3, -3, quorum nullus æquationi satisfacit, ea nec per divisorem simplicem formæ $x + a$ deprimi potest ad binas æquationes alteram tertii gradus, alteram primi. Quamobrem quærenda irrationalis expressio valoris y realis, & approximatione utendum ad habenda elementa n, & m binarum æquationum secundi gradus in numeris.

415. In ipsa igitur æquatione $y^3 + 6y^2 + 21y - 4 = 0$, ponatur $z - 2 = y$ ad eliminandum secundum terminum, & proveniet z^3

$+9z-30=0$. Hæc æquatio ob tertium terminum $+9z$ positivum habet binas radices imaginarias (per n. 316, 317), & tertia realis, quæ (per num. 300) debet habere signum contrarium signo postremi termini -30, est positiva, nimirum

$$\sqrt[3]{15+\sqrt{(225+27)}}+\sqrt[3]{15-\sqrt{(225+27)}}$$
$$=\sqrt[3]{15+\sqrt{(252)}}+\sqrt[3]{15-\sqrt{(252)}}=$$
$$\sqrt[3]{15+15.874508}+\sqrt[3]{15-15.874508}$$
$$=\sqrt[3]{30.874508}+\sqrt[3]{-0.874508}=$$
$$3.13713601-0.95628624=2.18084977.$$

Quare $y=z-2$ erit $=0.18084977$, & $u=\pm\sqrt{y}=\pm 0.42526435$. Cumque sit $m=\frac{-2tu}{u^3+qu+r}$ erunt bini valores m alter $+3.9419033$ alter -0.7610536. Quare binæ æquationes secundi gradus erunt $x^2+0.42526435x+3.9419033=0$, & $x^2-0.42526435x-0.7610536=0$, quæ quidem invicem multiplicatæ, contemptis ulterioribus decimalibus, exhibent $x^4+2.99999993x^2-1.99999991x-2.99999969=0$, sive quam proxime propositam æquationem $x^4+3x^2-2x-3=0$. Porro prima earum æquationum secundi gradus habet binas radices imaginarias $x=-0.21263217\pm\sqrt{0.0452124-3.9419033}$, sive $=-0.21263217\pm\sqrt{-3.8967909}$, secunda vero ha-

habet binas radices reales $x = 0.21263217 \pm \sqrt{0.0452124 + 0.7610536} = 0.21263217 \pm \sqrt{0.8062660} = 0.21263217 \pm 0.8979231$, nimirum $x = 1.1105553$, & $x = -0.6852909$.

416. Atque hoc quidem pacto æquatio quarti gradus resolvitur in binas secundi, ex quibus orta concipitur, comparando terminos homogeneos, & deveniendo ad æquationem gradus sexti, quæ deprimitur ad tertium, ac resoluta exhibet quæsitos valores. Adest autem alia methodus, qua devenitur immediate ad æquationem gradus tertii exhibentem valores pro binis æquationibus secundi continentibus radices propositæ æquationis gradus quarti. Hæc autem methodus utitur proprietate illa quadrati, quam num.95 demonstravimus, quod nimirum cujusvis binomii quadratum tribus terminis constet, in quibus productum extremorum æquetur quadrato dimidii termini intermedii, cujus etiam inversa propositio est vera; nam si in trinomio productum extremorum æquetur quadrato dimidii termini intermedii, erit id trinomium quadratum, cujus radix habebitur, si capiantur extremorum terminorum radices, & uniantur cum eodem signo, vel cum oppositis, prout terminus ille intermedius habuerit signum positivum, vel negativum. Ea autem inversa propositio sic facile demonstratur. In trinomio $a \pm b + c$ sit $ac = \frac{1}{4}bb$; oportet demonstrare esse $a \pm b + c = (\surd a \pm \surd c)^2$. Erit autem nam $(\surd a \pm \surd c)^2 = a \pm 2\surd ac + c$.

 Sed

Sed ob $ac = \frac{1}{4}bb$ est $4ac = bb$, & $\pm 2\sqrt{ac} = \pm b$. Igitur $(\sqrt{a} \pm \sqrt{c})^2 = a \pm b + c$: Q. E. D.

417. Ac notandum ob ambiguitatem signorum in radicibus habentibus exponentem parem, radicem trinomii $a + b + c$ fore tam $\sqrt{a} + \sqrt{c}$, quam $-\sqrt{a} - \sqrt{c}$, trinomii vero $a - b + c$, fore tam $+\sqrt{a} - \sqrt{c}$, quam $-\sqrt{a} + \sqrt{c}$. Quod si e valoribus a, & c, uterque, vel etiam alter negativus fuerit, patet radicem illam debere continere valores imaginarios. Sed nisi b fuerit valor imaginarius, a, & c debebunt esse valoris vel simul positivi, vel simul negativi, cum nimirum ex hypothesi eorum productum debeat æquari quadrato $\frac{1}{4}bb$ utique positivo.

418. Sit igitur æquatio libera a secundo termino $x^4 + qx^2 + rx + t = 0$. Transponendo erit $x^4 = -qx^2 - rx - t$. Fiat quadratum binomii $x^2 + y$, nimirum $x^4 + 2yx^2 + y^2$, & addito utrinque $2yx^2 + y^2$, erit $x^4 + 2yx^2 + y^2 =$

$$= -qx^2 - rx - t$$
$$+ 2yx^2 \qquad + y^2$$

. In hac æquatione primum membrum est quadratum habens pro radice $x^2 + y$: Secundum vero membrum fiet quadratum, si ita assumatur illa arbitraria y, ut productum extremorum æquetur quadrato dimidii intermedii termini. Ponendum igitur $(-qx^2 + 2yx^2) \times (-t + y^2) = \frac{1}{4}rrxx$, sive dividendo utrinque per x^2, erit

$(-q$

$(-q+2y)\times(-t+y^2)=\frac{1}{4}rr$. Facta autem multiplicatione habetur $+qt-qy^2-2ty+2y^3=\frac{1}{4}rr$, & transponendo, ordinando, ac dividendo per 2 erit $y^3-\frac{1}{2}qy^2-ty+\frac{1}{2}qt=0$:
$$\phantom{y^3-\frac{1}{2}qy^2-ty}-\frac{1}{8}rr$$

Invento valore y in hac æquatione secundum illud membrum $\begin{matrix}-qx^2 & -rx & -t\\ +2yx^2 & & +y^2\end{matrix}$, habebit pro radice $\pm x\surd(-q+2y)\pm\surd(-t+y^2)$; assumptis signis dissormibus, vel conformibus; prout r fuerit valoris positivi vel negativi, adeoque e contrario terminus intermedius $-2r$ negativus, vel positivus Tum vero habebitur $x^2+y=\pm x\surd(-q+2y)\pm\surd(-t+y^2)$. Nimirum posito $\surd(-q-2y)=u$ & $\surd(-t+y^2=m$ habebuntur binæ æquationes secundi gradus $x^2-ux\begin{matrix}-m\\+y\end{matrix}=0$, & $x^2+ux\begin{matrix}+m\\+y\end{matrix}=0$, si r fuerit valoris negaivi, ac $x^2-ux\begin{matrix}+m\\+y\end{matrix}=0$, & $x^2+ux\begin{matrix}-m\\+y\end{matrix}=0$, si r fuerit valoris positivi, ac patet hic etiam tria binaria æquationum secundi gradus obtineri posse, cum æquatio tertii gradus exhibere possit ternos valores y, & eorum singuli binas exhibeant æquationes secundi gradus.

419. Si

419. Sit æquatio $x^4 - 15x^2 + 10x + 24 = 0$; quam adhibuimus num. 391. In ea erit $q = -15$, $r = 10$, $s = 24$. Quare æquatio subsidiaria gradus tertii $y^3 - \frac{1}{2}qy^2 - sy + \frac{1}{2}qs = 0$ fiet $y^3 + \frac{15}{2}y^2$
$- \frac{1}{8}rr$

$- 24y - \frac{385}{2} = 0$; quæ si multiplicetur per progressionem 1, 2, 4, 8, evadet $y^3 + 15y^2$ $96y$ $- 1540 = 0$, quæ habet omnes tres radices rationales 10, -11, -14. Quare prioris radices harum dimidiæ erunt 5, -5.5, -7. Assumptis pro y hisce valoribus invenientur $u = \sqrt{(-q + 2y)}$, & $m = \sqrt{(-s + y^2)}$, ac æquationes $x^2 - ux + m = 0$, & $x^2 + ux - m = 0$
$+y$ $+y$
retento eodem signo in u & m, ob valorem r positivum $= 10$. Erunt autem.

ex	valores u, & m	Æquationes	radices
$y = 5$	$(u = 5)$	$x^2 - 5x + 6 = 0$	$(+3$, $(+2$
	$(m = 1)$	$x^2 + 5x + 4 = 0$	$(-1$, $(-4$
$y = -5.5$	$(u = 2)$	$x^2 - 2x - 3 = 0$	$(+3$, $(-1$
	$(m = 2.5)$	$x^2 + 2x - 8 = 0$	$(+2$, $(-4$
$y = -7$	$(u = 1)$	$x^2 - x - 2 = 0$	$(+2$, $(-1$
	$(m = 5)$	$x^2 + x - 12 = 0$	$(+3$, $(-4$

420 Hoc

420. Hoc pacto redeunt illæ eædem sex æquationes ortæ ex illis iisdem sex binariis earundem quatuor radicum, quas priore methodo inveneramus num. 393. Ubi vero æquatio tertii gradus rationales radices non habeat, recurrendum ad approximationem, ut in postremo exemplo prioris methodi.

421. Atque hìc notandum, ubi ex $x^4 + 2yx^2 + y^2 = -qx^2 - rx - t$ extrahitur radix, tam

$+ 2yx^2 \qquad + y^2$

primum membrum quam secundum, binas radices habere: nimirum primi membri radix est tam $x^2 + y$, quam $-x^2 - y$, ut secundi est $+ x\sqrt{(-q + 2y)} + \sqrt{(-t + y^2)}$, & $- x\sqrt{(-q + 2y)} - \sqrt{(-t + y^2)}$; unde prima fronte videri posset quatuor diversas æquationes profluere, combinata utravis e prioribus binis cum utralibet e posterioribus. Sed cum idem sit combinare positivam prioris membri, cum positiva posterioris, ac illius negativam, cum hujus negativa, & pariter idem illius positivam cum hujus negativa, ac illius negativum cum hujus positiva; illæ quatuor reducuntur ad binas a nobis adhibitas, quas exhibet una tantum e radicibus prioris membri combinata cum utravis e radicibus posterioris. Nimirum eadem prorsus æquatio est $x^2 + y = x\sqrt{(-q+2y)} + \sqrt{(-t+y^2)}$, ac $-x^2 - y = -x\sqrt{(-q+2y)} - \sqrt{(-t+y^2)}$, & pariter eadem $x^2 + y = -x\sqrt{(-q+y2)} - \sqrt{(-t+y^2)}$, ac $-x^2 - y = x\sqrt{(-q+2y)}$ $+\sqrt{}$

$+\sqrt{(-t+y^2)}$; quod ipſum notari poteſt ubi num.206 reſolvuntur generaliter æquationes ſecundi gradus.

422. Pariter notari poteſt etiam illud. Hac methodo uti licet etiam ante eliminatum ſecundum terminum. Sit æquatio $x^4+px^3+qx^2+rx+t=0$, ſive $x^4+px^3=-qx^2-rx-t$. Aſſumatur $x^2+\frac{1}{2}px+y$, & facto ejus quadrato $x^4+px^3+(\frac{1}{4}pp+2y)x^2+py+y^2$, erit $=(-q+\frac{1}{4}pp+2y)x^2+(-r+p)x+(y^2-t)$, ubi facto $(-q+\frac{1}{4}pp+2y)\times(y^2-t)=(\frac{-r+p}{2})^2$, haberetur æquatio magis quidem implexa, ſed adhuc tertii gradus pro y, cujus valore invento, jam binæ æquationes forent $x^2+\frac{1}{2}px+y=\pm\sqrt{(-q+\frac{1}{4}pp+2y)}\pm\sqrt{(y^2-t)}$, adhibito utrobique in ſecundo membro ſigno eodem, vel ſignis mutatis prout $-r+p$ fuerit valor poſitivus, vel negativus. Sed præſtat ſecundum terminum tollere, ut habeantur reliqua minus implexa.

423. Demum notetur hic etiam eodem artificio reſolvi æquationes $x^{4m}+px^{3m}+qx^{2m}+rx^m+t=0$, quicunque fuerit valor m, cum facto $y=x^m$, reducatur ad $x^4+px^3+qx^2+rx+t=0$.

§. XIII.

§. XIV.

De radicum limitibus, & mutationibus valoris formulæ orti ex diversis substitutionibus factis pro quantitate incognita: ubi de methodo investigandi maxima, & minima.

424. EXposita resolutione æquationum gradus tertii & quarti, transeundum esset ad æquationes altiorum graduum. At nulla adhuc generalis methodus inventa est, qua altiorum graduum æquationes resolvi possint inveniendo formulam, quæ valorem radicum exhibeat. Methodum adhibitam pro æquationibus gradus quarti non posse ad altiores gradus traduci ostendimus superiore §. Quasdam per divisiones deprimi ad gradum inferiorem ostendimus num. 74, quæ quidem si deprimantur ita ut quartum jam non excedant gradum, resolvuntur methodis traditis huc usque. Eas quæ habeant hanc formam $x^m + p = o$, $x^{2m} + px^m + q = o$; $x^{3m} + px^{2m} + qx^m + r = o$, $x^{4m} + px^{3m} + qx^{2m} + rx^m + s = o$, reduci ad primum, secundum, tertium, quartum gradum, ponendo $x^m = y$, tum resolvi, vidimus num. 204, 220, 371, 423, in quibus inventa algebraica expressione valoris y, invenitur etiam expressio valoris $x = \sqrt[m]{y}$. In reliquis omnibus approximatione utendum.

425. Ut autem vero quamproximas radices eruamus, tradendæ sunt methodi, quibus ad eas liceat utcumque accedere, quæ potissimum sunt binæ: altera qua limites radicum investigantur, altera, qua diver-

diversis valoribus substitutis pro x, investigatur valor primi membri æquationis, qui debet evadere $=0$, accurate, vel proximè, ut valor ille substitutus possit congruere accuratè vel proximè cum radice ipsa. Agemus igitur hìc de limitibus radicum & de effectu substitutionum in formulis algebraicis, ex qua consideratione pandetur nobis aditus ad æquationum resolutionem, & interea alii quoque satis uberes profluent fructus, potissimum pro quæstionibus de maximis, & minimis.

426. Sæpe limites aliqui inveniuntur considerando coefficientes ipsos, quod in æquationibus gradus tertii præstitimus num. 364. Sed ii raro admodum solent esse satis arcti, nec semel inventi possunt arctiores reddi. Ut igitur ad alias methodos progrediamur, investigari limites possunt etiam demendo aliquid in altero æquationis membro, ut in altero minus remaneat, quo artificio dividendo deinde, ac radices extrahendo, quandoque uterque limes invenitur, quandoque unicus, ac limitis jam inventi substitutione pro incognita sæpe ad radicem magis acceditur. Ne autem hujus methodi præcepta sine ulla necessitate multiplicentur, ostendemus, quo pacto positivarum radicum limites investigari possint, quæ pro negativis etiam eundem habebit usum, si negativæ juxta num. 259. mutentur in positivas, mutatis nimirum alternorum æquationis ad debitam redactæ formam terminorum signis.

427. Termini omnes negativi in alterum membrum per transpositionem mutentur ita, ut fiant positivi. Tum si alterum membrum constet unico ter-

termino incognitam continente, alterum pluribus, quorum aliquis contineat potentiam incognitæ superiorem ea, quæ habetur in priore membro, & aliquis inferiorem (inferiori autem potentiæ nomine intelligimus etiam potentiam o, seu terminum cognitum, quem incognita non ingreditur); semper inveniri poterit uterque limes, omittendo in membro plures terminos continente reliquos omnes præter unicum, primo quidem continentem potentiam incognitæ altiorem, tum inferiorem; quo pacto id membrum manebit reliquo minus, ac dividendo per incognitam quoties licet, manebit in primo casu quædam potentia incognitæ minor quantitate cognita; in secundo quædam quantitas cognita minor quadam potentia incognitæ, & inde nullo negotio uterque ernetur limes.

428. Sit æquatio $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$. Transponendo terminum negativum habetur $x^5 + 2x^4 + 2x^2 + 4 = 10x^3$. Quoniam in secundo membro habetur unicus terminus incognitam continens, & in eo potestas incognitæ minor est, quam in prioribus binis primi membri & major quam in binis postremis ejusdem, bini poterunt inveniri limites tam vero minores, quam majores. Retento enim solo primo termino primi membri habetur $x^5 < 10x^3$ $x^2 < 10$, $x < \sqrt{10}$, sive $x < 3.2$, ubi pro radice numeri 10, quæ versatur inter 3.1, 3.2 assumpsimus 3.2, ut nimirum valor x, qui debuit esse $< \sqrt{10}$ sit certo minor, quam 3, 2, ac semper imposterum in hac limitum inve-

investigationè, ubi occurrent arithmeticæ, operationes, in quibus verus valor obtineri non possit, vel, licet possit, negligantur inferiores fractiones, assumemus valorem proximum, vel minorem, vel majorem vero ita, ut membrum, quod debuit remanere majus, vel minus, multo etiam majus, vel multo minus remaneat. Retento autem solo secundo termino erit $2x^4 < 10x^3$, $2x < 10$, $x < 5$, qui limes est priore remotior. At retento solo tertio erit $2x^2 < 10x^3$, $2 < 10x$, $\frac{1}{5} < x$, sive $x > \frac{1}{5}$, vel $x > 0.2$: retento autem solo quarto fit $4 < 10x^3$, $x^3 > \frac{4}{10}$, $x > \sqrt[3]{0.4}$, $x > 0.7$, qui limes priore est propior. Includitur igitur radix positiva quævis hujus æquationis, inter 0.7, ac 3.2

429. Si æquatio fuisset $x^5 - 2x^4 - 10x^3 - 2x^2 - 4 = 0$, & quæsiti fuissent limites radicum negativarum, mutatis signis alternorum terminorum, quorum penultimus hic deest, haberetur $x^5 + 2x^4 - 10x^3 + 2x^2 + 4 = 0$, nimirum illa ipsa prior æquatio, in qua positivæ radices versantur inter 0.7, 3.2, adeoque propositæ æquationis radices negativæ inter -0.7, -3.2.

430. Si in altero membro habeatur post transpositionem unicus terminus continens potentiam incognitæ minimam omnium, quæ habentur in altero, vel omnium maximam, semper inveniri poterit eadem methodo limes in priore casu minor vero, in posteriore major. Sit æquatio $x^5 + 3x^3 + 2x^2$

$-64 = 0$. Transposito termino negativo erit $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$. Retento solo tertio termino primi membri, erit $2x^2 < 64$, $x^2 < 32$, $x < \sqrt{32}$, $x < 5.7$. Retento solo secundo, erit $3x^3 < 64$, $x^3 < 21.4$, $x < \sqrt[3]{21.4}$, $x < 2.8$. Retento solo primo erit $x^5 < 64$, $x < \sqrt[5]{64}$, $x < 2.3$, qui tertius limes est omnium proximus vero valori, cum sit omnium minimus. Ac eodem modo si æquatio fuisset $x^7 + 3x^5 + 2x^4 - 64x^2 = 0$, transponendo obvenisset $x^7 + 3x^5 + 2x^4 = 64x^2$, & dividendo per x^2 fuisset $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$, ut prius. Quod si sit $x^5 - x^4 - 2x^3 - 243 = 0$, erit $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$, adeoque $x^5 > 243$, $x > \sqrt[5]{243}$, $x > 3$, vel $x^5 > 2x^3$, $x^2 > 2$, $x > 1.4$, vel $x^5 > x^4$, $x > 1$, quorum limitum proximus est 3, qui omnium est maximus.

431. Ex limite in primo casu majore, in secundo minore potest sæpe erui alter in illo minor in hoc major, dividendo in primo ipso casu terminos membri continentis potentias superiores incognitæ per incognitam, ac terminum ea jam carentem in altero membro per limitem majorem vero jam inventum: quo pacto membrum continens incognitam jam erit minus, & continebit præterea terminum cognitum, quo sublato utrinque, & replicata di-

visione, deveniri quandoque poterit ad unicum terminum continentem incognitam, & majorem cognito. In secundo vero casu idem præstabitur quandoque substituendo in termino continente potentiam maximam valorem limitis inventi vero minoris pro incognita ita, ut deprimatur ad potentiam primi termini alterius membri, tum subtrahendo utrinque terminum ipsum primum, ac iterum deprimendo eadem substitutione eandem illam potentiam maximam, & subtrahendo, donec deveniatur ad solum terminum cognitum in eo membro, quod prius plures continebat terminos. Res autem exemplis patebit magis.

432. In æquatione $x^5 + 3x^3 + 2x^2 = 64$ inventus est num. 430, limes vero major 2.3. Si dividatur primum membrum per x^2 secundum per 2.3×2.3, fiet $x^3 + 3x + 2 > 12$. Quare $x^3 + 3x > 10$, & iterum dividendo hinc per x, inde per 2, 3, erit $x^2 + 3 > 4.3$, adeoque $x^2 > 1.3$, ac proinde $x > \sqrt{1.3}$. $x > 1.1$. Versatur igitur valor radicis positivæ inter 1, 1, ac 2. 3. At in æquatione $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$ limes vero minor erat ibidem 3. Eo posito pro x in primo membro erit $3x^4 < x^4 + 2x^3 + 243$, adeoque dempto utrinque x^4 fiet $2x^4 < 2x^3 + 243$. Iterum posito 3 pro x in primo membro, fit $6x^3 < 2x^3 + 243$; ac dempto $2x^3$ fit $4x^3 < 243$, $x^3 < 60.75$, $x < 4$. Quare radicis positivæ valor versatur inter 3, & 4.

433. Id

433. Id tamen non semper succedit. Sic si in priore æquatione fuisset $x^5 + 3x^3 + 16x^2 = 64$, limes major omnium proximus haberetur ex $16x^2 < 64$, $x^2 < 4$, $x < 2$. Divisione autem facta hinc per x^2 inde per 4 fuisset $x^3 + 3x + 16 > 16$, ac dempto utrinque 16 relinqueretur $x^3 + 3x > 0$, unde jam nihil ultra erui potest. In æquatione autem posteriore si fuisset $x^5 = 3x^4 + 4x^3 + 8$, limes vero minor proximus erueretur ex $x^5 > 3x^4$, sive $x > 3$, quo valore substituto pro x in primo membro fuisset $3x^4 < 3x^4 + 4x^3 + 8$, & dempto $3x^4$ utrinque, $0 < 4x^3 + 8$, unde pariter nihil eruitur.

434. Si facta transpositione in utroque membro plures habeantur termini, hæc methodus inveniendi limites non potest succedere. Relicto enim in altero membro unico termino, qui minor erit, quam totum alterum membrum, oporteret & in altero membro omittere omnes terminos præter unicum, sed jam non constaret utrum membrum esset majus. Si sit $x^4 + 2x^3 = 10x + 7$, fieri potest $x^4 < 10x + 7$, vel $x^4 + 2x^3 > 10x$, $x^3 + 2x^2 > 10$, sed inde ulterius progredi non licet subtrahendo quidpiam in primo etiam membro, quod posset remanere vel æquale, vel majus, vel minus.

435. Etiam quando uterque limes invenitur, raro admodum ii limites erunt inter se proximi. Quotiescunque enim plures habebuntur radices posi-

sitivæ vel plures negativæ, earum singulæ, iisdem limitibus contineri debebunt; ac proinde limites ipsi non possunt minus distare a se invicem, quam radix maxima a minima. Adhuc tamen usui esse poterunt, ubi radices rationales investigantur, nam eæ debent versari inter postremi termini divisores juxta num.236, qui si multi sint, labor inventis limitibus, plurimum contrahetur, omissis nimirum iis omnibus, qui extra limites ipsos jacent. Sic pro æquatione $x^5 + 3x^3 + 2x^2 - 64 = 0$, inventi sunt num.432. limites radicum positivarum 1.1, & 2.3. Quare si ulla habetur rationalis radix positiva inter tot divisores numeri 64, potest esse solum 2. Et quidem ea ipsa est radix, & æquationem verificat.

436. Nonnunquam radices etiam imaginariæ deprehendentur ope limitum si nimirum is limes, qui valore radicis debet esse major, sit minor eo, qui debet esse minor, quod fieri omnino non potest. Si æquatio sit $x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 64 = 0$, facta transpositione erit $x^5 + 3x^3 + 64 = 2x^2$. Quare $x^5 < 2x^2$, $x^3 < 2$, $x < \sqrt[3]{2}$, $x < 1.3$, Rursus $64 < 2x^2$, $32 < x^2$, $x > \sqrt{32}$, $x > 5.5$. Igitur valor radicis positivæ deberet esse minor, quam 1.3, & major, quam 5.5, quod fieri omnino non potest. Nulla igitur haberi potest ejus æquationis positiva radix. Cum vero ob continuationem signorum interruptam in terminis $+ 3x^3 - 2x^2$, non omnes radices ejus æquationis negativæ esse

pos-

possint per num. 218, & radix positiva nulla sit possibilis, oportet imaginarias aliquas radices habeat æquatio.

437. Quando immediatè invenitur limes vero minor, potest etiam semper magis ad valorem radicis vero minorem accedi, substituendo in terminis omissis valorem jam inventum pro incognita, quo pacto jam minus omittetur, & perpetuo iterata substitutione nonnunquam eo artificio ad radicem minimam acceditur quamproximè. In æquatione $x^5 = x^4 + 2x^3 + 243$ neglectis num. 430, prioribus binis terminis secundi membri, inventum fuerat $x > 3$. Substituto hoc valore pro x in iis, erit $x^5 > 81 + 54 + 243$, $x^5 > 338$, adeoque $x > 3.2$, qui limes radici est propior. Si rursum ponatur in terminis $x^4 + 2x^3$, hic novus limes pro x, accessus restituto calculo fiet major, & ita porro liceret progredi in infinitum.

438. Verum hæ methodi investigandi radicum limites, & per eos radices ipsas nec generales sunt, quin immo multo plures casus excludunt, quam includunt juxta num. 434, & raro admodum satis accedunt. Ut igitur ad aliam progredi liceat, quæ per substitutiones rem conficit, præmittenda sunt quædam, quæ pertinent ad mutationes varias, quas subit formula primi membri æquationis substitutis aliis, atque aliis valoribus pro x, quæ utilissima sunt non ad hanc solum investigationem, ut supra innuimus, sed ad nexus omnes inter quantitates a se mutuo pendentes, & ad problemata, quæ dicimus *de maximis, & minimis*, in quibus nimirum

rum investigatur, ubi nam quantitas quæpiam perpetuo variabilis ad maximum aliquem, vel minimum valorem deveniat.

439. Sæpe binæ quantitates variabiles ita a se invicem pendent, ut altera mutata mutetur & altera. In motu æquabili pendet spatium percursum a solo tempore: duplo nimirum, vel triplo tempore duplum, vel triplum spatium conficitur. Porro hic nexus, vel potest esse ejusmodi, ut altera quantitas perpetuo crescat, altera perpetuo crescente, ac mutetur accurate in ratione simplici directa alterius, quod in superiore exemplo contingit, vel ut mutetur in aliqua ratione ipsius multiplicata directa, quemadmodum in Geometria globorum superficies sunt in duplicata, moles autem in triplicata radiorum ratione, vel fieri potest e contrario, ut, altera crescente perpetuo, altera perpetuo decrescat, ut si quantitas quævis in plures partes dividitur, magnitudo singularum partium decrescit in ratione reciproca simplici numeri partium, qui quo major est, eo singulæ partes minores fiunt, ac in Nevvtoni theoria gravitas decrescit in ratione reciproca duplicata distantiarum a se invicem, eo nimirum est minor, quo distantiarum quadrata majora sunt.

440. At sæpe etiam contingit, ut altera perpetuo crescente, altera perpetuo crescat per aliquod intervallum, tum incipiat decrescere, vel viceversa primo decrescat tum incipiat crescere, ac in primo casu ad maximum quoddam, in secundo deveniat ad minimum. Sic dum grave fune pendulum oscillat, celeritas augetur perpetuo usque ad me-

diam

diam oscillationem, tum perpetuo minuitur, umbrarum vero longitudo orto sole, ac procedente die decrescit, ac facta minima in meridie, deinde crescit usque ad solis occasum. Quandoque autem altera quantitate perpetuo crescente altera decrescit ita, ut alicubi etiam evadat = o, tum in negativam abeat, ac semper magis recedat a o crescens ex parte negativa, tum iterum minuatur, & transeat per o abiens in positivam, idque per multas vices, cujusmodi exempla nusquam melius haberi possunt, quam in Geometria, ubi si curva quæpiam linea se pluribus flexibus contorqueat, ejus distantia a recta quavis transversim ducta jam augetur, jam minuitur, jam evadit nulla, ubi nimirum ab illa recta secatur, vel tangitur, jam directionem mutat, ad partem oppositam jacens. Idem autem & in algebraicis formulis videre est, in quibus si præter quantitates quasdam constantes, & invariabiles, concipiatur una quæpiam, quæ perpetuo varietur, variatur perpetuo formulæ valor, & mutationes subit, quas jam considerabimus.

441. Sit quævis formula algebraica, ut $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2}$ &c. continens quantitatem x, quæ concipiatur perpetuo mutata, & quantitates quascunque a, b, c &c. quæ concipiantur constantes. Mutato valore x, qui concipiatur initio quidem negativus maximus tum perpetua additione decrescat ex parte negativa, fiat o, transiens in positivum, ac deinde crescat ex parte positiva in immensum, formulæ illius valor perpetuo mutabi-

tur, In ea mutatione leges hujusmodi omnino observantur.

442. Primo quidem si valoris x mutatio sit continua sive fiat per omnes magnitudinis gradus sine saltu, etiam mutatio valoris formulæ erit continua, & transibit sine saltu per omnes magnitudinis gradus. Nimirum, si ex binis valoribus x proveniant bini valores formulæ, semper valor quicunque intermedius inter illos binos valores formulæ ipsius orietur a quodam intermedio valore x. Si enim quantitatis x incrementum concipiatur minui ultra quoscunque determinatos limites, cujuscunque etiam ejus potentiæ, adeoque & cujusvis aggregati quotcumque potentiarum incrementum, vel decrementum minuetur pariter ultra quoscumque limites, ac proinde illa crescente incrementis non interruptis, crescit hoc etiam eodem pacto.

443. Hinc si in mutatione continua valor formulæ abeat e positivo in negativum, vel viceversa; id duplici tantum modo poterit contingere, nimirum vel transeundo per o, vel transeundo per infinitum, & positiva cum negativis nectuntur quodammodo in nihilo, & in infinito, ac imminuto vel aucto in infinitum valori positivo succedit crescens vel decrescens per omnes magnitudinis gradus valor negativus, quotiescumque ille in negativum convertitur, ac viceversa. Sit formula $4-x$. Ea, existente x positivo, & minore quam 4, erit positiva; crescente autem x decrescet, donec facto $x=4$, fiat $=0$, tum adhuc aucto x evadet negativa. At $\frac{8}{4-x}$, est pariter positivi valoris, donec $x<4$;

sed

sed perpetuo crescit, aucto x, ita, ut accedente x ad 4 ultra quoscunque limites, crescat contra ultra quoscunque limites 8; nam existente $x = 2$, erit ejus valor $\frac{8}{2} = 4$, existente $x = 3$, vel $= 3.9$, vel $= 3.99$, & ita porro, evadit $= \frac{8}{1}$, $\frac{8}{0.1}$, $\frac{8}{0.01}$ &c. sive 8, 80, 800 &c. Facto $x = 4$, evadit $= \frac{8}{0}$ valoris infiniti, tum aucto x mutatur in negativum; cum nimirum existente $x = 5$, jam fit $= \frac{8}{-1} = -8$. In primo casu abit valor positivus in negativum transeundo per o, in secundo transeundo per infinitum. Et quicumque valor formulæ utcumque parvus in primo casu, vel utcumque magnus in secundo concipiatur, vel positivus, vel negativus, facile invenietur valor x minor, vel major quam 4, qui eum pariat.

444. In iis casibus post appulsum ad o, vel ad infinitum, transcenditur, ac transcurritur is veluti limes interjacens inter positivas, & negativas magnitudines. At nonnunquam valor formulæ ab appulsu ad o, vel ad infinitum retro regreditur, sive eo adveniat ex parte positiva, sive ex parte negativa. Sit formula $16 - 8x + x^2$, nimirum quadratum binomii $4 - x$. Posito x positivo minore quam 4 valor ejus formulæ erit positivus, qui decrescet donec fiat $x = 4$, ibi evadet $= 0$, tum au-

cto

ĉto x non mutabitur in negativum, ſed retro curſum ex parte poſitiva reflectet iterum poſitivus, & auctus. Facto enim $x = 2$, erit valor ejus formulæ $16 - 16 + 4 = 4$ facto $x = 3$, fiet $16 - 24 + 9 = 1$, facto $x = 3.9$, fiet $16 - 31.2 + 15.21 = 0.01$, facto $x = 4$. fiat $16 - 32 + 16 = 0$, facto $x = 4.1$, fiet $16 - 32.8 + 16.81 = 0.01$, facto $x = 5$, fiet $16 - 40 + 25 = 1$, & ita porro. Quod ſi ſit $\frac{8}{16 - 8x + x^2}$, exiſtente x minore, quam 4, erit valoris poſitivi, creſcente x creſcet ultra quoſcumque limites, facto $x = 4$, evadet valoris infiniti, tum aucto x, incipiet decreſcere, ſed ex parte poſitiva. Aſſumptis enim pro x valoribus 2, 3, 3.9, 4, 4.1. 5, 6, evadet $\frac{8}{4}$, $\frac{8}{1}$, $\frac{8}{0.01}$, $\frac{8}{0}$, $\frac{8}{0.01}$, $\frac{8}{4}$, ſive 2, 8, 800, infinitum, 800, 8, 2. Eodem autem pacto formula $-x^2 + 8x - 16$ ſemper negativa accederet ad o, fieret $= 0$, facto $x = 4$, tum retro regrederetur ab ipſo appulſu ad o, & $\frac{8}{-x^2 + 8x - 16}$ ſemper valoris negativi abiret in infinitum, facto $x = 4$, tum ex infinito regrederetur pariter ex parte negativa.

445. Aliquando autem formulæ valor decreſcens incipiet iterum creſcere, aliquando vero creſcens antequam in infinitum abeat, incipiet decreſcere, & in primo caſu habebit minimum quoddam ibi, ubi decrementum mutat in incrementum, in

ſecun-

secundo maximum ibi, ubi mutat incrementum in decrementum. Sit formula $x^2 - 8x + 20$: ea si fiat x vel negativum valoris cujuslibet, vel positivum, semper erit valoris positivi. Sed dum x minor quam 4 augetur, decrescet perpetuo, & fiet minima, facto $x = 4$, tum iterum crescet. Est enim $= x^2 - 8x + 16 + 4$, & $x^2 + 8x + 16$ est quadratum valoris $x - 4$, vel $4 - x$, quod semper est positivi valoris, majus vel minus, prout x magis, vel minus distat a 4, ac facto $x = 4$, evadit $= 0$: Quamobrem etiam addito 4 illi quadrato, habebitur valor semper positivus, qui evadet minimus, ubi fiet $x = 4$, & illud quadratum $= 0$. Contra formula $\frac{8}{x^2 - 8x + 20}$ erit quidem semper positivi valoris, at accedente x ad 4, crescet, facto $x = 4$ evadet maxima, tum decrescet. Quod si fuisset $-x^2 + 8x - 20$, vel $\frac{8}{-x^2 + 8x - 20}$, valor in utroque casu semper negativus assequeretur in primo minimum quiddam in secundo maximum facto $x = 4$.

446. Sæpe plures etiam habentur appulsus ad 0 cum transitu vel sine ipso, & plures regressus, ac mutationes incrementi in decrementum, vel viceversa cum maximis, vel minimis valoribus, quæ quidem in formulis primi membri æquationum ordinatarum facile perspici possunt. In illis etiam in appulsu valoris x ad radicem quampiam fit tota formula $= 0$, ac nisi forte ibidem habeatur radi-

cum

cum æqualium numerus par, fit semper transitus per o a valore positivo ad negativum, vel viceversa, ubi autem habetur numerus par radicum æqualium, fit regressus a o sine transitu, ac inter binas quasvis radices reales inæquales necessario habetur maximum quoddam, ac plerumque & minimum exhibetur a radicibus imaginariis, quæ ut paulo intimius perspici possint, notanda sunt prius quædam pertinentia ad ipsos valores ejusmodi formularum.

447. In primis si æquatio sit rite *ordinata*, & coefficientes finitos habeat, valor primi membri numquam poterit evadere infinitus existente x valoris finiti, sed vel erit $=$ o, vel finitæ, magnitudinis. Nam in æquatione rite ordinata nullus terminus dividetur per incognitam illam, adeoque quivis terminus continet quantitatem cognitam finitam vel numquam, vel aliquot vicibus multiplicatam per valorem x, qui cum finitus sit, erit finitus etiam quivis terminus, adeoque aggregatum quoque omnium finitum erit, nisi forte positivis, ac negativis terminis se mutuo destruentibus, evanescat, & fiat $=$ o. Quamobrem si assumptis binis valoribus pro x, valor *formulæ* primi membri prodeat ex altero positivus, ex altero negativus; inter utrumque valorem assumptum pro x, continebitur realis aliqua radix æquationis, qua nimirum assumpta pro x, fiet formula ipsa $=$ o. Nam e negativo in positivum valorem ea formula transire non potest, nisi transeat vel per o, vel per infinitum (per num. 443). Non potest autem transire per infinitum. Transibit igitur per o.

448. Si

448. Si concipiatur valor x auctus in immensum, terminus qui continebit potentiam superiorem ipsius quamcumque, erit in immensum major quovis termino, qui continebit inferiorem: contra eo in immensum imminuto, erit in immensum minor: & accipi potest valor x ita magnus, vel ita parvus, ut terminus superiorem ipsius potentiam continens ad terminum continentem potentiam inferiorem habeat rationem utcumque magnam in primo casu vel parvam in secundo, quicumque sint coefficientes finiti ipsorum terminorum. Sit enim prior terminus ax^{m+n}, posterior bx^m, ratio data 1 ad r. Erit $ax^{m+n} . bx^m :: x^n . \frac{b}{a}$, cum & productum extremorum, & productum mediorum sit bx^{m+n}. Ponatur $t^n = r$, $c^n = \frac{b}{a}$, & sumatur $x = \frac{c}{t}$, eritque $x^n = \frac{c^n}{t^n} = \frac{c^n}{r}$. Quare ratio x^n ad $\frac{b}{a}$, sive x^n ad c^n erit eadem, ac $\frac{c^n}{r}$ ad c^n, sive c^n ad $r c^n$, vel 1 ad r, quod succedet, utcunque quantitas r sit parva, vel magna, qua decrescente, vel crescente in immensum decrescet, vel crescet t^n, adeoque contra crescet, vel decrescet $\frac{c}{t}$ sive x.

449. Quamobrem si fuerint quotcumque termini

ni continentes diversas potentias incognitæ x cum coefficientibus in se determinatis, nec infinitis, nec $=$ o, & mutato valore x, non mutatis; poterit assumi valor x ita magnus, ut terminus quivis superiorem potentiam continens sit in immensum major summa omnium continentium potentias inferiores, vel ita parvus ut terminus quivis continens potentiam inferiorem sit pariter in immensum major summa omnium continentium potentias superiores, ac in primo casu adhuc aucto, in secundo imminuto valore x in immensum, augebitur adhuc magis in immensum illius termini ratio ad aggregatum omnium reliquorum. Si enim numerus terminorum sit p, & sit ratio quædam utcumque magna 1 ad q, fiat vero $r = pq$; poterit sumi valor x ita magnus, vel ita parvus, ut terminus continens in primo casu potentiam superiorem x, in secundo inferiorem, habeat ad quemvis e reliquis rationem majorem, quam sit 1 ad r (per num.448.), sive 1 ad pq. Quare diviso illo termino in numerum partium æqualium p, quævis ex iis habebit ad quemvis e reliquis terminis rationem majorem, quam sit 1 ad q, adeoque & is totus terminus ad reliquorum omnium summam: ac patet ex ipso num.448, eam rationem adhuc in immensum crescere aucto in primo casu valore x, imminuto in secundo.

450. Hinc si in primo membro æquationis cujusvis ordinatæ ponatur pro x valor satis magnus negativus, valor ipsius primi membri erit negativus in æquationibus gradus imparis, positivus in æquationibus gradus paris; ac si ponatur valor positivus satis magnus: semper valor totius formulæ

mulæ erit positivus. Nam primus terminus æquationis ordinatæ semper & signum positivum habet, & continet maximam potentiam x, eamque elevatam ad eum gradum, qui æquationem denominat. Quare & id signum habet, quod illa incognitæ x potestas, & excedit reliquorum omnium summam: cumque negativarum quantitatum potentiæ impares negativæ sint, pares vero positivæ, positivarum vero omnes positivæ; posito pro x valore negativo, erit valoris negativi in æquationibus gradus imparis, positivi in æquationibus gradus paris, posito autem valore positivo, erit positivi in omnibus, adeoque idem & toti formulæ accidet.

451. Inde autem consequitur quamvis æquationem gradus imparis debere habere saltem unam radicem realem. Nam posito satis magno valore negativo pro x, prodit valor totius formulæ negativus, posito valore satis magno positivo, prodit positivus, adeoque (per num.447) habebitur radix aliqua realis intermedia inter eos valores.

452. Tum vero eruitur illud, numerum radicum realium in æquatione gradus imparis debere esse imparem, in æquationibus gradus paris non posse esse nisi parem. Si enim cujuspiam æquationis incognita sit x, & radix quædam realis r, ac dividatur illa æquatio per $x-r$, divisio debebit esse accurata sine ullo residuo, & quotus erit nova æquatio gradus unitate minoris, & continens reliquas omnes radices, quod quidem constat ex ipsa geneſi æquationum altiorum, quæ nimirum componuntur multiplicatione omnium æquationum primi gradus continentium radices singulas, juxta n.235, accuratius autem demon-

monstratur dividendo æquationem generalem $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. . . $+ px + q = 0$ per $x - r$. Proveniet enim ex ejusmodi divisione sequens quotus post numerum operationum m,

$$\begin{array}{llll} x^{m-1} & + rx^{m-2} & + r^2 x^{m-3} \ \&c. & + r^{m-1} \\ & + a & + ar & + ar^{m-2} \\ & & + b & + br^{m-3} \\ & & & \&c. \\ & & & + p \end{array} = 0$$

ac diligentius perpendenti ipsam divisionis seriem satis patebit, postremum residuum fore $r^m + ar^{m-1} + br^{m-2}$ &c. . . $+ pr + q$, quod quidem erit $= 0$. Cum enim r sit radix æquationis propositæ $x^m + ax^{m-1} + bx^{m-2}$ &c. . . . $+ px + q = 0$, posito r pro x debet formula primi membri evadere $= 0$, nimirum illa ipsa $r^m + ar^{m-1} + br^{m-2}$ &c. . . $+ pr + q$, quæ pro residuo remanserat, debet esse $= 0$. Hinc divisa æquatione impari per æquationem simplicem, quæ contineat illam radicem realem, quam habet, orietur æquatio gradus paris continens reliquas, quæ si iterum habeat unam radicem realem, divisa per æquationem simplicem continentem ejusmodi radicem restituet æquationem imparem, habentem necessario saltem unam radicem realem. Adeoque illa proposita æquatio gradus imparis, quæ debet habere unam radi-

radicem realem, si habet & secundam, debet habere & tertiam, ac eodem argumento si habet quartam debet habere quintam, & ita porro; ac simul patet æquationem gradus paris, si habet radicem realem unam, debere habere & secundam, si habet tertiam, debere habere & quartam, ac ita porro; ac proinde æquationem quamvis gradus imparis debere habere numerum radicum realium imparem, gradus vero paris non posse habere nisi parem.

453. Atque hinc demum fit manifestum illud, quod num.219. proposuimus, nimirum radicum imaginariarum numerum non posse esse nisi parem. Cum enim æquatio gradus imparis habeat radicum numerum imparem, paris parem, & realium radicum numerus in illis non possit esse nisi impar, in his par; radicum imaginariarum numerus reliquus non poterit esse nisi par in utrisque.

454. Concipiatur jam æquatio, quæ habeat omnes radices reales, & inæquales, in quibus valor formulæ transeat per o. Si ea sit gradus imparis, posito pro x valore negativo satis magno, valor formulæ erit pariter satis magnus & negativus, tum perpetuo decrescet, donec in appulsu valoris ad primam radicem fiat $=$ o, & migret in positivum, qui deinde crescet, tum alicubi necessario debebit mutare incrementa in decrementa, cum debeat redire ad o in appulsu ad secundam radicem, ubi migrabit iterum in negativum, ac crescet ex parte negativa, tum decrescet, ut in tertia radice fiat $=$ o, & ita porro, ac si æquatio sit gradus paris valor initio positivus migrabit in negativum, tum in positivum, & ita porro.

 455. Exem-

455. Exemplum haberi potest in æquatione $x^5 - 7x^4 - 7x^3 + 79x^2 + 6x - 72 = 0$, cujus radices reales sunt -3, -1, 1, 4, 6. In ea si ponatur pro x quivis numerus negativus major, quam -3, valor formulæ erit negativus posito $x = -3$, ille valor fit $= 0$, tum transit in positivum ac posito pro x valore -2.9, vel -2.5, vel -2, vel -1.5, vel quovis alio numero medio inter -3, & -1, semper idem valor est positivus, qui quidem prius crescit, tum decrescit, & facto $x = -1$ fit iterum $= 0$ tum inter -1, & 1 est negativus, ab 1. ad 4 positivus a 4 ad 6 negativus, post 6 semper deinde positivus, quod Tyroni substituenti numeros facile patebit.

456. Quod si binarum radicum valores ad se mutuo accedant, minuitur intervallum illud, in quo valor primi membri transiens per 0 in prima crescit, tum decrescit, & iterum appellit ad 0 in secunda; ac coeuntibus binis radicibus ita, ut jam æquatio habeat binas radices æquales, illud intervallum prorsus eliditur, & valor formulæ in appulsu ad binas radices reales non transit per 0, sed ab ipso 0 regreditur. Sic si æquatio sit $x^5 - 5x^4 - 9x^3 + 53x^2 + 8x - 48 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 1 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$, adeoque habet radices -3, -1, 1, 4, 4, quarum binæ postremæ æquales sunt, valor formulæ a valore $x = -3$ ad -1 erit positivus, a valore -1 ad 1 negativus, a -1 ad 4 positivus, tum in ipso quidem $x = 4$, erit

erit $=0$, sed postea iterum erit positivus, ut patebit substituenti.

457. At si sumatur æquatio cujus radices -3, -1, 4, 4, 4, nimirum $x^5 - 8x^4 + 3x^3 + 92x^2 - 112x - 192 = 0$, composita ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$, $x - 4 = 0$; in ipsa valor formulæ a -3 ad -1 erit positiuus, a -1 ad 4 negativus, eliso jam illo intervallo ab 1 ad 4, in quo iterum positivus erat, & post 4 erit positivus; adeoque in illa radice triplice 4 valor formulæ transibit per 0, & mutabit signum. Verum si æquatio sit potius $x^5 - 13x^4 + 48x^3 + 32x^2 - 512x + 768 = 0$; cujus radices -3, $+4$, $+4$, $+4$, $+4$, valor formulæ ante $x = -3$ negativus, a -3 ad 4 positivus esset, eliso etiam illo intervallo a -1 ad 4 in quo negativus erat, ac post $x = 4$ pariter positivus, adeoque appellet quidem ad 0, sed non transibit; atque eodem pacto semper patebit in numero radicum æqualium impare haberi transitum, in pari regressum.

458. Binæ radices postquam æquales evaserunt, possunt abire in imaginarias cum nimirum valor formulæ, qui factis binis radicibus æqualibus, regrediebatur ab ipso 0, non pertingit ad 0, sed regreditur, sive incipit iterum crescere, ante quam deveniat ad ipsum 0. Id patebit in æquatione $x^5 - 5x^4 - 8x^3 + 56x^2 + 7x - 51 = 0$, quæ componitur ex æquationibus $x + 3 = 0$, $x + 1$

 $= 0$,

$=0$, $x-1=0$, $x^2-8x+17=0$, adeoque habet radices -3, -1, $+1$, $4+\sqrt{-1}$, $4-\sqrt{-1}$. In ea valor primi membri est negativus, ante quam fiat $x=-3$, a -3 ad -1 positivus, a -1 ad 1 negativus, qui deinde initio crescit, tum decrescit, & antequam fiat $=0$ incipit iterum crescere, ac crescit deinde in infinitum, ut substituenti patebit.

459. Hinc vero quotiescumque habetur minimum quoddam in valore formulæ primi membri ita, ut is a decrescendo transeat ad crescendum ante appulsum ad o, semper habebuntur binæ saltem radices imaginariæ. Aliquando tamen etiam illud intervallum inter valorem x, in quo formula primi membri incipit decrescere, & valorem, in quo sine appulsu ad o incipit iterum crescere, eliditur, & æquatio binas radices imaginarias continet sine minimo valore, sive quin valor formulæ incipiat ibi prius decrescere, tum crescere. Id patebit in æquatione $x^5-3x^4-9x^3+33x^2+8x-30=0$, quæ componitur ex æquationibus $x+3=0$, $x+1=0$, $x^2-16x+20=0$, adeoque habet radices -3, -1, 1, $2+\sqrt{-1}$, $2-\sqrt{-1}$. Ejus formula est negativa usque ad $x=-3$, positiva ad -1, negativa ad 1, tum deinde semper positiva, ut pariter substituenti patebit.

460. Porro ipsi valores, in quibus formula transit a crescendo ad decrescendum, vel viceversa, inveniri possunt, considerando incrementa, vel decrementa valorum formulæ orta ex perpetuo incremento

mento valoris incognitæ, quod summo erit usui & ad æquationum naturam penitius cognoscendam, ac inveniendas radices, & ad solvendas generaliter quæstiones omnes *de maximis, & minimis*, quotiescumque id, cujus quæritur maximum quoddam, vel minimum, algebraica formula exprimi potest.

461. Sit formula $x^m + ax^n + bx^r$ &c. ejus formæ, quam habet primum membrum æquationis ritè ordinatæ, in qua concipiatur x crescere per quantitatem quandam y. Omnes illi termini, qui continent x, mutabuntur, & si in singulis ponatur $x + y$ pro x; habebitur nova formula, ex qua si dematur illa prior $x^m + ax^n + bx^r$ &c. habebitur incrementum, vel decrementum formulæ ipsius ortum ex illo incremento y incognitæ x, quod incrementum, vel decrementum generali vocabulo dicemus differentiam, ut ille valor y dicetur pariter differentia incognitæ x, quæ nimirum differentiæ exhibent excessum, vel defectum secundi valoris incognitæ $x + y$ respectu primi x, & formulæ ortæ a secundo respectu ortæ a primo.

462. Jam vero si quivis ex illis terminis formulæ dicatur px^t, posito $x + y$ pro x, habebitur in eo (per num. 91) $px^t + t\,px^{t-1}y + \frac{t \times (t-1)}{1 \times 2} px^{t-2}y^2 + \frac{t \times (t-1) \times (t-2)}{1 \times 2 \times 3} \times px^{t-3}y^3$ &c. Quare dempto px^t remanebit pro differen-

ferentia illius termini formulæ ipsius $tpx^{t-1}y$ $+\frac{t\times(t-1)}{1\times 2}px^{t-2}y^{2}+\frac{t\times(t-1)\times(t-2)}{1\times 2\times 3}\times px^{t-3}y^{3}$ &c.

463. Dicatur jam summa omnium terminorum tpx^{t-1} provenientium ex omnibus terminis propositæ formulæ $=P$, summa omnium $t\times(t-1)\times px^{t-2}=Q$, omnium $t\times(t-1)\times(t-2)px^{t-3}=R$, & ita porro, & hæc differentia formulæ erit $Py+\frac{Q.y^{2}}{1\times 2}+\frac{Ry^{3}}{1\times2\times3}$&c., ac valorum P, Q, R derivatio ex ipsa formula proposita, ac ex se invicem statim patet. Nam tpx^{t-1} derivatur ex px^{t}, ducendo ipsum terminum in t, exponentem variabilis x, & dividendo per x, tum $t\times(t-1)px^{t-2}$, ex præcedenti tpx^{t-1} ducendo ipsum in $t-1$ exponentem ipsius variabilis x, & iterum dividendo per x, & pariter $t\times(t-1)\times(t-2)px^{t-3}$ derivatur ex præcedenti $t\times(t-1)px^{t-2}$, ducendo ipsum in $t-2$ exponentem variabilis x, & iterum dividendo per x. Ac eodem prorsus modo quivis hujusmodi terminus sequens derivatur ex præcedenti, ducendo ipsum in exponentem variabilis, & dividendo per ipsam variabilem.

464. Quamobrem si omnes termini formulæ pro-

propositæ ducantur in exponentem, quem variabilis x habet in eo termino & dividantur per x; formula, quæ inde orietur, & quam idcirco appellabimus primo derivatam, exhibebit illum valorem P. E formula P eadem prorsus lege derivabitur secundo formula Q, ex hoc tertio formula R, & ita porro, in qua derivatione terminus ille, qui in præcedenti formula carebat ipsa variabili, adeoque habebat variabilis exponentem o, evanescet, ductus nimirum in ipsum o, quo pacto decrescet terminorum numerus inter derivandum, ac continua illa divisione per variabilem, factis tot derivationibus, quot exprimit exponens potentiæ altissimæ ipsius illius variabilis, in postrema deerit variabilis ipsa, ac nova formula derivata ex ea evadet $= 0$.

465. Sit ex: gr: formula $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$, quæ dicatur A. Formula primo derivata erit juxta canonem numeri præcedentis $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192$; quæ erit $= P$: Formula secundo derivata erit $12x^2 - 96x + 176$, quæ erit $= Q$. Formula tertio derivata erit $24x - 96$, quæ erit $= R$. Formula quarto derivata erit 24, quæ erit $= S$, ex qua eadem lege derivaretur o, cum nihil jam supersit præter terminum 24, sive $24x^0$, qui ductus in exponentem o, evadit $= 0$. Porro si formula illa P primo derivata ducatur in y, secundo derivata Q in $\frac{y^2}{1 \times 2}$, ter-

tertio derivata R in $\frac{y^3}{1 \times 2 \times 3}$, quarto derivata S in $\frac{y^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$, habebitur differentia formulæ propositæ A orta ex differentia y addita variabili x. Ac si Tyro in eadem formula substituet ubique $x + y$ pro x, tum alibi ipsi formulæ addet formulas illas derivatas, & eo pacto multiplicatas, sive $Py + \frac{Py^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{Sy^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$; inveniet utrobique eamdem prorsus summam.

466. Concipiatur jam quivis determinatus valor quantitatis x, cui addatur incrementum y, quod illo stante concipiatur imminutum in immensum. Valores quidem P, Q, R &c.. qui non pendent ab ipso valore y, non mutabuntur, ac nisi forte ejusmodi fuerit valor x, ut formula P sit $= 0$, omnes termini $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c., erunt in immensum minores primo termino Py (per num. 448) & tota formula $Py + \frac{Py^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. habebit idem signum, quod primus ejus terminus Py, ac habebit valorem quamproximum valori ipsius, qui proinde prout fuerit conformis vel difformis valori formulæ propositæ A, ipsa formula ex additione illa facta valori x suscipiet incrementum, vel decrementum. Quod si forte fuerit $P = 0$, sed non fuerit $Q = 0$, tum primo termino seriei illius evanesce-

nescente, posterioribus respectu secundi imminutis in immensum, secundus $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$ exprimet quamproximè differentiam totius formulæ propositæ, prout fuerit valor Q positivus, vel negativus. Ac pariter si fuerit & $P = 0$, & $Q = 0$, sed non $R = 0$, idem præstabit tertius terminus $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$, & ita porro.

467. Hinc autem primo consequitur illud, cujuscunque magnitudinis assumatur x, dummodo non congruat cum valore radicis cujuspiam æquationis ortæ ex formula primo derivata posita $= 0$; sive æquationis $P = 0$; imminuto y in immensum, differentiam totius formulæ propositæ fore quamproxime, ut ipsum incrementum y, & habituram ad ipsum rationem finitam. Nam in eo casu, posito illo valore pro x, non verificabitur æquatio, sive non erit $P = 0$, adeoque differentia formulæ propositæ erit quamproximè Py: nimirum ob P non mutatam mutata y, erit ut y, & erit ad y, ut P ad 1, cum sit $P . 1 :: Py . y$. Si autem assumatur pro x valor radicis æquationis $P = 0$, sed non æquationis $Q = 0$, erit differentia formulæ propositæ quamproximè in duplicata ratione incrementi y, ac si is valor fuerit radicis communis æquationibus $P = 0$, & $Q = 0$, sed non $R = 0$, erit illa quamproximè in ratione triplicata hujus, erit enim in illo casu quamproxime $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, in hoc $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$, sive ob $\frac{Q}{1 \times 2}$,

vel

vel $\frac{R}{1\times2\times3}$ constantem variata sola y, ut y^2, vel y^3 & ita porro:

468. Deinde eruitur illud, quotiescumque formula proposita devenit ad aliquod maximum, vel minimum, debere esse $P=0$. Nam ubi formula ipsa devenit ad aliquod maximum, transit a crescendo ad decrescendum, ubi minimum aliquod assequitur, transit a decrescendo ad crescendum. Quare antequam deveniat ad maximum, utcunque parum ab eo distet, si y minuatur etiam infra illam distantiam, debet habere incrementum, transgresso maximo decrementum, contra vero ubi ad minimum devenit. Porro generaliter extra eos casus, in quibus x habeat valorem cujusp iam radicis æquationis $P=0$, quorum casuum numerus non potest esse major numero radicum ejus æquationis, utique determinato, formula proposita semper habet incrementum, vel decrementum, prout P habet signum conforme, vel difforme ipsius signo. Igitur in ipso appulsu formulæ, ad aliquod maximum, vel minimum, debet valor P transire e positivo in negativum, vel viceversa, quod juxta num.443, fieri non potest, nisi ibidem fiat $=0$, cum ibi ex natura formulæ propositæ, quæ hic ponitur (per num.461.) ejus formæ quam habet primum membrum æquationis ordinatæ, & ex natura derivationis expositæ num.464, non possit transire per infinitum juxta num,447.

469. Nomine autem minimi, hic intelligimus etiam illos casus, in quibus, ubi decrescendo ap-

pule-

pulerit ad o, inde regreditur ex eadem parte, non vero illos, in quibus transgreditur ipsum valorem o, ac transit e positivo in negativum, vel viceversa, cum ii transitus fiant per detractionem continuam, vel per additionem; ac proinde decrementa ibi quodammodo non mutentur in incrementa, vel viceversa, sed veluti continuentur.

470. Hinc si alicubi formula proposita devenit ad maximum aliquod, vel minimum, id detegi potest ponendo $P = 0$, sive derivando ex ea æquationem hac lege, ut quivis terminus multiplicetur per exponentem variabilis x, & dividatur per x, ac formula derivata ponatur $= 0$. Nam inter radices ejus æquationis necessario continebuntur omnes illi valores, ad quos, ubi appulerit x, maximum aliquod habet, vel minimum.

471. Proponatur numerus 8 ita secandus in binas partes, ut si a quarta potentia differentiæ inter partem alteram, & dimidium numerum, dematur octupla secunda potentia differentiæ inter partem alteram, & idem dimidium, residuum sit maximum vel minimum. Sit pars altera x, erit altera $8-x$. Illius differentia a dimidio erit $x-4$, hujus $8-x-4=4-x$. Prioris quarta potentia $x^4-16x^3+96x^2-256x+256$, posterioris potentia secunda erit $16-8x+x^2$, adeoque ejus octuplum $128-64x+8x^2$, quo ablato a priore habetur $x^4-16x^3+88x^2-192x+128$ formula exprimens quantitatem propositam.

472. Du-

472. Ducantur ſinguli termini in ſuos exponentes quantitatis x, ac dividantur per x, ut in prima derivatione numeri 465. & oritur æquatio $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192 = 0$, ſive dividendo per 4, habetur $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$, cujus radices 2, 4, 6, ut ſubſtituenti patebit. Porro ſi pro x aſſumatur quivis valor negativus, qui ſenſim minuatur, tum fiat o, deinde ſumantur partes poſitivæ creſcentes adhuc tamen minores, quam 2, valor formulæ initio poſitivus perpetuo decreſcet tum tranſibit per o abiens in negativum creſcentem, donec evadat maximus, ubi pars $x=2$, deinde decreſcet, donec facto $x=4$, evadat $=0$, ac deinde creſcente x iterum recedat a o ex eadem parte negativa creſcens, donec fiat $x=6$, ubi iterum fiet maximus, ac deinde decreſcet perpetuo, ac tranſgreſſo o abibit in poſitivum, & perpetuo creſcet, adeoque bina maxima habentur, facto $x=2$, & $x=6$, ac unum minimum facto $x=4$, ubi ab ipſo o regreditur ex eadem parte, quod, ſi Tyroni libuerit, numeris ſubſtitutis, labore ſane improbo, omnino innoteſcet.

473. Et quidem ſi liberet illos etiam deprehendere valores x, in quibus propoſita formula tranſit per o, ſatis eſſet ipſam ponere $=0$, ac reſolvere æquationem inde ortam $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128 = 0$, quæ componitur ex hiſce binis $x^2 - 8x + 16 = 0$, $x^2 - 8x + 8 = 0$, ac prioris binæ radices ſunt 4, 4, æquales, cum in iis formula regrediatur a o ſine tranſitu, poſterioris

ris

ris vero $4 \pm \sqrt{8}$, sive proxime 1. 17, 6. 83, in quibus fit ipse transitus. Sed ea huc non pertinent.

474. Et hic quidem radices omnes æquationis derivatæ exhibuerunt maximum quoddam, vel minimum. At non semper omnes æquationis derivatæ radices maximum quoddam, vel minimum exhibent. Mutato nonnihil problemate investigetur maximum, vel minimum residuum, ubi ex illa quarta potentia auferatur illa eadem secunda potentia assumpta 16 vicibus, & octupla secunda potentia partis prioris. Ab $x^4 - 16x^3 + 96x^2 - 256x + 256$ auferendum erit $16x^2 - 128x + 256$, & $8x^2$, adeoque obveniet $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x$. Aequatio inde derivata erit $4x^3 - 48x^2 + 144x - 128 = 0$, sive $x^3 - 12x^2 + 36x - 32 = 0$, cujus radices 2, 2, 8. At priores binæ nec maximum quid exhibent, nec minimum. Nam valor formulæ, seu quantitatis propositæ, qui facta x negativa satis magna, tum decrescente, & transeunte in positivam, initio est positivus, & magnus, decrescit, ac transgressus o, & factus negativus ante, quam fiat $x = 2$, pergit deinde crescere ante & post appulsum ad 2, donec facto $x = 8$ fiat maximus ex parte negativa, nimirum -512, tum adhuc aucto x, & altera parte jam facta negativa, decrescit, ac iterum transiens per o abit in positivum, & perpetuo crescit.

475. Atque ex hoc, & pluribus aliis ejusmodi exemplis patet, quandoque in errorem inducere metho-

methodum, quæ pro inveniendis maximis, vel minimis, in hujusmodi formulis plerumque præscribi solet, qua nimirum præscribitur ut ex ipsa formula derivetur æquatio methodo exposita, & æquationis radices assumantur pro maximorum, & minimorum determinatione, quod quidem etiam in differentiali calculo fieri solet, cujus methodus eodem redit. Præscribi enim solet, ut quantitatis quæsitæ differentia infinitesima quæ nimirum concipitur infinite parva, ponatur $=0$. Differentiam autem infinite parvam quantitatis cujusvis designant præfixa characteristica *d* quantitati ipsi, adeoque ipsis est dx, quod hic nobis y, & contemnunt penitus infinitesimas altiorum potestatum respectu inferiorum, adeoque contemptis penitus iis, quæ nos diximus $\frac{Qy^2}{1\times 2}$; $\frac{Ry^3}{1\times 2\times 3}$ &c. respectu Py, sumunt pro differentia formulæ propositæ Pdx; & ea facta $=0$ eruunt æquationem illam nostram eandem $P=0$.

476. At in eo hallucinantur plerique ex iis, qui rem paulo altius non perpendunt, quod admodum manifestum fit in superiori exemplo, ubi, ut in aliis plerisque, æquationis derivatæ radices nec maximum, nec minimum exhibent, saltem aliquæ, & licet nullum in ejusmodi formulis haberi possit maximum vel minimum, ut demonstravimus, quin id contineatur inter radices æquationis derivatæ; adhuc tamen non semper e contrario omnes eæ radices maximum exhibent, vel minimum, nec abs re erit erroris fontem aperire, cum potissimum & genera-

neralem exhibere possimus canonem, ex quo innotescat, utrum æquationis derivatæ radix quæpiam maximum aliquid exhibeat, vel minimum, nec-ne; quin immo & illud quod ea methodus non docet, & plerumque omittitur, nimirum an habeatur potius maximum, an minimum, atque id ipsum ortum ex consideratione generali æquationum, ac omnino connexum cum earum resolutione per approximationem, quam hìc persequimur.

477. Illa autem regula inveniendi maxima, vel minima innititur huic discursui. Dum quantitas crescit, ejus differentia est positiva, dum decrescit negativa. Quare ubi illa fit maxima, hæc evadit $=0$. Porro contemptis omnibus terminis $\frac{Qy^2}{1\times2}$, $\frac{Ry^3}{1\times2\times3}$ &c., sive $\frac{Qdx^2}{1\times2}$, $\frac{Rdx^3}{1\times2\times3}$, respectu primi Py, sive Pdx, ipse solus terminus Py haberi potest pro differentia, Igitur ipse ponendus est $=0$. & in valoribus ex hac positione resultantibus differentia erit semper $=0$, adeoque habebitur aliquod maximum, vel minimum, In hoc discursu committitur paralogismus in eo quod termini posteriores contemnantur respectu termini Py etiam quando ipse est $=0$. Ubi P non est $=0$, debet esse quantitas in se determinata, respectu cujus cum y infinities minor concipiatur, omnes termini $\frac{Qy^2}{1\times2}$, $\frac{Ry^3}{1\times2\times3}$ &c. sunt infinities minores, & iis contemptis

solus

ſolus terminus Py conſiderari poteſt pro integra differentia, & quæ contemnuntur ſunt infinities minora iis, reſpectu quorum contemnuntur. At ubi ſit $P = 0$, reliqui termini $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. non ſolum non ſunt infinities minores primo illo Py, ſed niſi forte ſit & $Q = 0$, & $R = 0$ &c., ſunt infinities majores, cum ipſi ſint aliquid, ac Py ſit $= 0$, ac proinde poſito $Py = 0$, non evadit $= 0$ differentia ipſa, ſed remanet aliquid, & idcirco ex ea poſitione provenire poſſunt valores, qui nullum maximum, aut minimum exhibeant, ſed ubi adhuc quantitas propoſita pergat creſcere, vel decreſcere.

478. Et quidem ſi ſumatur quivis valor x determinatus, tum ei addatur differentia y, quæ concipiatur in immenſum exigua, nunquam differentia formulæ poterit eſſe $= 0$; ſed ſi valor x ſit utcunque parum minor eo, qui exhibet maximum poſitivum, vel minimum negativum, erit poſitiva, ſi congruat cum illo, vel ſit utcunque parum major erit negativa, contra vero ubi exhibetur minimum poſitivum, vel maximum negativum. Semper enim inter illum valorem aſſumptum pro x, & illum qui exhibet maximum, vel minimum, infiniti alii intercedunt, quibus reſpondent valores formulæ majores, vel minores. Atque idem patet ex eo, quod ſi valor x utcumque determinetur, ac utcumque minuatur in immenſum y, valores P, Q, R &c. vel ſunt aliquid determinatum, & in immenſum majus ipſo y, vel $= 0$. Hinc primus ex iis qui non eſt $= 0$, exhibet terminum in immenſum majorem poſterio-

ribus

ribus omnibus, a quibus proinde elidi non potest, nec tota series $Py + \frac{Qy^2}{1 \times 2} + \frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ &c. potest in eo casu esse $= o$: At saltem postremus ex iis terminis non potest esse $= o$, nam in derivatione valorum P, Q, R &c. devenitur demum ad terminum prorsus carentem variabili x, qui nimirum oritur ex primo formulæ termino x^m post derivationes m juxta num. 464.

479. Solum illud erui potest, ibi, ubi valor x eruitur ex positione $P = o$, differentiam formulæ esse in immensum minorem, quam alibi. Nam ubi non est $P = o$, ipsa quamproxime est Py, & habet ad y rationem finitam, juxta num. 467, ubi autem est $P = o$, nisi sit & $Q = o$, ipsa est quamproximè $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, vel si sit & $Q = o$, erit quamproximè $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$ & ita porro, qui termini sunt in immensum minores termino Py non habente $P = o$, quicunque in se determinati valores sint P, Q, R &c. Quamobrem positio illa $P = o$ non indicat locum, ubi differentia hoc modo considerata transeat a positiva, in negativam, vel viceversa, & fiat $= o$, sed solum ubi in immensum decrescat. Porro ea revera nusquam fit $= o$, cum nulla sit quantitas x in se determinata ita proxima exhibenti maximum, vel minimum, ut alia propior non habeatur, adeoque, ut alia non habeatur ipsa major, vel minor, ante

quam incrementa mutentur in decrementa, vel viceversa.

480. Alio pacto potest differentia considerari ita, ut evadat $=0$, sed adhuc positio illa $P=0$ eum locum non determinat. Si nimirum concipiatur valor x perpetuo variatus, & y constans, dum x accedit ad valorem exhibentem maximum, vel minimum ita, ut ab eo minus distet, quam pro quantitate y, formula orta ex solo x, evadit alicubi æqualis formulæ ortæ ex $x+y$, ac tota series exhibens differentiam formulæ nimirum $Py+\frac{Qy^2}{1\times 2}+\frac{Ry^3}{1\times 2\times 3}$ &c. evadit $=0$; Sed is locus non eruitur posito solum $Py=0$, sive $P=0$. Eo enim casu, valore x accedente in immensum ad locum maximi, vel minimi, a quo ponitur distare minus, quam pro quantitate y, & in quo evadit $=0$ juxta num. 470, ipse valor P in immensum decrescit, & reliqui respectu ipsius non possunt contemni, nec si forte uspiam tota series est $=0$, etiam ipse est ibidem $=0$. Posita solum tota serie $=0$, & habita y pro quantitate data, inveniretur æquatio, cujus radices exhiberent eos valores x in quibus differentia formulæ orta ex additione illa y evanescit, qui valores plerumque exhiberentur eo propiores valori exhibenti maximum, vel minimum, quo ipsa quantitas y esset minor, vel major: sed methodus esset satis implexa.

481. Ex hisce omnibus evidenter patet casus maximi, & minimi, non posse determinate erui ex suppositione differentiæ $=0$, & contemptu altio-

rum

rum potestatum quantitatis illius y adjectæ methodo communi, facta $P = o$, sed solum ope discursus, quem inivimus num. 468, per illam positionem $P = o$ obtineri æquationem, cujus radicibus contineri debeat quodvis maximum, vel minimum, si ullum adsit. Quando autem id habeatur, quando verò non habeatur, hoc pacto determinabimus ex consideratione naturæ æquationum, de qua hìc agimus.

482. In primis formula primi membri cujusvis æquationis non potest habere plura maxima, & minima, quam exprimat exponens ejus gradus imminutus unitate, nimirum si fuerit gradus m, non potest habere plura, quam $m - 1$. Nam dicatur ea formula primi membri ejus æquationis A, & æquatio $P = o$ primo derivata ex ipsa erit gradus unitate minoris sive $m - 1$ (per num. 464), adeoque non poterit continere radices plures quam $m - 1$ (per num. 237); cumque omnia maxima, vel minima valoris $\mathcal{A}$ iis radicibus contineri debeant (per num. 470), eorum numerus non potest esse major, quam $m - 1$.

483. Quotiescunque autem æquatio quæpiam habuerit omnes radices reales, & inæquales, æquatio inde primo derivata habebit etiam ipsa omnes radices reales, & inæquales, quarum singulæ exhibebunt singula maxima valoris $\mathcal{A}$, & nulla ex iis congruet cum radicibus ejusdem. Nam inter binas quasvis proximas radices inæquales æquationis $A = o$ continentur singula maxima valoris $\mathcal{A}$ (per num. 454). Quare habetur unum inter primam, & secundam, alterum inter secundam & tertiam, & ita porro; adeoque si radices sunt m, habentur sal-

tem ejusmodi maxima $m-1$: immò, cum plura haberi non possint, erunt omnino $m-1$. Singula autem ex iis debent esse inter radices binas æquationis $A=0$, quæ ponuntur omnes inæquales; ac proinde valores x in iis debent esse inter se inæquales, & diversi a radicibus æquationis $A=0$. Debent autem contineri inter radices æquationis $P=0$ (per num. 470). Illa igitur debet habere radicum realium, & inæqualium numerum $m-1$, cumque sit gradus $m-1$, nullas alias radices habere potest nec reales, nec imaginarias præter illas.

484. Coeant jam binæ radices æquationis $A=0$, & fiant æquales. Jam illud maximum, quod erat inter ipsas fit ibidem minimum, & $=0$, juxta num. 469. nimirum in ipso appulsu ad o valor formulæ A regreditur, ac proinde ille ipse valor x debet haberi inter radices æquationis $P=0$, cujus illa radix, quæ interiacebat inter binas congruentes æquationis $A=0$, jam congruet cum illis, quæ si evadant imaginariæ juxta num. 458, illa radix æquationis $P=0$, adhuc remanet realis, & formula A ibi habet minimum quoddam, donec fiat æqualis alteri sibi proximæ, ac in imaginarias ambæ abeant, eliso intervallo inter minimum illud, & maximum sibi proximum juxta num. 459. Ac si aliæ binæ radices æquationis $A=0$ adhuc coeant, patet eodem pacto alteram ex iis fore communem æquationi $P=0$.

485. Inde deducitur, quotiescumque æquatio $A=0$ habebit radices binas tantum alicubi æquales, earum unam habituram æquationem quoque $P=0$. Ac simili prorsus argumento si tres radices

æqua-

æquationis $A=0$ coeant, binæ æquationis $P=0$, quæ iis interjacebant congruent cum iis, & inter ſe: ac generaliter ſi æquatio $A=0$ habuerit numerum radicum æqualium n, æquatio $P=0$, habebit earumdem radicum numerum $n-1$.

486. Quoniam autem eodem prorſus pacto derivatur formula Q ex P, quo P ex A, quarum radicum æquatio $P=0$ habebit numerum $n-1$, earundem $Q=0$ habebit $n-2$, & ita porro.

487. Inde autem, ſi innotuerit aliqua radix æquationis cujuſpiam, facile erit deprehendere, an ſolitaria ſit, an multiplex. Quivis terminus ipſius ducatur in ſuum exponentem valoris x, & dividatur per x, ac ſi poſito in formula ſic derivata eodem valore pro x, ea non evaneſcat; omnino illa radix ſolitaria erat, ſi evanuerit, illa erat ſaltem duplex, & quotuplex fuerit facile invenietur derivando eadem lege formulas e formulis donec deveniatur ad aliquam, quæ non evaneſcat. Quot enim derivationes factæ fuerint uſque ad formulam non evaneſcentem, tot radices ejuſmodi æquales habebit propoſita æquatio.

488. Æquationis $x^5-5x^4-9x^3+53x^2+8x-48=0$ eſt radix 1, quo valore poſito pro x, ejus primum membrum eveneſcit. Derivatur ex ea $5x^4-20x^3-27x^2+106x+8$, in qua poſito 1 pro x habetur $+72$. Quare radix 1 eſt ibi ſolitaria. Ejus radix eſt etiam 4, quo valore poſito pro x in æquatione derivata, ea etiam evaneſcit. Sed derivando iterum novam habetur $20x^3$

$-60x^2 - 54x + 106$, in qua posito 4 pro x habetur 210, Igitur binas radices æquales 4 habet proposita æquatio, & binas tantum. Et quidem num. 456 vidimus eius radices esse $+3, -1, 1, 4, 4$.

489. At in æquatione $x^5 - 13x^4 + 48x^3 - 32x^2 - 512x + 768 = 0$, cujus radices (per num. 457) sunt $-3, +4, +4, +4, +4$, derivando sequentes formulas alias ex aliis $5x^4 - 52x^3 + 144x^2 - 64x - 512$, $20x^3 - 156x^2 + 288x - 64$, $60x^2 - 312x + 288$, tam in ejus primo membro, quam in harum singulis posito 4 pro x, habetur o, at derivata alia ex hac postrema nimirum $120x - 312$, & posito 4 pro x ea non evanescit, unde colligitur quatuor esse ejus radices æquales 4.

490. Hinc autem pro illis quæstionibus de maximis, & minimis, de quibus supra egimus, eruitur hæc regula generalis. E formula proposita derivetur alia formula lege toties exposita, qua posita $= 0$, inveniantur radices ejus æquationis. Quævis ex iis radicibus exhibebit maximum quoddam vel minimum, si solitaria fuerit, vel earum æqualium numerum imparem habuerit æquatio primo derivata. Sive, quod eodem redit, prima æquatione derivata deriventur ex ea eadem lege formulæ aliæ ex aliis, donec deveniatur ad aliquam, quæ posita pro x radice aliqua ejusdem æquationis non evanescat. Si enim computato ipso primo membro æquationis derivatæ numerus formularum evanescentium

tium ex illa positione fuerit impar, ea radix exhibebit aliquod maximum, vel minimum; si par, nullum maximum, vel minimum exhibebit.

491. Hujus canonis demonstratio hinc petitur. Posito pro x valore quovis utcumque parum remoto ab illo, in quo habetur maximum, vel minimum, (quo posito formula P primo derivata evanesceret, cum nimirum illa sit radix æquationis $P=0$) ipsum P non est $=0$, adeoque est valoris cujusdam in se determinati. Quare si assumatur y in immensum exigua, valor Py erit in immensum major sequentibus omnibus $\frac{Qy^2}{1\times 2}$, $\frac{Ry^3}{1\times 2\times 3}$ &c., & tota differentia formulæ erit positiva, vel negativa, prout ipse valor P fuerit positivus, vel negativus. Si igitur valor P in appulsu x ad radicem quampiam æquationis $P=0$, mutatur e positivo in negativum, vel e negativo in positivum ac transit per 0, tota differentia formulæ propositæ mutabit ibidem signum, adeoque incrementum mutabitur in decrementum, vel viceversa, & habebitur aliquod maximum, vel minimum, secus si valor P regrediatur a 0, & maneat positivus, ut prius, vel negativus. Transibit autem valor P per 0, vel regredietur prout numerus earum radicum æqualium in æquatione $P=0$ fuerit impar vel par juxta num. 397. Igitur habebitur maximum, aut minimum, vel non habebitur, prout numerus illarum radicum æqualium in æquatione $P=0$ fuerit impar, vel par, quod prorsus congruit cum regula tradita.

 492. An

492. An autem ibi habeatur maximum an minimum facilè deducitur ex valore illius formulæ, quæ inter perpetuo derivatas prima incipit non evanescere posito in ea pro x valore radicis inventæ æquationis $P = o$. Si nimirum posito pro x valore invento tam in formula proposita, quam in illa primo non evanescente, valores utriusque habuerint signa conformia, habebitur minimum, si difformia maximum. Quod si formula proposita evanescat, ac fiat $= o$, habebitur semper illud minimum, de quo egimus num. 469. Hujus etiam regulæ demonstratio est admodum expedita. Nam ubi est $P = o$, sed non $Q = o$, differentia totius formulæ erit quamproximè $\frac{Qy^2}{1 \times 2}$, ac ejusdem signi cum ipso Q. Ubi & $Q = o$, sed non $R = o$, erit quamproximè $\frac{Ry^3}{1 \times 2 \times 3}$, & ejusdem signi cum R, ac ita porro. Adeoque accedente y ad x, accedet ad formulam propositam A quantitas ejusdem signi cum illa formula, quæ prima non evanescit post derivationem. Porro si ipsi accedat quantitas ejusdem signi, ea ibi incipit crescere, & proinde devenerat ad quoddam minimum, si vero accedat quantitas signi contrarii, incipit decrescere, adeoque devenerat ad maximum. Ubi autem regreditur a o, minimum quoddam habet in ipso o. Patet igitur tradita regula.

493. Regularum exempla haberi possunt in formulis propositis num. 471, & 474. Prior, quæ hic dice-

dicetur A, fuerat $x^4 - 16x^3 + 88x^2 - 192x + 128$. Formula P inde derivata num. 479, erat $4x^3 - 48x^2 + 176x - 192$, qua posita $= 0$ habitæ sunt æquationis provenientis radices 2, 4, 6, quarum nulla cum sociam habeat sibi æqualem, patet jam inde singulas ex iis exhibere aliquod maximum vel minimum. Si autem singulæ tantum erutæ fuissent, adhuc idem pateret; nam derivando iterum haberetur formula $Q = 12x^2 - 96x + 176$, quæ nulla ex iis radicibus posita pro x evanescit. Ac proinde cum unica formula derivata evanescat in singulis radicibus, singulæ exhibent maximum aliquod vel minimum. Porro posito 2 pro x in ipsa formula proposita, ea evadit $= -16$, eodem posito in formula Q habetur 32. Signa difformia sunt, adeoque maximum exhibent, quod ibi habetur facto $x = 2$. Posito vero 4 pro x, A evanescit, adeoqua ibi habetur minimum in ipso 0. Posito demum 6, in A habetur -16, in Q habetur 32. Signa iterum difformia iterum exhibent maximum.

494. Posterior formula posita num. 474, quæ hic erit A, erat $x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 128x$. Formula P inde derivata erat $4x^3 - 48x^2 + 144x - 128$, qua posita $= 0$, habitæ sunt æquationis provenientis radices 2, 2, 8, quarum prima cum duplex sit, jam inde eruitur, eâ nec maximum aliquod exhiberi, nec minimum: contra infertur radicem solitariam 8 exhibere alterum ex iis: ac si singulæ radices erutæ fuissent, innotuisset idem deri-

derivando ex P formulam $Q = 12x^2 - 96x + 144$, in qua cum posito 2 pro x habeatur o., at iterum ex Q derivando $R = 24x - 96$, & pariter ponendo 2 pro x, formula non evanescat, sed fiat -48, binæ evanescentiæ ostendunt, nullum adesse maximum aut minimum. At cum in $Q = 12x^2 - 96x + 144$ posito 8 pro x, formula non evanescat, sed evadat 144, exhibetur ibi maximum, vel minimum ob unicam nimirum evanescentiam. Cum verò posito 8 in ipsa formula A habeatur -512, at in formula Q, quæ prima non evanescit, habeatur 144, signa difformia maximum exhibent.

495. Quod si formula esset $x^5 - 10x^4 + 30x^3 - 40x^2 + 25x - 2$, quæ hìc erit A; æquatio $P = 0$ erit $5x^4 - 40x^3 + 90x^2 - 80x + 25 = 0$, sive $x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 16x + 5 = 0$, cujus radices 1, 1, 1, 5, & quidem derivatâ inde $Q = 20x^3 - 120x^2 + 180x - 80$, & $R = 60x^2 - 240x + 180$, ac $S = 12x - 240$, & posito 1 pro x, evanescit & P, & Q, & R non autem S, posito verò 5 evanescit sola P, adeoque evanescentiæ numero impari docent utroque valore maximum aliquod exhiberi, vel minimum. Cumque posito 1 pro x in A habeatur 4, in S habeatur -228, signa difformia ostendunt maximum, & cum posito 5 pro x in A habeatur -252, in Q vero 180, signa pariter difformia indicant maximum.

496. Atque hoc quidem pacto in formulis omnibus ejus formæ, quam habet primum membrum æqua-

æquationis rite ordinatæ semper admodum facilè inveniuntur maxima & minima. Pro aliis, in quibus divisores adsunt continentes variabilem quantitatem, vel radicales termini, res adhuc facilè procedit, sed requiritur methodus eorum terminorum differentias eruendi, de qua potius agemus ibi, ubi infinitesimalis calculi primam partem, quam differentialem dicunt, exponemus. Hæc abunde sunt hoc loco occasione considerandi variationes, quas subit primum æquationis membrum ex diversis substitutionibus, ut & finiti calculi vis appareat, & ad infinitesimalem sternatur via, & errorum quorumdam communium origo pateat, ac vitetur periculum.

497. Intereà, quod ad primum pertinet cujusvis æquationis membrum, illud ex dictis patet, quo sequenti §. utemur ad radices eruendas: nimirum positis pro x diversis valoribus, diversos admodum prodire valores primi membri, eosque jam crescere, jam minui: at si differentiæ valorum positorum pro x sint satis exiguæ, differentias valorum totius formulæ generaliter extra paucos casus maximorum illorum, vel minimorum fore proximè proportionales differentiis valoris x, eoque propiores huic proportioni, quo illæ minores extiterint. Atque id quidem semper contingere prope radices solitarias, prope autem eas radices, quarum plures æquales sunt, differentias fore in ratione admodum diversa: nimirum differentias a valore o, qui habetur in ipsis radicibus, sive valores totos formularum fore in duplicata differentiarum valoris assumpti pro x a vero radicis valore, ubi radices

ces binæ æquales fuerint, in triplicata ubi tres, & ita porro, quæ omnia ex supra demonstratis satis patent, & usui futura sunt,

§. XIV.

De resolutione æquationum omnium; ubi de regula falsæ positionis.

498. UBi binæ quantitates inter se ita connexæ sunt, ut prima facilè determinetur per secundam, secunda multò difficilius per primam, si quæratur valor secundæ respondens dato cuipiam valori primæ; adhiberi solet methodus falsæ positionis, ponendo nimirum varios valores pro secunda assumptos ad arbitrium, & determinando valores primæ ex iis resultantes, inter quos si inveniatur valor datus, quod rarò admodum continget casu mere fortuito, valor positus pro secunda quantitate erit valor verus, sed cum plerumque valor quantitatis primæ proveniat diversus a dato, idcirco valor ille positus pro secunda quantitate est valor falsus. Verum ab uno, vel pluribus ejusmodi valoribus per falsas illas positiones inventis inveniri potest plerumque, qui valor pro secunda quantitate poni debeat, ut valor primæ congruat cum vero, & methodus, quæ docet usum valorum ex falsis illis positionibus provenientium ad inveniendos valores veros dicitur regula falsæ positionis.

499. Quotiescumque prima quantitas est accuratè in ratione secundæ, vel directa, vel indirecta, problema solvitur per unicam falsam positionem. Sit valor datus primæ quantitatis m, valor quæsitus secun-

secundæ ipsi respondens x, posito autem pro hac secunda a, obveniat valor primæ p. Fiat in primo casu $p \,.\, m :: a \,.\, x$, in secunda $m \,.\, p :: a \,.\, x$, & innotescet quæsitus valor x, ut patet. Exhibebimus exemplum primi casus tantummodo, ex quo & secundus facilè innotescet.

500. Debeat summa 1295 aureorum ita dividi in partes tres ut secunda sit dupla primæ, tertia dupla secundæ. Datâ summâ dividendâ, non ita facilè statim innotescunt partes, at contra data prima parte, admodum facilè innotesceret summa, ejus enim duplum exhibet secundam, hujus duplum tertiam, & habitis partibus habetur summa. Pars autem prima, & summa directè proportionales sunt. In eadem enim ratione augentur vel minuuntur partes reliquæ, ac summa, in qua augetur ipsa pars prima. Summa igitur, & pars prima sunt illæ binæ quantitates ita inter se connexæ, ut si data prima, quæratur secunda, per simplicem regulam falsæ positionis innotescat. Ponatur partem primam esse aureorum 5 erit secunda 10, tertia 20, adeoque summa 35. Fiat igitur ut 35 ad datam summa 1295, ita ille numerus falso positus 5, ad quæsitum, & habebitur $\frac{5 \times 1295}{35} = 185$. Et quidem si prima pars sit 185, erit secunda 370, tertia 740, summa erit 1295 nimirum numerus ille datus.

501. Si pro prima parte positus fuisset unus aureus, sola divisione res facilius confecta fuisset, haberetur enim pars secunda 2, tertia 4, summa 7; & fa-

& factis ut 7 ad 1, ita 1295 ad quartum, prodiisset 185 sola divisione numeri dati 1295 per 7. Per denominationem autem algebraicam sine falsa positione, res eodem prorsus modo conficeretur. Facta enim parte prima x secunda fuisset $2x$, tertia $4x$, summa $7x$, qua posita $= 1295$, esset $x = \frac{1295}{7} = 185$.

502. Quod si earum quantitatum altera esset in aliqua ratione multiplicata vel submultiplicata alterius, eodem pacto liceret progredi: sed pro valore primæ quantitatis invento per falsam positionem, & dato, adhibendæ essent illæ potestates, vel radices eorum, quæ datæ illi proportioni respondeant. Concipiamus vim magnetis cujusdam trahentis esse in ratione reciproca triplicata distantiarum adeoque distantias in ratione reciproca subtriplicata virium, & quæratur in qua distantia ejus vis trahens datam massam æquivalere debeat unciis 64. Facile erit assumpta quavis distantia experiundo invenire vim. Inveniatur in distantia palmorum 6 vis unciarum 8. Fiat ut $\sqrt[3]{64}$, ad $\sqrt[3]{8}$, sive ut 4 ad 2, ita distantia data 6 ad quæsitam 3, in qua nimirum habebitur vis illa unciarum 64, ut patet.

503. At si e binis illis quantitatibus non sit altera in ratione directa alterius, vel simplici, vel utcumque multiplicata, sit autem incrementum, vel decrementum unius in ratione incrementi, vel decrementi alterius, sive differentia illius, ut differentia hujus, problema per duplicem falsam positionem

tionem solvitur immediatè. Bini valores positi pro secunda quantitate sint a, b, quæsitus x, valores primæ provenientes e positionibus sint p, q, valor datus respondens x sit m. Fiat ut $q - p$ ad $m - p$, ita $b - a$ ad valorem quemdam r, qui additus valori a exhibebit quæsitum valorem x. Erit enim ob differentias proportionales $q - p . m - p :: b - a . x - a$, & ob rationem initam, $q - p . m - p :: b - a . r$. Quare cum in utraque proportione priores tres termini sint iidem, erit & $x - a = r$, $x = a + r$.

504. Quærantur bini numeri, quorum detur summa 12, & differentia 4. Assumpto primo ad arbitrium & addito 4, habetur summa, quæ si congruat cum 12, inventus est valor quæsitus. Sin minus, assumpto secundo valore pro primo numero, & iterum addito 4, habetur secundus, & summa, quæ tamen non erit ad priorem, ut hic posterior valor assumptus ad illum priorem, ob illud 4 utrique additum. Incrementa enim vel decrementa summarum proportionalia erunt semper incrementis, vel decrementis partium assumptarum; cum nimirum numerus ille constans 4 adjectus incrementa ipsa, ac decrementa non turbet. Solvetur igitur Problema per duplicem falsam positionem. Ponatur pro primo numero 1, secundus erit 5, summa 6, quæ distat a 12. Ponatur pro eodem 3, secundus erit 7, summa 10, quæ adhuc distat a 12. Erit hic $a = 1$, $b = 3$, $p = 6$, $q = 10$, $m = 12$. Fiet igitur $10 - 6 . 12 - 6 :: 3 - 1 . r = \frac{2 \times 6}{4} = \frac{12}{4} = 3$. Quare quæsitus numerus $x = 1 + 3 = 4$.

Et

Et quidem alter erit $4+4=8$, adeoque summa 12 : & numerorum 4, ac 8 summa est 12, differentia 4, ut oportebat.

505. Quod si computetur solus error, quo conditio proveniens ab assumpto valore distat a conditione proposita, paulo simplicior evadet solutio. Posito enim primo errore p, secundo q, quæretur error nullus, adeoque m erit $=o$, & proportio $q-p \,.\, o-p :: b-a \,.\, r$, quantitatem addendam valori assumpto a, sive ut $q-p$ ad p ita $b-a$ ad quantitatem demendam. Sic in casu proposito summa 6 inventa in prima positione 1 distabat a summa proposita 12 per 6, in secunda positione 3 summa 10 distabat per 2. Erit igitur $2-6 \,.\, 6 :: 3-1 \,.\, \frac{2 \times 6}{-4} = \frac{12}{-4} = -3$, quo numero ablato ab 1 habetur $1+3=4$, ut prius.

506. Atque hoc pacto licebit tentare solutionem problematum etiam, in quibus non innotescat, an differentiæ sint accuratè proportionales, ac nonnunquam res succedet. Sint binæ nummorum summæ ejusmodi, ut si e prima majore bini transferantur in secundam, evadant æquales : si contra bini e secunda transferantur in primam, hæc evadat illius dupla. Assumatur pro summa minore 4, in quam si transferatur 2 fiet 6; cui æqualis jam erit summa major, quam igitur oportuit esse 8. At e minore translato in hanc 2, illa fiet 2, hæc 10, quæ per secundam conditionem debuit esse 4. Igitur proposita positio 4 distat a conditione proposita per 6. Assumpto pro prima summa 6, oportet eodem discur-

scursu secunda sit 10, ut nimirum translàto 2 hinc illuc, evadant pares. Translato autem 2 ex 6 in 10, illa fit 4, hæc 12, quæ per secundam conditionem debuit esse 8, errore existente 4. Erit igitur hìc $p = 6$, $q = 4$, $a = 4$, $b = 6$, adeoque $4 - 6 : 6 :: 6 - 4 . \frac{2 \times 6}{-2} = \frac{24}{-2} = -6$, & proinde valor quæsitus primæ summæ $a - r = 4 + 6 = 10$. Et quidem posito 10 pro minore summa, major debet esse 14, ut translato inde huc 2, fiant ambæ 12. Translato autem 2 e summa 10 in summam 14, erit illa 8, hæc 16 illius dupla, ut oportebat.

507. Hi casus reducuntur multo facilius per positiones algebraicas, & semper exhibent æquationem primi gradus. Primus casus solvitur ut num. 504. Posito nimirum numero majore x, minore y, erit $x + y = 12$, $x - y = 4$, adeoque $x = 12 - y$, & $= 4 + y$, quare $12 - y = 4 + y$, $12 - 4 = 2y$, $8 = 2y$, $\frac{8}{2} = y = 4$, & $x = 12 - 4 = 8$. Secundus solvitur posita summa majore x, minore y; habetur enim $x - 2 = y + 2$, & $x + 2 = 2 \times (y - 2) = 2y - 4$. Ex prima $x = y + 4$, ex secunda $x = 2y - 6$. Quare $2y - 6 = y + 4$, & $y - 6 = 4$, $y = 10$, ac $x = 10 + 4 = 14$.

508. Et quidem si formula determinans alteram quantitatem per alteram, contineat unicum terminum habentem alteram; semper erit locus falsæ positioni unicæ, si præterea contineat terminum constantem, & ab illius mutatione non pendentem,

locus erit positioni duplici. Si enim posita secunda quantitate x, formula fuerit $\frac{mx}{n}$, mutato x, mutabitur $\frac{mx}{n}$ in ratione eadem. Quod si formula fuerit $\frac{mx}{n}+p$, tum quidem ipsa non erit, ut x, sed ejus differentia erit, ut differentia x, cum mutata ipsa x, non mutetur p, quod constat etiam ex §. superiore, num. 465. Posita enim y pro differentia x, formula derivata ex $\frac{mx}{n}+p$ erit $\frac{my}{n}$, quæ ob m, n constantes, erit ut y. At si formula contineat etiam x^2, & sit px^2+qx+r, ejus differentia erit per eumdem numerum $2pxy+\frac{q}{1\times2}$, quæ proinde non erit ut y, ob terminum q constantem. Quare unica simplex falsa positio solum adhiberi potest, ubi esse debet $\frac{mx}{n}$ æquale quantitati datæ, vel nihilo; duplex, ubi $\frac{mx}{n}+p$; nimirum ubi æquatio primum gradum non excedit.

509. In reliquis casibus, in quibus nec quantitas prima secundæ proportionalis est, nec illius differentia differentiæ hujus, adhuc plerumque cum successu adhibetur duplicis falsæ positionis regula, si jam valores positi a vero valore quæsito parum admodum distent. Ut enim superiore §. vidimus num.

num.467, omnium formularum utcumque ad altissimas æquationes rite ordinatas pertinentium differentiæ exiguæ sunt quamproximè, ut differentiæ x generaliter, extra paucos illos determinatos casus, in quibus x accedit ad radices æquationis primo derivatæ ex ipsa formula, quibus casibus etiam omnia maxima, ac minima ejusdem formulæ continentur. Ac idem pariter in reliquis omnibus formulis unicam variabilem quantitatem continentibus locum habet, ut nimirum generaliter aucta, vel imminuta variabili illa quantitate per differentias satis exiguas, differentiæ quoque totius formulæ iisdem illis differentiis proportionales sint, præter casus quosdam, in quibus differentia formulæ infinities magis decrescit vel crescit, quam alibi, ac vel transit e positiva in negativam, & maximum quoddam, aut minimum exhibet, vel ex eadem nihili, aut infiniti parte retro regreditur.

510. Hinc in omni tabularum genere hac fere methodo utimur, ut in Astronomia, in Trigonometria, ac in logarithmorum tabulis. Computati sunt ex. gr. logarithmi pro numeris integris: logarithmi pro numeris continentibus fractiones quoque præter numeros integros inveniuntur ex hac suppositione, quod differentiæ logarithmorum exiguæ differentiis numerorum sint proportionales saltem proximè, & inventis in tabula logarithmis numeri proximè majoris, & proximè minoris dato, per regulam cum hac prorsus duplici falsa positione congruentem logarithmus numeri propositi invenitur parte 1. hujus tomi, Arithm. c.3. num.35.

511. In iis autem casibus, in quibus ex secun-

da quantitate assumpta ad arbitrium potest inveniri prima, sed earum differentiæ non sunt inter se proportionales, si data prima quæratur secunda ipsi respondens, adhibita regula duplicis falsæ positionis, generaliter extra casus illos anomalos adhuc magis ad quæsitum valorem acceditur, dummodo positiones non sint inter se nimis remotæ, & assumpta jam nova hac positione, ac calculo restituto, licet ad valorem ipsum quæsitum accedere in infinitum.

512. Jam vero in quavis formula primi membri æquationis cujusvis incognitæ quæritur valor x ejusmodi, ut formula tota fiat $= 0$, ac posito quovis valore pro x admodum facile eruitur valor formulæ, sed contra dato quovis valore formulæ admodum difficulter, sive nullo artificio adhuc cognito, definiri potest valor x. Igitur ad inveniendum valorem x vero proximum quantum libet, adhiberi poterit methodus duplicis falsæ positionis, dummodo jam ad verum valorem x, sive radicis quæsitæ satis proximè deventum fuerit, & prope eam radicem differentiæ exiguæ ipsius formulæ sint proximè proportionales differentiis valoris ipsius x. Id autem per n.467,& 485 superioris §. semper continget extra casus, in quibus æquatio plures radices æquales habeat. Quare in ejusmodi casibus tradita methodo licebit uti, & si primus valor positus pro x dicatur a, secundus b, primus valor formulæ p, secundus q, ac fiat $q - p . p :: b - a . r$, erit valor x vero propior $= a - r$ juxta num.505. At primum ostendendum erit, quo pacto satis accedi possit ad valorem radicis, & discerni, an ibi plures habean-

habeantur radices æquales, an unica, sive an ibi exiguæ differentiæ formulæ differentiis x proximè proportionales sint, an secus.

513. Porro generalis methodus, qua ad radices certo accedatur nulla adhuc, quod sciamus inventa est: at plures falsas positiones instituendo, ac adhibendo binas quasque paulo aliter ac superius, fere semper intentum obtinebitur demum, ac omnino semper, vel ad radicem realem solitariam devenietur, vel ad plures reales æquales, vel incidetur in binas saltem radices imaginarias. Ubi vero incident radices reales solitariæ, satis cito deinde accedetur ad eas multo magis methodo superiore: ubi plures æquales obvenerint, lentius quidem, adhuc tamen in infinitum, si libeat, accedetur ad eas hac methodo, quam hicradituri sumus, eas nimirum includendo limitibus quibusdam, & limites ipsos arctando semper magis.

514. Positis binis valoribus pro x, obvenient bini valores formulæ. Si ipsi habuerint signa contraria, existente altero positivo altero negativo, necessario inter binos valores positos continebitur radix aliqua realis æquationis juxta num.442. Ponatur pro x valor medius arithmeticè proportionalis inter binos positos, & obveniet valor formulæ, cujus signum congruet necessario cum signo alterius e valoribus primo inventis, & opponetur alteri. Assumatur iterum valor x medius arithmeticè inter valorem postremo loco assumptum, & illum e præcedentibus, qui valorem formulæ exhibuit habentem signum contrarium signo valoris exhibiti ab eodem. Tum eadem methodo semper assumatur

valor medius inter postremo assumptum, & praecedentem, ex qua valor formulae profluxit oppositus, ac binorum quidem valorum x differentia semper duplo minor fiet, & inter eos semper radix quaedam continebitur, ad quam ipsi accedent semper magis, cum semper magis accedant ad se invicem. Cavendum tamen dum valores assumpti pro x adhuc satis inter se distant in assumendis mediis arithmeticè proportionalibus contemnendas esse decimalium fractiones inferiores, quae calculum implicatiorem redderent sine fructu.

515. Facilioris calculi gratia assumemus aequationem gradus tertii carentem secundo termino $x^3 - 30x + 36 = 0$, methodus autem est eadem pro aequationibus omnibus. Tota formula $x^3 - 30x + 36$ dicatur A, & posito $x = 3$ erit $A = -27$, posito $x = 7$, erit $A = 169$. Cum igitur obvenerint pro A signa contraria, habetur omnino aliqua radix intermedia, ad quam accedetur calculo inito juxta sequentem tabellam continentem sex cellulas.

x	:	A	x	:	A	x	:	A
	1			2			3	
3.	:	−27.	3.	:	−27	4.	:	−20
5.	:	11.	4.	:	−20	4.5	:	−7.875
7.	:	169.	5.	:	11	5.	:	11.
	4			5			6	
4.5	:	−7.875	4.7	:	−1.177	4.7	:	−1.177
4.7	:	−1.177	4.8	:	2.592	4.75	:	0.671875
5.	:	11.	5.	:	11	4.8	:	2.592

In

In prima habentur bini valores 3, & 7 primo positi pro x, ex quibus obvenerunt bini valores A — 27, & 169 oppositi, ac in medio 5 medius arithmeticus inter illos, ex quo provenit $A = 11$, habens signum oppositum signo valoris — 27 provenientis ex positione $x = 3$. Hinc in secunda cellula valores x, 3, & 5 medium arithmeticum 4 secum habent, cujus valor A — 20 est contrarius valori 11 orti ex positione 5. Iccirco in tertia ponitur 4.5 valor x medius arithmeticus inter 4, & 5. Eodem pacto in quarta ponendus erat valor 4.75 medius inter 4.5, & 5. Sed contempta illa fractione centesima 5, positus fuit 4.7, & in quinta pro 4.85 positus fuit 4.8. Liceret autem eodem pacto progredi, & semper radix illa intra arctiores limites concluderetur.

516. Porro cum æquatio proposita $x^3 - 30x + 36 = 0$ componatur e binis $x + 6 = 0$, $x^2 - 6x + 6 = 0$; habet radices -6, $3 - \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, atque hæc postrema est $3 + 1.7320508075 6$. Patet igitur, radicem 4.75 ab ipsa jam distare minus, quam 18 millesimis partibus unitatis, sive minus quàm $\frac{1}{251}$ parte radicis ipsius, posse autem lente quidem, sed tamen omnino tuto deveniri ad distantiam utcumque exiguam.

517. Considerando autem valores A satis patebit eorum differentias multum initio distare a ratione differentiarum valorum x, ac ad eam deinde satis accedere. Nam si in superiore tabella in quavis positione subtrahatur primus valor tam x, quam A

a secundo, secundus a tertio, differentiæ valorum x in prima positione erunt 2, ac 2 æquales, differentiæ vero valorum A erunt 38, 158 adeo inæquales, & inæqualitas multo etiam major potuisset obvenire, si positiones primæ fuissent remotiores a vero valore. At in postrema positione differentiæ x erunt 0.05, 0.05 pariter æquales, differentiæ vero valorum A erunt 1.848875, 1.920125, quæ ab æqualitate vix distant $\frac{1}{25}$ sui parte. Quamobrem hic jam uti licebit regula duplicis *falsæ* positionis exposita num.503, qua multo citius ad verum valorem accedetur.

518. Sed in adhibenda duplici falsa positione, ne calculus fractionum plus æquo excrescat sine fructu, satis erit in valoribus A retinere e fractionibus decimalibus, unam, aut alteram ultra eum limitem, intra quem præcedentium trium positionum differentiæ erant inter se proportionales, qui limes, ubi valorum x differentiæ sunt æquales inter se facile primo intuitu perspicitur, ut hic, ubi existentibus differentiis x in postrema positione æqualibus, differentiæ valorum A erant inter se fere æquales in prioribus binis notis 1.8, 1.9; generaliter vero deprehendi potest factis, ut prior e differentiis x ad posteriorem, ita prior e differentiis A ad valorem, qui collatus cum posteriore differentia valorum A exhibebit limitem quæsitum, nimirum eum, usque ad quem ii bini valores inter se collati congruent. Sed jam exemplis illustrabitur methodus. In restituendo verò calculo, ubi substituto valore novo x invenitur valor novus A, satis erit assumere priores

res binas ejus notas post cyphras o; nam ipse ejus valor obvenisset omnino $=$ o, si differentiæ fuissent proportionales inter se.

519. Sumptis pro x valoribus 4.7, & 4.75, qui juxta num. 503 erunt a, & b, proveniunt pro A valores $-$ 1.18, 0.67, qui erunt p, & q. Erit autem A ille valor datus m, qui nimirum dedet oriri ex nova positione $=$ o. Quare cum in hoc casu fieri debeat juxta num. 505. $q - p . b - a :: p . r$, & sumi pro x valor $a - r$; erit ut 1.85 ad 0.05, ita $-$ 1.18 ad $-$ 0.0318, adeoque $x = 4.7 + 0.0318 =$ 4.7318 qui valor a vero radicis valore 4.73205 &c. invento num. 516 minus differt quam per $\frac{3}{10000}$. Restituendo autem calculo posito hoc valore pro x in primo æquationis membro, nimirum $x^3 - 30x + 36$, habetur $A = -$ 0.0093. E prioribus autem seligendo valorem positum pro x huic propiorem 4.75, ex quo obvenerat $A = 0.67$, erit jam $a = 4.7318$, $b = 4.75$, $p = -0.0093$, $q =$ 0.67, adeoque erit ut 0.6793 ad 0.0182, ita $-$ 0.0093 ad $-$ 0.0002492 $= r$, adeoque $x = 4.7318 + 0.0002492 = 4.7320492$, qui ad verum valorem 4.7320508 &c. jam multo propius accedit, cum ob eo differat minus quam per $\frac{2}{1000000}$. Eademque methodo liceret progredi in infinitum, & multo citius, quam priore methodo ad verum radicis valorem accederetur.

520. Atque hoc quidem pacto, satis liquet, in quavis æquatione impari gradus cujusvis semper in-

inveniri posse valorem unius saltem radicis realis vero utcumque proximum. Assumpto enim pro x valore positivo satis magno, in iis obveniet valor A positivus, assumpto valore negativo obveniet negativus. Quin immo, quoniam posito pro x valore o, relinquitur pro A valor ultimi termini, evanescentibus reliquis omnibus; si is est positivus, ponendus erit pro x valor negativus, ac augendus semper donec evadat valor A negativus, si vero idem valor postremi termini negativus fuerit, ponendus erit pro x valor positivus, augendusque donec valor A positivus fiat, quod omnino continget. In æquatione $x^3 - 30x + 36 = 0$, proposita num. 515 posito $x = 0$, fit $A = 36$. Ponatur $x = -5$, & erit $A = 61$ valoris adhuc positivi. Sed aucto x, & facto $= -10$, habetur $A = -664$, cum signo opposito; unde constat realem aliquam radicem haberi inter -5, & -10, & quidem per num. 516 habetur -6.

521. Hactenus diximus quo pacto ad verum radicis realis valorem liceat accedere, ubi e binis positionibus factis pro x obveniunt bini valores A cum signis contrariis. Quod si eorum valorum signa evaserint conformia, ponatur pro x valor tertius arithmeticè proportionalis post binos præcedentes incipiendo ab eo, qui exhibuit valorem A majorem, si valores priores fuerint inæquales, vel si fuerint æquales, incipiendo ab utrolibet, ac si trium valorum A medius non fuerit altero extremorum minor, altero non major, ponatur iterum pro x valor tertius arithmeticè proportionalis post secun-

cundum, & tertium e præcedentibus tribus, atque ita perpetuo assumantur novi valores pro x, donec demum vel novus valor A sit $=0$, vel idem habeat signum contrarium signis priorum, vel medius trium valorum A sit altero extremorum minor altero non major. Id autem necessario continget: nam adjecta valori x perpetuo, vel perpetuo ablata quantitate quadam constanti, nimirum illo præcedentium valorum intervallo, valor A ex dem. in superiori §. debet ita mutari, ut demum in infinitum excrescat, ac interea vel appellet ad o, congruente valore posito pro x cum radice aliqua, ac transibit per ipsum o, vel inde regredietur, prout ibi fuerit radicum cum eo valore congruentium numerus impar, vel par, vel etiam ante oppulsum ad o retro cursum reflectet. Quamobrem si priores valores fuerint inæquales, ac tertius obvenerit utroque minor (nam si obvenerit secundo æqualis, vel major, jam secundus ipse erit priore illo minor, tertio hoc novo vel æqualis, vel minor, adeoque non major), iteratis positionibus debebit demum crescere, & præcedentes valores superare, ac interea poterit & fieri $=0$, & transire, ac mutare signum.

522. Quod si deveniatur ad valorem $A=0$, jam habebitur una æquationis radix realis, si deveniatur ad signum valoris A contrarium, invenietur radix superiore methodo, si deveniatur ad ejusmodi tres valores A, quorum medius altero extremorum sit minor, altero non major, inter extremos e tribus valoribus positis pro x habebuntur semper vel binæ saltem radices reales, vel binæ ima-

imaginariæ. Dum enim valor *A* pergendo ab extremo majore ad medium decrescit, tum ad alterum extremum ejusdem valoris est, vel iterum major; id fieri non potest nisi alicubi decrementa desinant, & mutentur in incrementa, ac interea valor ille potest vel saltem *bis* transire per o, exhibendo binas radices reales inæquales, vel regredi ab ipso o, & exhibere binas reales æquales, vel regredi ante appulsum ad o, & habere *aliquod* minimum, quod (per num. 458) secum *trahit binas* saltem radices imaginarias.

523. Porro in casu, in quo medius trium valorum *A* sit altero extremorum minor, altero non major, valor extremus *A*, qui medio est major dicatur p, medius q, alter extremus ipsi q æqualis, vel eo major r, valores autem positi pro x, ex quibus ii orti sunt, dicantur a, b, c, ac assumatur pro x valor $\frac{a+b}{2}$ medius arithmeticè proportionalis inter a, & b, & si novus valor *A* obvenerit minor, vel æqualis valori q, jam binæ illæ radices reales vel imaginariæ jacebunt inter a, & b, erit enim is valor *A* minor p, & non major q; si vero obvenerit major ipso q, assumatur pro x valor $\frac{b+c}{2}$ medius arithmeticè inter b, & c, & si is exhibuerit valorem *A* non minorem valore q, jam valor q erit præcedente minor, hoc novo non major, adeoque inter $\frac{a+b}{2}$, & $\frac{b+c}{2}$ jacebunt radices illæ, si vero exhibuerit valorem *A* minorem valore q, exhibebit

bit profecto minorem etiam valore r, æquali vel majore q, adeoque jam hic novus valor A erit utroque extremorum minor, & radices illæ erunt inter b, ac $\frac{b+c}{2}$. In quovis autem ex iis tribus casibus, limites radicum illarum duplo arctiores fiunt, ut patet. Quare restituto in infinitum calculo, possunt arctiores reddi in infinitum.

524. Et quidem si valor A alicubi intra eos limites transit per o, & radices exhibet reales, ac inæquales, necessariò devenietur hac methodo ad binas saltem earum radicum; nam ubi distantia valoris x novi a præcedenti evaserit minor, quam sit distantia radicum illarum inæqualium, medius novus ipse valor x, vel incidet in ipsum radicis alterius valorem, vel versabitur inter illas, & valorem A exhibebit habentem signum oppositum, signo præcedentium. Si vero valor A appellit ad o, & inde regreditur, & secum trahit numerum radicum æqualium parem, nusquam quidem mutabitur signum valoris A in novis positionibus; adhuc tamen ipse valor decrescet in infinitum, & fiet in immensum minor, quam sit distantia ipsorum valorum x; Nam ibi in ipso o valor A habebit minimum quoddam, & differentiæ reliquorum valorum a minimo illo erunt ipsi reliqui valores toti, differentia autem valorum x a valore radicis exhibente $A = o$, erit minor, quam distantia valorum, quibus ipse includitur, & (per num. 479.) differentiæ valorum A respectu differentiarum valorum x ibi in infinitum decrescent. Si demum valor A ante appulsum ad o

re-

regreditur, & minimum aliquod habet, ac radices imaginarias denotat, incipient quidem differentiæ valorum A fieri in immensum minores differentiis valorum x, & interea totus valor A distabit a o ita, ut statim manifesto apparere debeat, minimum ejus valorem distare ab ipso o, ac possit ad ipsum illum valorem minimum accedi quantum libet.

525. Infinitum esset exemplis illustrare singula ex iis, quæ diximus: illustrabimus præcipua capita. In eadem superiore æquatione proposita num. 515, nimirum $x^3 - 30x + 36 = 0$, posito $x = 0$ fit $A = 36$, posito $x = 5$ fit $A = 11$, qui valores habent signa conformia. Ponatur pro x valor 10 tertius post o, qui exhibuit valorem $A = 36$ majorem, & 5, qui exhibuit 11 minorem. Habebitur $A = 736$, & trium valorum A, 36, 11, 736 medius 11 est priore minor, secundo non major, cum sit pariter minor. Quare inter o, & 10 habentur vel binæ saltem radices reales inæquales, vel binæ æquales, vel binæ imaginariæ. Et quidem habentur binæ reales, nimirum $3 - \sqrt{3}$, $3 + \sqrt{3}$, ut eodem num. 516 ostendimus.

526. Dicatur jam $a = 10$, $b = 5$, $c = 0$, eritque $p = 736$, $q = 11$, $r = 36$. Posito pro x valore $\frac{a+b}{2} = 7.5$, habetur $A = 232.875$, qui valor est major valore medio $q = 11$. Quare ponendus $x = \frac{b+c}{2} = 2.5$, eritque $A = -23.375$, unde ob signum contrarium signis prioribus jam constat haberi saltem binas radices reales inæquales,

les, alteram inter 5, & 2.5, alteram inter 2.5, & 0, & quidem $3+\sqrt{3}$ est $=4.73$ &c., & $3-\sqrt{3}=1.26$ &c.

527. Quod si æquatio sit $x^3-27x+54=0$, quæ componitur ex æquationibus $x-3=0$, $x-3=0$, $x+6=0$, & ponatur $x=15$, erit $A=3024$. posito $x=10$ fit $A=784$ valoris itidem positivi quare assumpto pro x valore 5 tertio post 15, & 10, habetur $A=44$, valoris adhuc positivi, & medius ille valor A 784 minor est quidem extremo 3024, sed major extremo 44. Quare assumendus est pro x valor 0 tertius post 10, & 5, & fit $A=54$ valoris quidem positivi, sed ita, ut trium valorum 784, 44, 54 medius utroque extremo sit minor. Hinc inter valores 10, & 0 habentur saltem binæ radices vel reales inæquales, vel reales æquales, vel imaginariæ. & quidem habentur binæ reales æquales 3, 3.

528. Sint $a=10$, $b=5$, $c=0$, $p=784$, $q=44$, $r=54$, & posito pro x $\frac{a+b}{2}=\frac{15}{2}=7.5$, fit $A=273.375$, valoris positivi, & minor quidem valore $p=784$, major tamen valore $q=44$: Quare posito $x=\frac{b+c}{2}=2.5$, fit $A=2.125$, qui valor est minor tam valore $q=44$, quam $r=54$: unde colligitur illas radices contineri inter 5, & 0 limites jam duplo propiores. Erunt igitur jam $a=5$, $b=2.5$, $c=0$, $p=44$, $q=2.125$, $r=54$. Posito $x=\frac{a+b}{2}=3.75$, vel,

omiſ-

omissa postrema nota, 3 . 7 habetur $A = 4 . 753$, qui quidem valor est major medio illo $q = 2 . 125$. Quare ponendum $x = \frac{b + c}{2} = 1 . 25$, vel 1. 2, unde fit $A = 23 . 328$, qui valor pariter est major medio illo $q = 2 . 125$. Quare illæ binæ radices versantur inter limites hosce novos duplo arctiores 3 . 7, 1 . 2. Eodem autem pacto factis $a = 3 . 7$, $b = 2 . 5$, $c = 1 . 2$, $p = 4 . 753$, $q = 2 . 125$, $r = 23 . 328$, ponendum erit $x = \frac{a + b}{2} = 3 . 1$; unde oritur $A = 0 . 091$, qui valor cum sit minor tam valore $p = 4 . 753$, quam valore $q = 2 . 125$, constat jam illas radices contineri inter 3 . 7, & 2. 5, ac novi valores a, b, c essent 3 . 7, 3 . 1, 2 . 5, novi p, q, r, essent 4 . 753, 0 . 091, 2 . 125, quorum ope progredi liceret ad limites adhuc arctiores.

529. Porro ob ipsum valorem A usque adeo imminutum satis jam tuto licet conjectari ipsum convergere ad 0, & numerum radicum æqualium parem hic contineri, quas etiam cum constet non nisi binas esse posse, cum æquatio gradus tertii plures quam tres habere radices non possit, multo etiam citius ad eas licebit accedere ex eo, quod valores A debeant esse (per num. 497) in duplicata ratione distantiarum valorum x a valore radicis, adeoque ipsæ distantiæ valorum x in ratione subduplicata valorum A. Nimirum oportebit dividere intervallum valorum 3 . 7, 2 . 5, sive 1 . 2 in ratione subduplicata 4 . 753, 2 . 125, sive in ratione 4 . 753, 3 . 161, ac prior terminus subtrahendus erit a 3 . 7.

Factis

Factis autem ut $4.753 + 3.161 = 7.914$ ad 4.753 ita 1.2 ad quartum, prodit 0.721, adeoque novus valor $x = 3.7 - 0.721 = 2.979$, qui valor illo 3.1 ad verum valorem x, nimirum 3, adhuc multo magis convergit. Si vero haberentur radices æquales quatuor, adhibere oporteret rationem subquadruplicatam, si 6 subsextuplicatam, &c., & inde fere etiam discerni posset an radices æquales sint binæ, an 4, an 6 &c., videndo, an definito novo valore radicis ope rationis subduplicatæ, an ope subquadruplicatæ, &c., novus valor A obveniat minor, sive propior vero valori 0; quod ipsum accidit etiam in iis casibus, in quibus habentur signa valorum A opposita, in quibus nimirum si fuerint tres radices æquales, vel 5, vel 7, adhiberi debet ratio subtriplicata, subquintuplicata, subseptuplicata, pro methodo adhibita n. 519, & seqq.

530. Quod si æquatio fuerit $x^3 - 16x + 120 = 0$, quæ componitur ex binis $x + 6 = 0$, $x^2 - 6x + 20 = 0$, adeoque habeat radicem realem -6, & binas imaginarias $3 + (\sqrt{-11})$, $3 - (\sqrt{-11})$, posito $x = 2$ habetur $A = 96$, posito eodem $= 6$ habetur $A = 240$. Quare assumpto tertio arithmetico post 6, & 2, sive -2, habetur $A = 144$, adeoque valor medius 96 est minor utroque extremo; & inter 6 ac -2 æquatio habet vel binas radices reales inæquales, vel binas reales æquales, vel existentibus binis imaginariis valor A retro regreditur, & minimum quoddam habet. Et quidem habet minimum, ubi $x = \sqrt{\frac{16}{3}}$ sive $4\sqrt{\frac{1}{3}}$. Nam æquatio inde primo derivata methodo numeri 464 est $3x^2$

 $- 16$

$-16 = 0$, sive $x^2 - \frac{16}{3} = 0$, $x^2 = \frac{16}{3}$, $x = \pm\sqrt{\frac{16}{3}}$, quæ quidem radices cum inæquales sint earum utralibet exhibetur vel maximum aliquod vel minimum (per num. 490). Si autem derivetur secundo formula $6x$ ex formula $3x^2 - 16$ primo derivata, & substituatur $-\sqrt{\frac{16}{3}}$ pro x tam in formula proposita $x^3 - 16x + 120$, quam in formula $6x$, obveniunt valores $-\frac{16}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} + 16\sqrt{\frac{16}{3}} + 120 = \frac{32}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} + 120$, & $-6\sqrt{\frac{16}{3}}$ cum signis difformibus; at posito $\sqrt{\frac{16}{3}}$, obveniunt $\frac{16}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} - 16\sqrt{\frac{16}{3}} + 120 = -\frac{32}{3}\sqrt{\frac{16}{3}} + 120 = -24.6336$ &c. $+ 120 = 95.3664$ &c., & $6\sqrt{\frac{16}{3}}$ cum signis conformibus: adeoque priore illo exhibetur maximum (per n. 492.) hoc posteriore minimum.

531. Porro jam valores a, b, c erunt 6.2, -2; valores p, q, r erunt 240, 96, 144., & assumpto $\frac{a+b}{2} = 4$, habetur A 120, qui valor cum sit minor quidem, extremo $p = 240$, sed major medio $q = 96$, assumi debet $\frac{b+c}{2} = 0$, unde pariter profluit $A = 120$, qui valor cum sit pariter major illo valore $q = 96$, ita ut e tribus valoribus A 120, 96, 120, medius extremorum utroque sit minor; jacebunt illæ binæ radices, vel minimus valor A habetur inter limites 4, 0, duplo arctiores, & novi valores a, b, c erunt 4, 2, 0, novi p, q, r erunt

eruut 120, 96, 120, assumptoque $\frac{a+b}{2}=3$ oritur $A=99$, major valore $p=96$, posito vero $\frac{b+c}{2}=1$, oritur $A=105$ pariter major medio $q=96$, Quare jam erunt eædem radices, vel valor minimus erit inter valores 1, & 3, atque eodem pacto liceret ad valorem illum 2, 82 &c., in quo habetur illud minimum accedere quantum libet; sed cum jam differentiæ valorum fiant satis exiguæ, valor autem ipsé sit satis magnus, tres enim postremi valores A sunt 99, 96, 105, satis tuto licet conjicere posteriores differentias totum valorem A non elisuras, adeoque non reales, sed imaginarias radices contineri hisce limitibus, quod ulterius pergenti multo evidentius fieret manifestum.

532. Atque hoc quidem pacto satis liquet, in quavis æquatione omnino semper deveniri ad unam radicem realem, vel ad binas reales inæquales, vel ad binas reales æquales, vel ad minimum exhibens radices imaginarias. Et quidem ubi omnes radices sint reales invenientur semper hac methodo radices omnes. Inventa enim quamproximè una reali, quæ dicatur f, & divisa æquatione per $x-f$, divisio debebit succedere quamproximè, ita ut postremum residuum sit quam libuerit exiguum, æquatio vero ex divisione proveniens continebit omnes illas reliquas radices reales, ac proinde in hac pariter invenire licebit saltem unam radicem realem, nimirum prioris alteram, & ita porro, donec omnes inventæ sint.

533. Verum plerumque diversis positionibus adhibitis in prima ipsa æquatione proposita detegentur omnes transitus a signo positivo ad negativum circa omnes radices; quod omnino semper continget, si binæ radices non fuerint satis proximæ inter se, & e consideratione valorum *A*, Analysta exercitatus loca ipsa transituum facilè subodorabit. Idem erit subterfugium, ubi æquatio habeat radices imaginarias mixtas realibus, & in eas impingat methodus tradita. *Mutatis enim* positionibus fere semper invenientur ejusmodi valores *A*, ex quibus liceat conjicere loca, in quibus mutantur signa, vel in quibus in ipso appulsu ad o devenitur ad minimum quoddam.

534. Ubi superiore methodo ad aliquam radicem satis proximè deventum fuerit, calculus ob decimalium fractionum numerum, plus æquo molestus accidet potissimum in altioribus æquationibus habentibus plures terminos, & accessus ad verum valorem est semper admodum lentus. Habetur autem methodus admodum expedita, qua, invento semel valore non nimis remoto, citissimè ad maximè proximum devenitur, ac plerumque, ubi nimirum altioris gradus æquationes anteriorum terminorum coefficientes non habeant plus æquo *ingentes*, satis erit, si valor inventus a vero non distet magis, quam decima sui parte, & ubi coefficientes illi multo majores sint, methodus aliquanto minus converget, nisi aliquanto propior vero assumatur valor. Methodus autem innititur iis, quæ num. 466 demonstravimus, de contemptu terminorum superiores potentias continentium quantitatum exiguarum,

rum, respectu terminorum continentium inferiores, atque est hujusmodi.

535. Valor proximus vero inventus dicatur a; valor verus x sit $a + z$, eritque z quantitas exigua respectu a. Substituantur pro x, x^2, x^3 &c. valores sui, & æquatio transformabitur in aliam continentem quantitatem, z elevatam ad eamdem maximam potentiam, ad quam fuerat elevata incognita x, adeoque ejusdem gradus cum præcedenti. Sed in ea omissis omnibus terminis, qui continent potentias superiores quantitatis z præter primam, reducetur ad æquationem gradus primi exhibentem valorem z vero proximum, quo addito valori a, & restituto calculo, vocando a novum valorem radicis inventum, z novam adhuc minorem differentiam a vera radice, fiet accessus in infinitum. Quod si relinquantur etiam termini continentes z^2, habebitur æquatio gradus secundi resolvenda adhuc admodum facile, & valor z erit multò propior vero. Termini autem, qui retineri debent, admodum facile deprehenduntur ex formula generali binomii elevati ad quámvis potentiam. Si enim terminus fuerit bx^m, pro eo satis erit ponere in prima methodo $ba^m + mba^{m-1}z$, in secunda $ba^m + mba^{m-1}z + \frac{m \times (m-1)}{1 \times 2} a^{m-2} z^2$.

536. Aequationis $x^3 - 30x + 36 = 0$, cujus radix (per num. 516) 4.73205080756 &c., in tertia cellula numeri 515 invenimus radicem 4.5

 mediam

mediam inter 4, & 5, adeoque jam constabat, ibi eam a vera abludere minus, quam in ratione 0 . 5 ad 4, vel 5, sive decima circiter vel minus etiam quam decima sui parte. $a+z$ ponatur pro x dicendo $a=4.5$, & habebitur in prima methodo

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2z \quad . = 0 \\ -30a-30z \\ +36 \end{array}$$

adeoque $z=\frac{a^3-30a+36}{-3a^2+30}$, sive ponendo 4 . 5 pro a, habetur $z=\frac{-7.875}{-30.75}=0.25$. Quare fit $x=4.5+0.25=4.75$, quæ jam a vera differt $\frac{2}{100}$. At iterum facto $a=4.75$ & restituto calculo haberetur $z=\frac{0.671875}{-37.6875}=-0.01782$, adeoque $x=4.75-0.01782=4.73218$, qui valor a vero 4 . 7320 differt per $\frac{2}{10000}$, atque ita porro continua calculi restitutione multo citius ad verum valorem convergitur, quam superioribus methodis.

537. Quod si libeat etiam secundam potentiam z retinere, facta substitutione habebitur

$$\begin{array}{l} a^3+3a^2z+3az^2 \quad = 0; \\ -30a-30z \\ +36 \end{array}$$

Adeo-

que

que $z^2 + \frac{a^2 - 10}{a} z + \frac{a^3 - 30a + 36}{3a} = 0$. Quare $z = \frac{-a^2 + 10}{2a} \pm \sqrt{\left(\frac{a^2 - 10}{2a}\right)^2 - \frac{a^3 - 30a + 36}{3a}}$; ubi posito primo quidem 4.5 pro a, habetur $z = -1.139 \pm 1.371$, nimirum assumpto signo positivo $z = 0.232$, adeoque $x = 4.5 + 0.232 = 4.732$, qui valor a vero 4.73205 &c. nonnisi in quinta decimalium nota differt. Restituto autem calculo, & posito 4.73 pro a, fit $z = -1.30791754 + 1.30996835 = 0.00205081$, adeoque $x = a + z = 4.73205081$, qui valor a vero valore 4.73205080 differt solum per $\frac{1}{100000000}$, ita ut ubi in prima positione notæ accuratæ fuerant tantum tres, jam sint octo, ac pariter nova substitutione iterum notarum accuratarum numerus fere triplicaretur, quod cujus compendii sit satis patet.

538. Et quidem eadem methodus aptari potest etiam simplici radicum extractioni. Si nimirum quæratur radix m numeri c, quæ dicatur x erit $x^m = c$, $x^m - c = 0$, ac si innotescat jam radix proxima, quæ dicatur a, & ponatur $a + z = x$, erit $-c + a^m + m a^{m-1} z = 0$ odeoque $z = \frac{a^m - c}{-m a^{m-1}}$

vel si retineatur secunda potentia quantitatis z, erit

 $-c$

$$-c+a^m+m\,a^{m-1}z+\frac{m\times(m-1)}{1\times 2}a^{m-2}z^2=0,$$

adeoque $z^2+\frac{2a}{m-1}z+\frac{2a^m-2c}{m\times(m-1)\times a^{m-2}}=0,$

& $z=-\frac{a}{m-1}\pm\sqrt{\frac{a^2}{(m-1)^2}+\frac{2a^m-2c}{m\times(m-1)a^{m-2}}}$

In quibus formulis, si substituantur numeri patebit, quam cito ad verum radicis quæsitæ valorem liceat accedere.

§. XVI.

De solutione problematum, & demonstratione theorematum.

539. MUlta, quæ ad solutiones problematum, vel theorematum demonstrationes pertinent, jam diximus inter ipsa exempla, quibus præcepta illustravimus. Addemus hic nonnulla, quæ hujusmodi investigationibus prodesse possint. in primis cavendum illud, quod utrique, & plurimum prodest, & vero etiam omnino necessarium est, nimirum ut rite algebraico veluti sermone enuncientur ea, quæ sermone communi proponuntur.

540. Quantitates designari litteris æqualitatem signo $=$, additionem signo $+$, detractionem signo $-$, jam initio diximus. Hinc cum summa quantitatum sit id quod ex additione provenit, differen-

ferentia vero e subductione unius termini ab alio; summa exprimitur signo + interjecto binis quibusvis quantitatibus, differentia signo —. Problema hoc pacto enuncietur sermone vulgari. Quæro duos numeros, quorum summa sit 10, differentia 4; patet idem algebraicè enunciari hoc pacto $x + y = 10$, $x - y = 4$. Atque eodem modo expressiones potentiarum, & radicum, producti ex multiplicatione, vel divisione, & alia ejusmodi, quæ in ipsa denominatione diximus, algebraico sermoni exercendo necessaria sunt.

541. Ad solutionem problematum omnino necessarium est, ut ad æquationes deveniatur, quod plerumque etiam in theorematum demonstratione contingit. Ac fere, ubi ad æquationes rite deventum est, res est perfecta. Et quidem in superiore exemplo ipsa problematis enunciatione ad æquationem est deventum, quod semper contingit in problematis numericis, ubi æqualitas sola investigetur quærenda. At sæpe artificio aliquo opus est, ut ad æquationem deveniatur, quod in geometria potissimum contingit, ubi a linearum positione potissimum res pendet, & triangulorum similitudo, æqualitas quadrati basis cum quadratis laterum in triangulo rectangulo, atque alia ejusmodi in subsidium vocantur, & eorum ope ad æquationes devenitur. Pro numericis problematis, vel theorematis proferemus casus quosdam, qui frequentius occurrant.

542. Si inter conditiones propositas habeatur illud, ut quatuor termini sint inter se proportionales; inde statim eruitur æquatio faciendo nimirum productum extremorum æquale producto medio-

rum.

rum. At si sint tres continue proportionales, debet quadratum medii æquari producto extremorum, & habetur æquatio eam conditionem exprimens. Quærantur bini numeri medii proportionales inter 12 & 2, quorum primus sit medius continue proportionalis inter secundum, & 9. Exprimetur prima conditio ponendo $xy = 2 \times 12$, sive $xy = 24$, secunda ponendo $x^2 = 9y$, ex quibus æquationibus facile deducitur quæsitos numeros esse 6, & 4.

543. Quod si quantitas quædam x sit prima e binis mediis continue proportionalibus inter a, & b erit $x^3 = a^2 b$, si prima e ternis erit $x^4 = a^3 b$, si prima e mediis numero $m-1$, erit $x^m = a^{m-1} b$. Nam (per n.27. c.2. Arithm.) si in progressione quadam geometrica post primum terminum a, fuerit numerus terminorum m, quorum primus x, postremus b, adeoque numerus intervallorum m, numerus autem terminorum mediorum $m-1$, erit a ad b in ratione multiplicata per m rationis a ad x, adeoque $a . b :: a^m . x^m$, & $a x^m = a^m b$, sive $x^m = a^{m-1} b$.

544. Atque hinc eruitur illud: si x debeat esse n:sima e mediis $m-1$ inter a&b, fore $x^m = a^{m-n} b^n$. Nam si prima dicatur y, erunt media $n-1$ inter a & x, adeoque $y^n = a^{n-1} x$; at erunt $m-1$ inter a & b, adeoque $y^m = a^{m-1} b$. In priore evehendo utrumque terminum ad potentiam m habetur

tur $y^{mn} = a^{mn-m} x^{m}$, in posteriore elevando utrumque ad potentiam n habetur $y^{mn} = a^{mn-n} b^{n}$. Quare erit $a^{mn-m} x^{m} = a^{mn-n} b^{n}$, & $x^{m} = a^{mn-n-mn+m} b^{n}$ sive $x^{m} = a^{m-n} b^{n}$.

545. Pariter propositi vel problematis, vel theorematis conditiones rite expendendæ sunt, ut ex iis eruantur æqualitates inter summas, vel differentias quantitatum quarundam, vel proportionalitates inter totas quantitates, vel earum summas, vel differentias, ex quibus deinde æquationes profluant.

546. Sit dolium continens 20. mensuras vini, ex quo extrahi debeat vase quodam mensurarum earundem numerus quidam pluribus exhaustionibus, tum post singulas exhaustiones infundi 4 mensuræ vini, & reliquum aqua ad eandem altitudinem impleri ita, ut post datum quemdam exhaustionum, & repletionum numerum, tantundem vini contineatur in dolio, quantum aquæ.

547. Ad solvendum hoc problema rite perpendere oportet conditiones ipsius. In dolio post singulas repletiones habetur permixtum vinum cum aqua ita, ut in nova exhaustione e mixto illo eruantur mensuræ quædam, quarum numerus cum sit incognitus, nec illud quidem constat, quantum vini dematur inde, quantum aquæ. Constat tamen in vase ipso rationem vini ad aquam esse eandem, quam in dolio, adeoque, & quantitas vini in dolio ad quantitatem vini in vase, quæ nimirum extra-

trahitur, erit in eadem ratione, in qua est quantitas aquæ in dolio ad ejus quantitatem in vase, sive quantitas totius mixti in dolio ad quantitatem in vase, nimirum ut dolii capacitas ad capacitatem vasis.

548. Hoc pacto proportio quædam inventa est, quæ ad solutionem problematis viam sternet. Si enim numerus mensurarum in vase dicatur x. Post primam exhaustionem, erit numerus mensurarum vini in dolio $20-x$, tum post *repletionem* primam $20-x+4$, sive $24-x$: Post secundam vero exhaustionem vinum reliquum habebitur, si fiat ut capacitas dolii ad capacitatem vasis, ita vinum quod habebatur ante ejusmodi exhaustionem ad vinum extractum in ipsa, nimirum un 20 ad x ita $24-x$ ad $\frac{24x-x^2}{20}$. Erit igitur residuum vinum in dolio $24-x-\frac{24x-x^2}{20}$. Huic residuo additis 4, habetur post secundam repletionem $28-x-\frac{24x-x^2}{20}$. Eodem pacto si fiat, ut 20 ad x ita $28-x-\frac{24x-x^2}{20}$ ad $\frac{28x-x^2}{20}-\frac{24x^2-x^3}{20\times20}$ habetur vinum in tertia exhaustione demptum, adeoque residuum erit $28-x-\frac{24x-x^2}{20}-\frac{28x-x^2}{20}+\frac{24x^2-x^3}{20\times20}$, & additis 4, erit resi-

residuum post tertiam repletionem $32 - x - \frac{24x - x^2}{20} - \frac{28x - x^2}{20} + \frac{24x^2 - x^3}{20 \times 20}$.

549. Patet jam ope illius proportionis haberi posse post quemvis exhaustionum, & repletionum numerum algebraicam expressionem quantitatis vini in dolio. Sed ejusdem quantitatis expressio habetur ex altera conditione, quod nimirum tantundem habeatur vini, quantum aquæ, unde fit, ut quantitas vini debeat esse mensuratum 10. Si igitur istæ binæ expressiones ponantur æquales, habetur æquatio, ex cujus solutione pendet solutio problematis, quæ erit ejusdem gradus, quem exprimit exhaustionum, & repletionum numerus.

550. Si exhaustiones, & repletiones debeant esse binæ, habebitur $28 - x - \frac{24x - x^2}{20} = 10$ sive $18 - x - \frac{24x - x^2}{20} = 0$, & $360 - 20x - 24x + x^2 = 0$, $x^2 - 44x + 360 = 0$, $x = 22 \pm \sqrt{124}$ sive proximè $x = 22 \pm 11$. Nimirum sive vas illud contineat paulo minus quam mensuras 11, sive paulo plus quam 33, problemati satisfiet.

551. Atque hic considerando conditiones problematis inventa est proportio, cujus ope deventum est ad valorem quemdam, qui æquatus alteri æquationem exhibuit. Id sæpe fit cum successu potissi-

tissimum in Geometria, ubi ab binos ejusdem lineæ valores devenitur, qui æquati exhibent æquationem. Cavendum tamen illud, ut diversi illi valores ex diversis conditionibus deriventur. Si enim ex eadem tantum conditione diversa via deveniatur ad binos valores, ii licet primo aspectu diversi videantur, eandem re ipsa etiam algebraice continebunt formulam, & æquationem præbebunt frustraneam, in qua nimirum demum fiet $o = o$.

552. In superiore exemplo, invento valore $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ vini residui post secundam repletionem, instituat quis hunc alium discursum. Post primam exhaustionem nihil aquæ relinquitur, habetur autem vacuum x, quod impletur mensuris vini 4, aquæ vero $x-4$. Quare post primam repletionem habetur aquæ $x - 4$. Si fiat ut 20 ad x ita $x - 4$ ad $\frac{x^2 - 4x}{20}$, habebitur quantitas aquæ ablata in secunda exhaustione. Quare post secundam exhaustionem erit quantitas aquæ $x - 4 - \frac{x^2 - 4x}{20}$: Additur autem in secunda repletione pariter aquæ $x - 4$. Erit igitur quantitas aquæ post secundam repletionem $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20}$: Vini autem quantitas habebitur si a mensuris 20 dematur hæc quantitas aquæ; erit igitur quantitas vini

vini $20 - 2x + 8 + \frac{x^2 - 4x}{20}$, five $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$.

553. Si jam hunc fecundum valorem vini æquet illi prius invento, habebit $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20} = 28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$, five auferendo utrinque $28 - x$, & multiplicando per 20, fiet $-20x + x^2 - 4x = -24x + x^2$, nimirum transponendo, $0 = 0$. Quod inde obvenit, quia bini illi valores $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$, & $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ eruti funt ex eadem conditione modi, quo vinum extrahitur, ac infunditur, & iccirco algebraice quoque eundem continent valorem, cum nimirum idem fit $-\frac{24x - x^2}{20}$, ac $+\frac{x^2 - 24x}{20}$, five $\frac{x^2 - 4x}{20} - x$, adeoque etiam $28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$ idem ac $28 - 2x + \frac{x^2 - 4x}{20}$, altera autem conditio, quod poft fecundam exhauftionem debeant manere 10 vini menfuræ, fuerat penitus prætermiffa.

554. Po-

554. Poterat ad eandem æquationem deveniri etiam æquando quantitatem æquæ inventam post secundam repletionem mensuris 10, quo pacto fuisset $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20} = 10$, sive multiplicando per 20, $40x - 160 - x^2 + 4x = 200$, vel transpondendo $x^2 - 44x + 360 = 0$, ut prius: poterat etiam æquari quantitas aquæ quantitati vini, ac fuisset $2x - 8 - \frac{x^2 - 4x}{20} = 28 - x - \frac{24x - x^2}{20}$; sive $40x - 160 - x^2 + 4x = 560 - 20x - 24x + x^2$, ac transponendo $2x^2 - 88x + 720 = 0$, vel dividendo per 2 iterum $x^2 - 44x + 360 = 0$. Unde patet ad eandem æquationem ex iisdem conditionibus deveniri pluribus viis.

555. Sæpe autem ad æquationes devenitur inveniendo algebraice partes quantitatis cujuspiam, & ipsam totam, ac summam partium æquando toti; sæpe inveniendo valores quatuor quantitatum proportionalium geometricè, ac æquando productum extremorum producto mediorum, & aliæ in aliis casibus industriæ adhibentur, in quibus potissimum ingenii vis proditur, nec generales regulæ tradi possunt eruendi ex datis conditionibus æquationes. Nihil autem magis Tyroni proderit, quam si plurima problemata sibi a præceptore proponenda curet, ac in eorum solutione se exerceat, & ab ipso præceptore accipiat solutiones ipsas, si marte suo

suo nequaquam invenerit, vel problemata ab auctoribus passim proposita conetur ad æquationes deducere.

556. Nonnunquam ad æquationes eruendas oportebit ex aliis quoque facultatibus notitias habere quaspiam, ex quibus datorum, atque quæsitorum connexio pendeat. Sint bina gravia, quorum primum secundo altius sit pedibus 360, ac ad idem planum horizontale debeant ita descendere, ut primum illud impendat duplum ejus temporis, quod impendit secundum, & præterea minuta secunda horaria tria. Quæratur altitudo, & tempus.

557. Ad solvendum hoc problema oportet nosse hæc duo ex Mechanica. Primo, gravia libere descendentia singulis secundis percurrere pedes 15 quamproxime, secundo spatia libere descendendo percursa esse ut quadrata temporum, quibus percurruntur.

558. Dicatur jam x tempus, quod impendit secundum grave, computatum in minutis secundis, eritque tempus, quod impendit primum $= 2x + 3$, ac pariter si altitudo secundi computata in pedibus dicatur y, erit altitudo primi $y + 360$. Jam vero erit ut quadratum unius secundi ad quadratum temporis x, ita pedes 15 ad spatium y, sive $1 . x^2 :: 15 . y$. Pariter ut 1 ad quadratum temporis $2x+3$ ita pedes 15 ad $y + 360$, sive $1 . 4x^2 + 12x + 9 :: 15 . y + 360$. Ex prima proportione habetur $y = 15x^2$, ex secunda $y + 360 = 60x^2 + 180x + 135$, adeoque in hac secunda $y = 60x^2 + 180x - 225$, quo valore y comparato cum priore, habe-

tur $60x^2+180x-225=15x^2$, sive $45x^2+180x-225=0$, vel $x^2+4x-5=0$, nimirum $x=-2\pm\sqrt{9}$; unde inferuntur bini valores x, nimirum 1, & -5, ac ope eorum in æquatione $y=15x^2$ habentur bini valores y, nimirum 15, & 375.

559. Notetur autem hic illud, in problematis mere numericis radicem quamcumque satisfacere quæstioni, dummodo negativi numeri rite tractentur, & eorum additio fiat subtrahendo. At in aliis problematis, plerumque negativæ radices quæstioni vulgari sermone propositæ nequaquam satisfaciunt, satisfacient tamen semper quæstioni ipsi propositæ aliis terminis, & nonnihil immutatæ, sive parti cuipiam quæstionis ipsius, de qua sæpe ne cogitaveramus quidem, & pluralitate radicum Algebra monet quodammodo, & alloquitur ejus idiomatis gnarum, ac ostendit partem illam problematis ipsius, quam non animadverterat Analysta. Ejus exempla multo frequentius occurrunt in Geometria, ubi si positivæ quantitates versus certam plagam assumantur, negativæ exprimunt plagam oppositam. Occurrunt tamen exempla ubique, dummodo ubi negativi valores obveniunt, pro anticipatione accipiatur posticipatio, pro excessu defectus, pro progressu regressus, pro lucro debitum contractum, pro vi propellente vis retrahens, & alia ejusmodi.

560. In casu nostro valor $x=1$ satisfacit quæstioni. Et primum grave tempore secundorum $2x+3=5$ percurrit pedes $y+360=15+360=375$, secundum tempore secundi 1 pedes 15. Et qui-

quidem est, ut 1 ad $5 \times 5 = 25$, ita 15 ad 375, ut oportebat. At valor $x = -5$ quæstioni, ut est proposita, nequaquam satisfacit. Primum enim deberet in descensu per altitudinem $375 + 360 = 735$ impendere tempus $2x + 3 = -10 + 3 = -7$, secundum in descensu per altitudinem 375 impendere tempus -5. Verum quo pacto tempus negativum impendi possit omnino non apparet. Si autem pro negativis temporibus -7, & -5 sumantur positivi 7, & 5, habebuntur quidem spatia 735, 375 percursa temporibus 7 & 5, cum ex solutione problematis debeat esse $1.15 :: -7 \times -7.735$, & $1.15 :: -5 \times -5.375$; ac -7×-7 sit $= 7 \times 7$, & $-5 \times -5 = 5 \times 5$. Verum tempus secundorum 7 non excedit duplum temporis secundorum 5, per 3 secunda, sed ab eo deficit. Quare negativus ille valor, mutatis omnium temporum signis, quæ mutatio æquationem non mutat, cum sola temporum quadrata ingrediantur conditiones exhibentes æquationem ipsam, exhibet solutionem problematis, quo quæratur, ut primum grave impendat minus quam duplum temporis impensi a secundo, existente defectu secundorum trium, quo pacto solus excessus in defectum mutatus est. Ac eodem pacto licebit semper analyticum sermonem interpretari, & videre, cui problemati negativi valores aptari possint, quod aliquando primo intuitu apparebit, aliquando difficilius detegetur.

561. In theorematum demonstratione pariter quandoque res erit per se manifesta, sæpe tamen longiore ambitu opus erit, & artificio aliquo, ac ingenii vi, qua quod in theoremate proponitur, algebraice rite expressum ita tractetur, ut veritas

in eo enunciata, quæ plerumque æqualitatem aliquam involvit, deprehendatur.

562. Si proponatur hujusmodi theorema. Quadratum binomii continet bina quadrata binorum terminorum, & duplum eorundem productum. Id nullo negotio demonstratur. Satis est binomium $a + b$ ducere in se ipsum, & habetur $a^2 + 2ab + b^2$, quod statim illius ipsius theorematis veritatem exhibet.

563. At si proponatur hoc aliud: *Si quantitas quædam secetur bifariam, & non bifariam, bina quadrata partium inæqualium æquabuntur binis quadratis æqualium una cum binis quadratis differentiæ partis æqualis & utriusvis inæqualium*, hoc theorema longiore ambitu indigebit. Si enim utralibet e binis partibus æqualibus dicatur a, partium inæqualium major m, minor n, erit differentia illa $m - a$, cujus quadratum $mm - 2am + aa$, ejusque duplum $2mm - 4am + 2aa$, cui si addantur bina quadrata partium æqualium sive $2aa$, fiet $2mm - 4am + 4aa$. Porro cum sit $m + n = 2a$ erit $n = 2a - m$, adeoque $nn = 4aa - 4am + mm$, & quadrata partium inæqualium $nn + mm = 4aa - 4am + 2mm$. Cum igitur eadem quantitas inventa sit tam capiendo bina quadrata differentiæ illius, una cum binis quadratis partium æqualium, quam capiendo bina quadrata inæqualium, patet theorematis veritas.

564. Atque hoc pacto ope æquationis cujusdam devenitur etiam ad demonstrationes theorematum, inveniendo æquales eidem cuipiam quantitati terminos

minos illos, quorum æqualitas in ipso theoremate enunciatur. Quin immo si theorema sit falsum, deprehenditur ejus falsitas. Sic in superiore theoremate si enunciatum fuisset bina quadrata partium inæqualium æquari binis quadratis illius differentiæ & ternis quadratis partis æqualis, falsitas deprehensa fuisset: quia debuisset esse $4aa - 4am + 2mm = 2mm - 4am + 5aa$, sive $o = aa$, quod est absurdum, si ipsa quantitas $2a$ non sit $= o$.

565. Sæpe autem a ratione denominandi pendet facilitas major, vel minor demonstrandi. Sic hoc ipsum postremum theorema multo expeditius demonstraretur, si partium inæqualium major diceretur $a + b$, adeoque minor $a - b$. Nam prioris quadratum esset $aa + 2ab + bb$, posterioris $aa - 2ab + bb$, adeoque eorum summa $2aa + 2bb$ æqualis binis quadratis partium æqualium a, & binis differentiæ b.

566. Ratio tamen denominandi potissimum in solutione problematum diligenter est perpendenda; sæpe enim multo faciliorem solutionem exhibet denominatio rite instituta. Atque in primis, sæpe liberat ab æquationum multiplicitate. Si quærantur tres numeri continue proportionales, ita, ut summa primi ac secundi sit $= 6$, summa vero extremorum cum duplo secundi sit 18, & ii numeri dicantur x, y, z, habebuntur tres æquationes. Prima ex proportione $x . y :: y . z$, erit $xz = y^2$, secunda ex secunda conditione $x + y = 6$, tertia ex tertia $x + 2y + z = 18$, ex quibus ad unicam deveniretur methodo exposita num. 168. Sed evitari

possunt plures æquationes sola conditionum consideratione. Si enim primus numerus dicatur x, is ablatus a summa 6 relinquet secundum $= 6 - x$. Factis autem $x . 6 - x :: 6 - x . \frac{36 - 12x + x^2}{x}$, hic erit tertius numerus. Erit autem ex postrema conditione $x + \frac{36 - 12x + x^2}{x} + 12 - 2x = 18$, quæ est unica æquatio, & reducta exhibet $\frac{36 - 12x + x^2}{x} - x = 6$, vel $36 - 12x + x^2 - x^2 = 6x$, sive $36 = 18x$, vel demum $x = 2$, quo invento invenitur secundus $= 6 - x = 6 - 2 = 4$, & tertius $= \frac{16}{2} = 8$.

567. Aliquando ex ipsa denominatione, vel ex electione incognitæ retinendæ in æquatione, eliminatis cæteris, pendet etiam æquationis gradus, qui potest fieri depressior. Sit hujusmodi problema: invenire duos numeros, quorum secundus sit medius inter primum & 8, duplum autem quadratum secundi una cum triplo primo efficiat 38. Si primus numerus dicatur x, secundus y, erit $y^2 = 8x$, & $2y^2 + 3x = 38$. Si eliminetur y, erit in prima æquatione $2y^2 = 16x$, quo substituto in secunda, fit æquatio primi gradus $16x + 3x = 38$, sive $19x = 38$, $x = 2$. At si eliminetur x, habetur in prima $x = \frac{y^2}{8}$, adeoque secunda evadit æquatio gradus

dus secundi, $2y^2 + \frac{3}{8}y^2 = 38$, sive $16y^2 + 3y^2 = 304$, vel $19y^2 = 304$, ac $y^2 = 16$, vel $y = 4$.

568. Porro ubi solutionem æquationum gradus quarti reduximus ad solutionem æquationum gradus tertii, ostendimus num. 387, & 389. e tribus illis assumptis u, m, n, eliminatis m, & n obvenire æquationem gradus sexti carentem alternis terminis, adeoque æquivalentem æquationi gradus tertii, cum contineat solum u^6, u^4, u^2; si autem retineatur m, vel n, obvenire æquationem gradus sexti cum omnibus terminis intermediis, ac id ipsum ante æquationis derivationem deprehendi ex eo, quod e sex valoribus u, bini quique solo signo differre debeant, adeoque valores u^2 sint solum tres, dum valores m, vel n omnes etiam magnitudine inæquales sunt. Tanti interest considerare, quæ incognita ad æquationem finalem sit adhibenda.

569. Diximus (num. 189.) in problematum consideratione, si tot sint conditiones, ex quibus æquationes derivari possunt, quot incognitæ, problema esse determinatum, si plures, plusquam determinatum, si pauciores indeterminatum. Aliquando tamen plures ejusmodi conditiones possunt eamdem prorsus æquationem præbere, & tunc licet tot sint conditiones ejusmodi, quot incognitæ, problema erit indeterminatum. Quærantur bini numeri medii geometrice proportionales inter 2, & 12, ac inter 1, & 24: Dicantur x, & y, ac ex prima conditione erit $xy = 2 \times 12$, ex secunda

$xy = 1 \times 24$, nimirum ex utraque $xy = 24$, adeoque assumpto quovis numero pro x, & facto $y = \frac{24}{x}$, satisfit utrique conditioni, ac utrâque exhibente eamdem æquationem problema remanet indeterminatum.

570. Quandoque autem potest æquivalere problemati, plusquam determinato, licet tot incognitæ sint, quot æquationes, quæ nimirum inter se pugnent. Ut si quærantur bini numeri medii geometricè proportionales inter 2, & 12, ac inter 4, & 16. Prima conditio requireret $xy = 24$, secunda $xy = 64$. quod fieri non potest, cum non possit esse $24 = 64$.

571. In problematis indeterminatis infinitæ solutiones inveniri possunt, ponendo in æquatione finali, quæ remanet, eliminatis tot aliis incognitis, quot aliæ æquationes habebantur, & retinet adhuc plures incognitas, pro singulis incognitis, dempta unica, valores quos libuerit. Fiet enim æquatio determinata, quæ exhibebit valores incognitæ relictæ, qui conjuncti cum reliquarum arbitrariis solvent problema. Quærantur quatuor numeri ita, ut summa primi bis, ac secundi semel accepta sit 6, summa omnium 20. Si dicantur x, y, z, u, erit $2x + y = 6$, $x + y + z + u = 20$. Ex prima $y = 6 - 2x$, quo valore substituto in secunda, habetur $x + 6 - 2x + z + u = 20$, sive $z + u - x = 14$. Ponantur pro z, & u quicunque valores, ut 7, & 8, & erit $15 - x = 14$, sive $1 = x$, adeoque $y = 6 - 2 = 4$. Quare numeri

meri 1, 4, 7, 8 satisfaciunt quæstioni. At si ponantur 10, & 12 pro z, & u, erit $22 - x = 14$, $x = 8$, $y = 6 - 16 = - 10$, ac proinde numeri 8, $-$ 10, 10, 12 pariter quæstioni satisfaciunt, & quicunque alii numeri in hac finali æquatione ponantur pro z, & u, semper problema solvitur.

572. Ubi in æquatione finali incognitæ illæ ad eumdem gradum non assurgunt præstabit plerumque substituere valores arbitrarios pro iis incognitis, quæ assurgunt ad gradus altiores, ut remaneat æquatio resolvenda gradus infimi, adeoque minus difficulter resolvi possit. Sit æquatio $2x^3yz^2 - 10x^2z + 8xyz + 16y = 0$. Si valores arbitrarii substituantur pro y, & z, relinquitur æquatio gradus tertii ob illud x^3; si pro x, & y, relinquitur æquatio gradus 2 ob illud z^2, si demum pro x, & z, relinquitur æquatio gradus primi, cum y primam dimensionem non excedat.

573. Præstabit tamen aliquando altiores gradus retinere, ut nimirum tuto ad aliquam solutionem deveniatur. Nam quotiescumque æquatio, quæ post substitutionem remanet, est gradus imparis, aliqua saltem habetur radix realis (per num. 219), si autem sit gradus paris, potest omnes radices habere imaginarias, quo casu per illam substitutionem æquatio non solvitur. Sit æquatio $x^3y^2 - 6x^2y^2 - 4x^2y + 29xy + 22x - 96 = 0$. In ea si pro x ponatur 1, fiet $y^2 - 6y^2 - 4y + 29y + 22 - 96 = 0$, quæ reducta evadit

$5y^2 - 25y + 74 = 0$, sive $y^2 - 5y + 14.8 = 0$, ac proinde $y = 2.5 \pm \sqrt{(6.25 - 14.8)}$, quae sunt radices imaginariae. Posito quoque $x = 2$, habetur $8y^2 - 24y^2 - 16y + 58y + 44 - 96$, quae aequatio reducitur ad hanc $16y^2 - 42y + 52 = 0$, sive $y^2 - \frac{21}{8}y + 3.\frac{1}{4} = 0$, cujus radices $\frac{21}{16} \pm \sqrt{\frac{441}{256} - 3.\frac{1}{4}}$, sive $\frac{21}{16} \pm \sqrt{1.\frac{185}{256} - 3.\frac{1}{4}}$ pariter imaginariae. Quamobrem plures substitutiones instituendae sunt, donec casu incidatur in illas, quae exhibeant radices reales. At quovis valore substituto pro y, prodit aequatio gradus tertii, quae semper habet aliquam radicem realem. Sic si pro y ponatur 2, aequatio evadit $4x^3 - 24x^2 - 8x^2 + 58x + 22x - 96 = 0$, sive $4x^3 - 32x^2 + 80x - 96 = 0$, vel $x^3 - 8x^2 + 20x - 24 = 0$, quae, cum, posito $z + \frac{8}{3} = x$, mutetur in hanc $z^3 - 1.\frac{1}{3}z - 8.\frac{16}{27} = 0$, habet (per n.335. & 336.) binas quidem radices imaginarias, sed unam realem.

574. Quando autem potestas maxima omnium incognitarum ascendit ad gradum parem, fieri potest, ut problema sit prorsus impossibile, & substituto quovis valore pro quavis ex incognitis, adhuc numquam deveniri possit ad solutionem problematis. Atque id omnino semper eveniet, cum primum membrum habuerit simplicia incognitarum quadrata positivis signis affecta una cum cognitis quibus-

busvis positivis, ut in æquatione $x^2 + y^2 + a = 0$, in qua, si a sit quantitas positiva, & pro x, ac y, ponantur valores quicumque vel positivi, vel negativi semper $x^2 + y^2$ erit & ipsa positiva quantitas, adeoque $x^2 + y^2 + a$ non potest esse $= 0$. Quin etiam si nulla quantitas cognita adsit, ut in æquatione $x^2 + y^2 = 0$, vel $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, nisi omnes incognitæ ponantur $= 0$, æquationi non satisfiet.

575. Idem continget semper etiam, ubi habeantur quadrata binomiorum, vel polinomiorum quorumcumque, dummodo inter ea adsit vel quantitas positiva cognita, vel quadratum simplex incognitæ, præfixo semper quadratis positivo signo. Nam quadrata illa semper positiva erunt, & evanescere non poterit eorum summa, nisi singula ex iis fiant $= 0$, quod evenire non poterit, si unum ex iis sit simplex, nisi illa ipsa quantitas, cujus est id quadratum, fiat $= 0$, & si omnia quadrata evanescant, quantitas autem cognita positiva præterea adsit, adhuc totum non evanescit. Sit æquatio $x^2 + 2xy + y^2 + z^2y^2 = 0$. Transposito postremo termino, fieret $x^2 + 2xy + y^2 = -z^2y^2$ sive extractis radicibus $x + y = \sqrt{-z^2y^2}$, ubi quicumque valores substituantur pro y, z, vel positivi, vel negativi, semper $\sqrt{-z^2y^2}$ erit valor imaginarius, adeoque nulli erunt valores earum quantitatum, qui conjungi possint cum aliquo valore

lore x ita, ut problema fiat possibile, nisi fiat $z = 0$; quo casu facto etiam $x^2 + 2xy + y^2 = 0$, haberetur $x + y = 0$, & $x = -y$. Sed si æquatio sit $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^2 + a$, ne hoc quidem artificio satisfiet, cum evanescentibus reliquis, non possit evanescere a.

576. Quin immo licet gradus incognitæ cujuspiam sit impar, adhuc tamen contingere poterit, ut nulli numeri problemati satisfaciant, nisi illa quantitate posita $= 0$, si nimirum ea incognita inveniatur in terminis omnibus æquationis, ac ubi ad minimam potentiam assurgit, sit gradus pariter imparis. Divisa enim æquatione per eum ejus incognitæ gradum, relinquetur æquatio gradus paris. Si æquatio sit $x^5 + 2x^4 y + y^2 x^3 + z^2 y^2 x^3 + ax^3 = 0$, ea divisa per x^3, habebitur æquatio $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^2 + a = 0$, impossibilis per numerum præcedentem. Quare & æquatio $x^5 + 2x^4 y + y^2 x^3 + z^2 y^2 x^3 + ax^3 = 0$, impossibilis erit, quicumque enim numeri substituantur pro x, z, y, semper æquatio proveniet composita ex binis $x^3 = 0$, $x^2 + 2xy + y^2 + z^2 y^2 + a = 0$, adeoque habebit tres radices $= 0$, & binas imaginarias.

577. Æquationibus indeterminatis exprimitur nexus quidam inter quantitates illas incognitas, quæ possunt considerari ut indeterminatæ quantitates inter se ita connexæ, ut magnitudo unius a cæterarum magnitudine pendeat; ac is nexus etiam ubi

ubi æquatio binis tantummodo constat incognitis, est multo generalior eo, quem expressimus §.XIV, cum sæpissimè ita possint esse permixtæ quantitates illæ, ut nullo artificio separari possint, nec ulla formula inveniri data per alteram, qua exprimatur alterius valor, ut ibi; quod quidem contingit, ubi ad altiores gradus elevetur utraque; nam si ad secundum tantummodo elevetur altera, semper considerata alterâ tanquam cognitâ, ope methodi æquationum secundi gradus invenitur alterius valor, ut num. 575. in æquatione $x^2 + 2xy + y^2 + z^2y^2 + a = 0$ invenimus $x = -y + \sqrt{-z^2y^2 - a}$. Quin immo etiam si altera sit elevata ad gradum tertium, vel quartum, inveniri possunt formulæ, quæ ejus valorem exhibeant per reliquas; licet fieri possit, ut incidatur in quantitates imaginarias etiam, ubi ea quantitas realis est, adhibendo nimirum formulas, quæ proveniunt ex resolutione æquationum eorum graduum, ut docuimus §.XII, & XIII.

578. Plurima demonstrari possunt circa hujusmodi quantitatum nexus, & incrementa, ac decrementa earundem, ac circa limites valorum alterius quantitatis, qui alteram realem exhibeant, vel qui exhibeant datum numerum earumdem realium sibi respondentium, ubi in æquationibus altioribus plures radices haberi possunt: & quidem, ubi binæ tantummodo indeterminatæ sunt, vel tres, nexus idem exprimitur, & vero ipsis etiam oculis subjicitur in Geometria, in priore casu lineis, in posteriore

riore superficiebus, ac omnium curvarum, quas algebraicas dicunt, natura ab hujusmodi æquationibus pendet, ut natura altiorum quarumdam, quas dicunt transcendentes, pendet ab æquationibus quibusdam omnem finitam algebram transcendentibus, & involventibus quantitates infinitesimales. Ac de illis quidem agemus in applicatione Algebræ ad Geometriam, de his in calculo infinitesimali.

579. Interea ostendemus methodum, qua inveniri possint limites omnium substitutionum reddentium problema possibile, ubi una incognita assurgit ad secundum gradum tantummodo. Tractata hac sola ut incognita, inveniatur ejus valor methodo, qua resolvuntur æquationes gradus secundi. Is valor continebit quantitatem signo radicali affectam, quæ quantitas, prout fuerit positiva, vel negativa, problema erit possibile, vel impossibile. Et primo quidem non habeat ea quantitas ullum divisorem continentem quantitatem incognitam, ac ponatur $= 0$. Æquationis ex hac positione resultantis inveniantur radices omnes, ac eæ, quæ non habent alias ita sibi æquales, ut æqualium numerus ibi sit par, dicantur radices primi generis, reliquæ, siquæ sint, dicantur secundi. Radices primi generis erunt quæsiti limites, cum in iis tantum primum ejus æquationis membrum, sive quantitas illa signo radicali inclusa debeat transire per o, adeoque mutari e positiva in negativam, vel viceversa. Substituta nimirum quavis e radicibus primi generis, quantitas illa signo radicali inclusa debet esse $= 0$, substituta quavis in-

interjecta inter eam, & proximè sequentem ejusdem generis, debet esse valoris vel semper positivi, vel semper negativi: inter illam sequentem, & aliam ejusdem generis, quæ ipsam proximè consequitur, valor debet esse oppositus, & ita porro. Solum si inter binas ejusmodi radices inveniatur radix aliqua secundi generis, ea substituta, habebitur non quantitas ejusdem signi, cum reliquis, quæ iisdem limitibus includuntur, sed $= 0$. Quare substituto valore cujusvis radicis utriuslibet generis, problema erit possibile; substituto autem unico valore non congruente cum radice ulla, si quantitas illa obvenerit negativa, innotescet problema esse impossibile ibi, & in omnibus aliis positionibus usque ad limitem proximum: si positiva, possibile, ac inde jam constabit, quid inter binos quosque primi generis limites proximos contineatur, cum in singulis debeat possibilitas mutari in impossibilitatem, vel viceversa.

580. Sit æquatio $y^3 - 11y^2 + x^2 + 2xy + 59y + 20x + 72 = 0$. Erit $x^2 + (2y+20)x + (y^3 - 11y^2 + 59y + 72) = 0$. Quare $x = -(y+10) \pm \sqrt{((y^2 + 20y + 100) - (y^3 - 11y^2 + 59y + 72))}$ cujus terminus irrationalis non continet ullum divisorem habentem y. Eo posito $= 0$, fiet $y^2 + 20y + 100 = y^3 - 11y^2 + 59y + 72$, sive $y^3 - 12y^2 + 39y - 28 = 0$. Hæc æquatio componitur ex hisce tribus $y - 1 = 0$, $y - 4 = 0$, $y - 7 = 0$, adeoque

que habet radices reales 1, 4, 7, omnes inæquales. Hæ igitur erunt limites quæsiti. Ponatur pro y valor quivis non congruens cum iis radicibus in quantitate affecta signo radicali, nimirum in $y^2 + 20y + 100 - (y^3 - 11y^2 + 59y + 72)$, commodissimum autem erit substituere o, & habetur 100 — 72 valor positivus. Quare facta pro y quavis substitutione numeri cujusvis negativi, vel minoris quam 1, problema erit possibile, posito quovis medio inter 1, & 4 erit impossibile, posito quovis inter 4 & 7 erit iterum possibile, posito vero quovis majore quam 7, erit iterum impossibile, ac positis etiam 1, 4, 7 possibile erit. Et quidem si ponatur $y = 2$, habebitur $4 + 40 + 100 - (8 - 44 + 118 + 72) = 144 - 154 = -10$ quantitas negativa, quod ostendit facto $y = 2$ problema esse impossibile cum debeat esse $x = -(2 + 10) \pm \sqrt{-10}$. Atque eodem modo licebit aliis substitutionibus factis in eodem exemplo canonis veritatem experiri.

581. At si terminus irrationalis habeat divisores continentes incognitam, reducatur tota ad eumdem denominatorem, tum ponatur = o tam formula numeratoris, quam formula denominatoris ac binarum æquationum radices primi generis omnes erunt limites, & si quæ fuerint radices communes tam numeratori, quam denominatori, ita, ut eorum numerus in utraque æquatione simul sit impar, adhuc erunt limites, secus si par. Nam sive numerator, sive denominator signum mutet, muta-

mutabit ipſum quotus quantitatem exhibens. Mutabit autem ſignum numerator in ſuis radicibus primi generis, denominator in ſuis. Igitur ſi hæ communes utrique non fuerint, mutabit quotus in ſingulis. Si autem radicum communium numerus in uno fuerit impar in altero par, nimirum in utroque ſimul impar, mutabit ibi ſignum ille, non hic, adeoque mutabit & quotus: ſi in utroque ſeorſum ſumpto fuerit impar, vel in utroque par, adeoque in utroque ſimul par, mutabit ſignum in primo caſu uterque, in ſecundo neuter, adeoque ſignum quoti manebit in utroque caſu.

582. Sit æquatio $x^2 y + 2xy^2 + 3x^2 + 35y^2 + 26xy + 60x + 121y + 328 = 0$. Erit $(y+3)x^2 + (2y^2 + 26y + 60)x + (35y^2 + 121y + 328) = 0$, ſive $x^2 + (2y + 20)x + \left(35y + 16 + \frac{280}{y+3}\right) = 0$, adeoque $x = -(y+10) \pm \sqrt{\left((y^2 + 20y + 100) - \left(35y + 16 + \frac{280}{y+3}\right)\right)}$. Si quantitas irrationalis reducatur ad eumdem denominatorem multiplicando per $y+3$, fiet, $\left(\frac{y^3 + 23y^2 + 160y + 300}{y+3}\right) - \left(\frac{35y^2 + 121y + 328}{y+3}\right)$, ſive $\frac{y^3 - 12y^2 + 39y - 28}{y+3}$. Ex numeratore poſito $= 0$ habetur æquatio y^3

$-12y^2+39y-28=0$, cujus radices, ut num. 580, sunt 1, 4, 7; ex denominatore æquatio $y+3=0$, cujus radix unica -3. Quare limites sunt -3, 1, 4, 7. Posito autem $y=0$ in quantitate irrationali $\frac{y^3-12y^2+39y-28}{y+3}$, habetur $\frac{-28}{3}$ valor negativus. Quare substitutiones valorum existentium inter -3, & 1 reddunt problema impossibile, negativorum ante -3, & positivorum inter 1, & 4 possibile, inter 4, & 7 impossibile, post 7 possibile,

583. Illud hic notandum tantummodo, si substituatur valor radicis cujusvis ortæ ex numeratore, non communis denominatori, vel contra; valorem quantitatis irrationalis evadere $=0$, vel infinitum, Nam fiet in primo casu numerator $=0$, denominator quantitas finita, in secundo numerator quantitas finita, denominator $=0$. Sic in superiore exemplo si ponatur 1 pro y in formula $\frac{y^3-12y^2+39y-28}{y+3}$, habetur $\frac{0}{4}$, si ponatur -3, habetur $\frac{-280}{0}$,

584. At si ponatur valor radicis communis tam numeratori, quam denominatori, valor erit $=0$, finitus, vel infinitus, prout numerus radicum ejus valoris fuerit in numeratore major, æqualis, vel minor, quam in denominatore, & in eo casu, in quo

quo is valor finitus est, invenietur hoc pacto. Deriventur tam ex numeratore, quam ex denominatore aliæ ex aliis formulæ methodo exposita (num.464.), donec deveniatur ad formulas ex illa positione non evanescentes, & valor fractionis erit is, quem exhibebit fractio habens valores ita provenientes in iis formulis in numeratore, & denominatore. Atque hæc quidem regula generalis est omnibus fractionibus algebraicis continentibus indeterminatam quantitatem tam in numeratore, quam in denominatore, & carentibus terminis radicalibus, indeterminatam ipsam involventibus, qui substituto valore aliquo pro indeterminata eadem, simul evanescant. Ratio autem methodi in eo sita est, quod si ponatur pro ipsa indeterminatâ radix illa aucta quantitate in immensum exiguâ; differentia formulæ, sive hic, ubi substituta radice, formula proposita evanescit, valor formulæ ipsius exhibetur quam proximè a formula, quæ inter derivatas prima non evanescit ducta in incrementum illud radicis, vel ejus quadratum vel cubum, & divisa per 1, vel 1X2, vel 1X2X3 prout fuerit primo, vel secundo, vel tertio derivata, & ita porro juxta num.467. Ubi vero plures sunt radices æquales, ibi serius devenitur ad formulam non evanescentem, adeoque si numerus radicum æqualium fuerit major in numeratore, devenietur in eo ad formulam non evanescentem serius, quam in denominatore, & potestas incrementi radicis, in quam ducetur formula primo non evanescens orta ex numeratore, erit altior, quam in denominatore, & valorem ipsius reddet infinities mi-

norem: contra vero si numerus radicum in numeratore fuerit minor. Si autem æqualis fuerit radicum æqualium numerus utrobique, devenietur utrobique simul ad formulam non evanescentem, & utrobique potestas incrementi radicis, in quam ea ducitur, & numerus, per quem dividitur, erit idem prorsus; ac proinde satis erit solas formulas derivatas dividere alteram per alteram, quo præstito habebitur quam proximè valor fractionis ortus ex substitutione valoris in immensum proximi valori radicis, adeoque habebitur accurate valor ortus ex substitutione ipsius radicis.

585. Sit fractio $\frac{y^4 - 7y^3 + 18y^2 - 20y + 8}{y^3 - y^2 - 8y + 12}$.
Posito 2 pro y, utraque evadit $= 0$. Facto numeratore $= 0$, oritur æquatio $y^4 - 7y^3 + 18y^2 - 20y + 8 = 0$, composita ex æquationibus $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y - 1 = 0$, adeoque habens tres radices æquales $= 2$, facto $= 0$ denominatore, oritur $y^3 - y^2 - 8y + 12 = 0$ composita ex $y - 2 = 0$, $y - 2 = 0$, $y + 3 = 0$, adeoque habens binas radices æquales $= 2$, & ex numeratore derivatur formula $4y^3 - 21y^2 + 36y - 20$, ex denominatore $3y^2 - 2y - 8$, quarum utraque, posito 2 pro y, evanescit: secundò autem derivata erit ibi $12y^2 - 42y + 36$ pariter evanescens, hic $6y - 2$ non evanescens, ac ibi quidem solum tertio derivata $24y - 42$ non evanescit. Hinc ea fractio, posito 2 pro y, fit $= 0$.

586. At

586. At si fractio sit $\frac{y^4-9y^3+4y^2+36y-32}{y^3-y^2-8y+12}$, cujus & numerator, & denominator evanescit, posito 2 pro y, æquatio proveniens ex numeratore facto $=0$, componitur ex æquationibus $y-2=0$, $y-8=0$, $y+2=0$, $y-1=0$, adeoque habet unicam radicem $=2$, at æquatio orta ex denominatore componitur ex æquationibus $y-2=0$, $y-2=0$, $y+3=0$, & formula ex numeratore primo derivata $4y^3-27y^2+8y+36$ non evanescit, ex denominatore vero primo derivata $3y^2-2y-8$ evanescit, ac solum secundo derivata $6y-2$ non evanescit. Ejus igitur fractionis valor est infinitus.

587. Si demum fractio sit $\frac{y^4-4y^3+3y^2+4y-4}{y^3-y^2-8y+12}$, æquatio orta ex numeratore habet radices 2, 2, 1, -1, orta vero ex denominatore habet 2, 2, -3, adeoque in utraque idem est earum radicum numerus, & derivatis ex illo $4y^3-12y^2+6y+4$, & $12y^2-24y+6$, ex hoc $3y^2-2y-8$, & $6y-2$, prima evanescit utrobique, secunda ibi evadit 6, hic 10; adeoque valor ejus fractionis est $=\frac{6}{10}$.

588. Si autem formula radicales terminos habeat, methodus quidem est eadem, sed oportet radicalium ipsorum differentias nosse, quod in calcu-

lo differentiali docebimus. Hæc de fractionibus habentibus numeratores, & denominatores evanescentes dicta suffecerint, occasione accepta a limitibus possibilitatis æquationum indeterminatarum, in quibus limitibus præcipua præcepta exemplis quoque illustravimus; nam singula persequi, ac illustrare exemplis, & infinitum esset, & exigui fructus. Ad alia utiliora properabimus.

589. In problematis indeterminatis, ut etiam in determinatis, plerumque problema haberi potest pro soluto, ubi ad æquationem deventum sit. At potissimum in problematis numericis, si inter conditiones habeatur, ut excludatur irrationalitas, vel fractio, post inventam æquationem cætera exhibentem, quæ fere admodum facile invenitur, multo longiore ambitu opus est, & sæpe nullo artificio problema solvi potest. Id autem contingit, quia iisdem algebraicis litteris eodem prorsus modo rationales, & irrationales, integræ, & fractæ, positivæ ac negativæ quantitates exprimuntur. Adeoque eæ conditiones immediate exprimi non possunt. Exhibebimus exempla aliquot.

590. Quærantur bini numeri quadrati, quorum differentia æquetur numero dato. Si datus numerus dicatur a, quæsiti x, & y, habebitur $x - y = a$. In hujusmodi æquatione si pro y substituatur quivis numerus quadratus, erit $x = a + y$, adeoque valor quidem x obtinetur per ejusmodi æquationem; sed non habetur conditio, ut x sit numerus quadratus, & si fiat $x^2 - y^2 = a$ adeoque $x^2 = a + y^2$, habetur quidem & $x = \sqrt{a + y^2}$, sed habe-

habetur per formulam, quæ non statim constat, quo pacto ab irrationalitate liberari possit. Solvetur autem problema hoc artificio. Dicatur radix primi numeri quæsiti $x+y$, secundi $x-y$. Illius quadratum est $x^2+2xy+y^2$, hujus $x^2-2xy+y^2$. Quare eorum differentia erit $4xy$, ea posita $=a$ fiet $x=\frac{a}{4y}$. Hic jam irrationalitas evitatur, & assumpto pro y, quovis numero integro, vel fracto, habebitur x, & ejus ope $x+y$, & $x-y$.

591. Sit numerus propositus $a=40$, capiatur $y=10$, erit $\frac{a}{4y}=\frac{40}{40}=1=x$. Quare $x+y=11$, $x-y=-9$, cujus quadratum cum sit idem ac quadratum 9, quæsiti numeri erunt quadrata numerorum 11, & 9. Et quidem illius quadratum est 121, hujus 81, quorum differentia $=40$. Si autem pro y assumatur 2 erit, $\frac{a}{4y}=\frac{40}{8}=5$, adeoque $x+y=7$, $x-y=3$, & quadrati numeri quæsiti 49, ac 9 quorum differentia 40. Si pro y ponatur 3, erit $\frac{a}{4y}=\frac{10}{3}$, adeoque $x+y=\frac{10}{3}+3=\frac{19}{3}$, $x-y=\frac{10}{3}-3=\frac{1}{3}$, quorum quadrata $\frac{361}{9}$ & $\frac{1}{9}$, ac eorum differentia $\frac{360}{9}=40$.

592. Patet autem, si integri præterea numeri requirantur, oportere ut numerus datus a, sit divisi-

visibilis per 4, tum ut quoti $\frac{a}{4}$ sumatur divisor aliquis pro y, quod quidem formula illa exhibere non potuit, quæ numeri a divisores nequaquam exprimit. Porro cum in superiore exemplo sit $\frac{a}{4} = 10$, & numerus 10 habeat divisores tantummodo 1, 2, 5, 10, patet integros numeros haberi non posse, nisi pro y assumatur quipiam ex iis.

593. In illa etiam formula $\sqrt{a + y^2}$ potuisset evitari irrationalitas hoc artificio. Ponatur $y = z - \frac{a}{4z}$, & erit $y^2 = z^2 - \frac{a}{2} + \frac{a^2}{16z^2}$. Quare $a + y^2 = z^2 + \frac{a}{2} + \frac{a^2}{16z^2}$, cujus radix $z + \frac{a}{4z}$. Assumatur igitur pro z valor quivis, tum pro x valor $z + \frac{a}{4z}$, pro y valor $z - \frac{a}{4z}$, & erit factum. Si fiat $z = 10$, erit $z + \frac{a}{4z} = 11$, $z - \frac{a}{4z} = 9$, si assumatur $z = 2$, erit $z + \frac{a}{4z} = 7$, $z - \frac{a}{4z} = -3$ adeoque quadrati numeri quæsiti in priore casu 121 & 81, in posteriore 49, & 9, ut prius.

594. At si quærantur bini numeri quadrati, quorum summa æquetur numero dato, æquatio erit $x^2 + y^2 = a$, sive $x = \sqrt{a - y^2}$, quæ nullo ar-

-lo artificio reducitur. Priore methodo pro differentia adhibito, posita radice prioris $x+y$, habentur quadrata $x^2+2xy+y^2$, & $x^2-2xy+y^2$, quorum summa $2x^2+2y^2$ si fiat $=a$, erit $x^2+y^2 = \frac{1}{2}a$, ac redit illud idem, quod vitabatur. Si autem fiat $y = z + \frac{a}{4z}$, fit $a - y^2 = -z^2 + \frac{a}{2} - \frac{a^2}{16z^2} = -(z - \frac{a}{4z})^2$, quadratum nimirum negativo signo affectum, cujus radix imaginaria.

595. Quod si numerus datus sit quadratus, adeoque $x^2+y^2=a^2$, $x^2=a^2-y^2$, $x=\sqrt{a^2-y^2}$, possent quidem evitari signa negativa, posito $z+\frac{y^2}{4z}=a$, unde haberetur $a^2-y^2=z^2-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{16zz}$, & $x=\sqrt{a^2-y^2}=z-\frac{y^2}{4z}$. Sed ex æquatione $z+\frac{y^2}{4z}=a$ haberetur $4z^2+y^2=4az$, ac $z^2-az=-\frac{1}{4}y^2$, $z^2-az+\frac{1}{4}a^2=\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}y^2$, $z-\frac{1}{2}a=\sqrt{\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}y^2}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2-y^2}$; quod quæstionem eodem reducit, unde discesserat; nec ullo artificio obtinetur intentum.

596. Solum si quærantur bina quadrata, quorum

rum summa sit numerus quadratus, infinitæ solutiones haberi poterunt. Assumpto enim quovis numero quadrato u^2, inveniantur, per num. 590, alii bini x^2, y^2, quorum differentia æquetur huic, & erit $x^2 - y^2 = u^2$, adeoque $x^2 = u^2 + y^2$, quod quærebatur.

597. Plurima hujusmodi problemata proponi possunt, quæ ad numerorum potestates, & potestatum summas, vel differentias pertinent, in quibus curandum diversarum substitutionum ope, ut vel ipsæ potentiæ eliminentur, vel acquirantur formulæ, quæ radices habeant extrahibiles. Sed exempla allata ad quandam methodi ideam sint satis.

598. Plurium indeterminatarum æquationum ope, determinata quoque problemata solvuntur, ut diximus num. 188, ubi tot sunt æquationes, quot incognitæ quantitates. Plures methodi ab hoc artificio pendent, ut exempli gratia methodus, quam vocant alligationis in Arithmetica. Habeat quis binas massas compositas ex auro simul, & argento ita, ut in quavis libra primæ massæ contineantur unciæ auri numero a, argenti numero b, in secunda unciæ auri numero d, argenti numero e. Quæratur quot unciæ pro singulis libris singularum massarum sumendæ sint, ut fiat nova massa, in qua pro quavis libra contineantur auri unciæ l, argenti m.

599. Dicatur numerus unciarum primæ massæ x, secundæ y, numerus unciarum unius libræ, sive $12 = t$. Erit ut libra t ad partem assumptam x;

ita

ita numerus a, unciarum auri contentarum in prima massa, ad numerum contentarum in massa nova; & pariter, ut libra t ad partem secundæ massæ y, ita numerus d, unciarum auri contentarum in secunda massa, ad numerum earumdem in nova, qui bini numeri unciarum auri analyticè inventi debent poni æquales numero illi dato l unciarum ejusdem, quæ debent haberi in nova massa. Eo pacto obtinetur una æquatio. Eodem modo ope unciarum argenti obtinetur secunda, ac earum ope inveniuntur quæsiti valores x, & y, & solvitur problema. En calculi specimen.

Pro quavis libra $= t$

	auri	argenti
est in massa 1.ª	a	b
in 2.ª	d	e
debet esse in 3.ª	l.	m

Erit $t . x :: a . \frac{ax}{t}$ $\qquad t . x :: b . \frac{bx}{t}$

$t . y :: d . \frac{dy}{t}$ $\qquad t . y :: e . \frac{ey}{t}$

$\frac{ax}{t} + \frac{dy}{t} = l$ $\qquad \frac{bx}{t} + \frac{ey}{t} = m$

$ax + dy = tl$ $\qquad bx + ey = tm$

$ax = tl - dy$ $\qquad bx = tm - ey$

$x = \frac{tl - dy}{a}$ $\qquad x = \frac{tm - ey}{b}$

Atum.

$$\frac{tl-dy}{a}=\frac{tm-ey}{b}$$
$$btl-bdy=atm-aey$$
$$aey-bdy=atm-btl$$
$$y=t\times\frac{am-bl}{ae-bd}$$

600. Invento y, jam habetur & x in formula $\frac{tl-dy}{a}$, vel $\frac{tm-ey}{b}$. Sed formula inventa pro y admodum facile aptatur ipsi x, si notetur, quod erant a, & b respectu x, esse d, & e respectu y, adeoque si in illa formula ponantur hi valores pro illis, & illi pro his habebitur $x=t\times\frac{dm-el}{db-ae}$.

601. Sint exempli gratia in prima massa unciæ auri 10, argenti 2. In secunda auri 4, argenti 8, debeant esse in tertia auri 9 argenti 3. Distribuantur numeri ut supra,

Pro quavis libra	auri	argenti
erat in massa 1.	10.	2
in 2.	4.	8
debet esse in 3.	9.	3

Capiendum ex 1.ª $x=12\times\frac{4\times3-8\times9}{4\times2-10\times8}=12\times\frac{12-72}{8-80}=10$

ex 2.ª $y=12\times\frac{10\times3-2\times9}{10\times8-2\times4}=12\times\frac{30-18}{80-8}=2$

602. Patet autem in parte primæ massæ fore auri

auri uncias $\frac{10\times10}{12}=\frac{100}{12}$, argenti $\frac{10\times2}{12}=\frac{20}{12}$, in in parte secundæ, auri $\frac{2\times4}{12}=\frac{8}{12}$, argenti $\frac{2\times8}{12}=\frac{16}{12}$ adeoque fore in massa nova auri $\frac{108}{12}=9$, argenti $\frac{36}{12}=3$, ut oportebat.

603. Quin immo canon etiam generalis erui potest hoc pacto. Quæris quid debeas capere ex una massa? Pone in prima linea numeros auri, & argenti pertinentes ad alteram, in secunda numeros pertinentes ad illam ipsam, in tertia numeros pertinentes ad novam. Duc primum numerum primæ lineæ in secundum tertiæ, & secundum primæ in primum tertiæ, ac hoc productum subduc ab illo, & residuum serva pro fractionis cujusdam numeratore. Duc primum primæ in secundum secundæ, & secundum primæ, in primum secundæ, & hoc productum subduc ab illo, ac residuum sume pro denominatore. Fractionem ejusmodi duc in 12, & habebis intentum. Patet enim id ipsum factum esse in formula $y=t\times\frac{am-bl}{ae-bd}$.

604. At hic sæpe illud accidet, quod supra monueramus, ut negativi valores problema evertant. Si in prima massa sint auri unciæ 10, argenti 2, in secunda auri 9, argenti 3, & in tertia debeant esse auri 8 argenti 4; obveniet quidem $y=12\times\frac{40-16}{12}=24$, positivi valoris, at $x=$

12

$12 \times \frac{36-24}{18-30} = -12$, negativi, quorum utrumque ostendit problema, ut proponitur, esse impossibile, cum nimirum ex 12 unciis accipi non possint 24, nec negativus numerus unciarum addi, nisi subtrahendo. Ostendit autem ejusmodi solutio, ad obtinendum quod proponitur oportere assumere 24 uncias secundæ massæ, & ex iis demere 12 uncias massæ similis massæ primæ, quod tamen obtineri non potest, cum ex secunda massa non possit demi pars primæ similis metallorum ibi permixtorum. *Id* autem semper continget, ubi ratio auri ad argentum in nova massa fuerit aut major, aut minor, quam in utraque ex datis. Nam debet esse intermedia.

605. Similis est methodus, si plura simul permixta sint metalla in singulis massis, & totidem requirantur massæ datæ, quot metalla permiscentur: ac totidem æquationes obtinentur, adeoque calculus evadit multo operosior. Plures aliæ methodi eodem artificio deteguntur, & canones pro iis eruuntur generales, ut interpolationis methodus, ac methodus reversionis serierum, & aliæ plures, de quibus agemus, ubi de seriebus. Interea notetur & illud ex generali problematum solutione oriri theoremata, ac canones generales, si ultima illa solutionis conclusio ex algebraico sermone in vulgarem transferatur, uti factum est numero 603.

606. Atque hæc quidem Tyroni abunde sunt, qui si se in his diligenter exercuerit, haud difficulter sublimiora per se ipse vel inveniet, vel apud Auctores passim occurrentia intelliget.

EXPLICIT TOMI I. PARS II.

IN-

INDEX PARAGRAPHORUM.



ER-

ERRATA CORRIGE

Pag.	lin.	Errata	Corrige
16.	19.	$\frac{e}{f} +$	$\frac{e}{f} =$
19.	14.	$a^{10}{}_{6}$	$a^{\frac{10}{6}}$
22.	2.	n.42.	n.44.
25.	18.	$6\,abc$	$6\,a^2\,bc$
26.	7.	$4\,a^2 c$	$4a^3\,c$
30.	19.	$\frac{5}{8}$	$\frac{5}{16}$
34.	15.	10. 30.	10. 15. 30.
37.	13.	$40\,x$	$40\,x^2$
38.	15.	$+ 3x - 12$	$+ 2x - 12$
47.	22.	107.	102.
	23.	$2cy$	$2cy^2 + 2bcy$
48.	7.	$2\,by$	$2\,bcy$
49.	14.	$\overline{x+a^2}$	$\overline{x+a}^2$
50.	17.	$\overline{x+a^3}$	$\overline{x+a}^3$
53.	1.	$\overline{x-a}^{\frac{m}{r}}$	$\overline{x+a}^{\frac{m}{r}}$
74.	23.	148.	143.
78.	4.	$-\,acx$	$-\,ccx$
80.	25.	$10b^3\,c^2\sqrt{y}$	$10b^3\,c^2\,y\sqrt{y}$
81.	3.	$10.b^2\,cy$	$10b^2\,c^3\,y$
	ibid.	$b^5\,y\sqrt{y}$	$b^5\,y^2\sqrt{y}$
	4.	$b^5\,y$	$b^5\,y^2$
	15.	$ab\sqrt{xy}$	$2ab\sqrt{xy}$

91.	13.	$=10$	$=0$
92.	8.	x	x^2
93.	12.	$-\frac{1}{2}=$	$-\frac{1}{2}p=$
102.	23.	$\frac{\sqrt{m+\sqrt{\&c.}}}{2}$	$\sqrt{\frac{m+\sqrt{\&c.}}{2}}$
103.	1.	$m-\sqrt{}$	$m+\sqrt{}$
104.	5.	$=4$	$=40$
105.	24.	5 6	6 8
114.	13.	$2\frac{-}{3}$	$2\frac{2}{3}$
115.	3.	$am \ldots pm$	$an \ldots pn$
	4.	$am \ldots mp$	$an \ldots np$
127.	6.	$-\frac{1}{4}pp$	$-\frac{1}{2}pp$
128.	23.	$\frac{zq}{3r}$	$z-\frac{q}{3r}$
136.	2.	311.	310.
139.	25.	$\sqrt{-3c} \ldots \sqrt{-3c}$	$\sqrt{3c} \ldots \sqrt{3c}$
140.	14.	$-c^2)^2$	$-c)^2$
	24.	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{27}$
143.	20.	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{1}$	$\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$
146.	8.	$+\frac{2}{27}q^3$	$+\frac{2}{27}q^3)$
149.	6.	$+\frac{1}{27}q$	$+\frac{1}{27}q^3)$
151.	14.	$\sqrt{3n}$	$\sqrt{-3n}$
	15.	$=m$	$=-m$
154.	18.	qui	qui in
155.	17.	$=-1$	$=1$

157.

157.	7.	$q)^3$	$q^3)$
162.	3.	3821 ... 0279	3931 ... 0268
	10.	65	64
	13.	66	65
163.	5.	$\frac{17}{20}$	$\frac{17}{21}$
	11.	$\sqrt{-32}$	$\sqrt{-30}$
	16.	732.	742.
167.	11.	minor	major
	21.	$\sqrt{9+10}$	$\sqrt{(9+10)}$
168.	10.	266.	357.
169.	12.	, &	&c., &
	16.	tertiam	reliquas
	23.	$-\frac{1}{2}a+$	$-\frac{1}{2}a\pm$
	25.	invenimus	invenimus n.365.
170.	4.	753	761
175.	18.	$-21y$	$+21y$
	20.	in 7	in 8
176.	23.	mere	more
178.	18.	Ea	Ex ea
181.	20.	$x-1$	$y-1$
	21.	741	841
184.	28.	in tertia	in tertia, secunda, & quarta in quinta
187.	8.	$-2tqm^3$	$+2tqm^3$
191.	12.	287	387
194.	25.	$+\sqrt{-2}$	$+\sqrt{2}$
	29.	$+x\sqrt{-2}-\sqrt{-1}$	$+x\sqrt{-2}-\sqrt{-1}$
	30.	$+\sqrt{-2}$	$+\sqrt{-2}$
	31.	$+\sqrt{-1}$	$+\sqrt{2}$
196.	8.	-1000	-100

201.

201.	12.	$-2r$	$-rx$
	15.	$+ty^2$	$+ty^2)$
203.	4.	393	394
204.	9.	$+py$	$+pxy$
204.	10.	$+p)$	$+py)$
	12.	$+p^2)$	$+py)^2$
206.	26.	259	249
207.	7.	omittens	omitten-
213.	14.	>338	>378
217.	34.	positivs	positivus
228.	22.	$-16x+2q$	$-6x+10$
232.	7.	Py^2	Qy^2
	17.	Py^2	Qy^2
247.	26.	397	446
249.	2.	479	472
250.	19.	$=12x$	$=120x$
257.	15.	504	501
261.	23.	442	447

Præterea pag. 140. lin. 2. dele valoris negativi, vel positivi, nimirum prout $-3c$ fuerit

Pag. 154. &c. corrige articulorum numeros a 344 ad 354.